CENGAGE Learning

TEC de Monterrey
DEL SISTEMA TECNOLÓGICO DE MONTERREY

CÁLCULO APLICADO

Competencias matemáticas a través de contextos

TOMO I

PATRICIA SALINAS, JUAN ANTONIO ALANÍS, RICARDO PULIDO
FRANCISCO SANTOS, JULIO CÉSAR ESCOBEDO, JOSÉ LUIS GARZA

CÁLCULO APLICADO

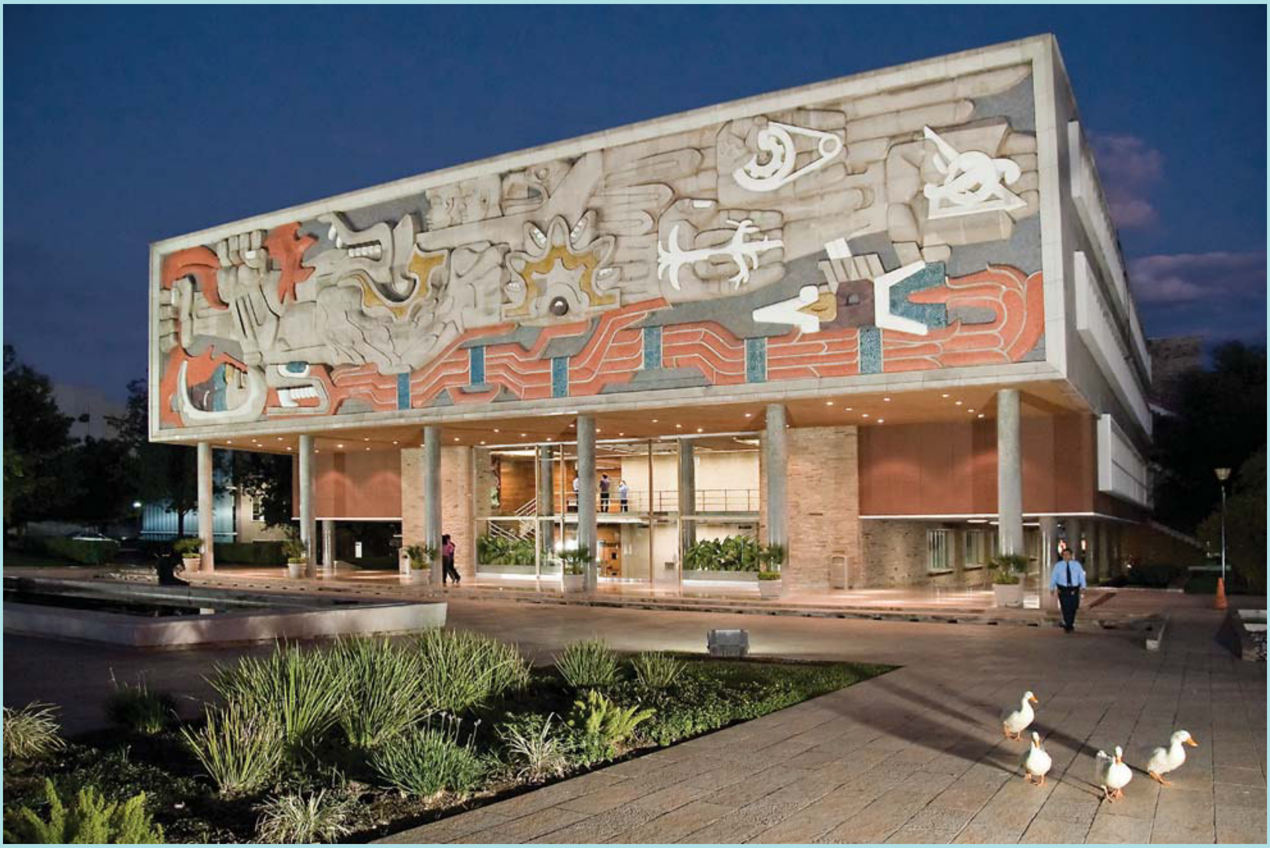
Competencias matemáticas a través de contextos

TOMO I

El Sistema Tecnológico de Monterrey mantiene una iniciativa por actualizar sus programas de estudio ante las nuevas demandas que la sociedad impone a la educación universitaria.

Esta realidad ha impulsado una dinámica de trabajo continuo para los autores de esta obra, quienes toman para sí, el problema de dar respuesta a la institución construyendo una alternativa que considere el carácter instrumental del sector curricular de Matemáticas.

En ese sentido, esta obra ofrece a los estudiantes un conocimiento de la Matemática que les sea útil como instrumento para plantear y resolver problemas propios de diversas áreas y de las diferentes especialidades profesionales.



Vista del Edificio de Rectoría

CÁLCULO APLICADO
Competencias matemáticas a través de contextos
TOMO I

Autores:
Norma Patricia Salinas Martínez
Juan Antonio Alanís Rodríguez
José Luis Garza García
Ricardo Pulido Ríos
Francisco Xavier Santos Leal
Julio César Escobedo Mireles

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning™

Cálculo Aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos Tomo 1

Norma Patricia Salinas Martínez/ Juan Antonio Alanís Rodríguez/ José Luis Garza García/ Ricardo Pulido Ríos/ Francisco Xavier Santos Leal/ Julio César Escobedo Mireles

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director de producto y desarrollo Latinoamérica:
Daniel Oti Yvonett

Director editorial y de producción Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Editor:
Sergio R. Cervantes González

Coordinadora de producción editorial:
Abril Vega Orozco

Editor de producción:
Jorge Manzano Olmos

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Diseño de portada:
Jorge Manzano Olmos

Imagen de portada:
Instituto Tecnológico de Monterrey (ITESM)

Composición tipográfica:
JL Mau-Ro Servicios Editoriales

Captura de texto y elaboración de gráficas:
Eliud Quintero Rodríguez y Rebeca Cisneros Rangel, estudiantes del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey

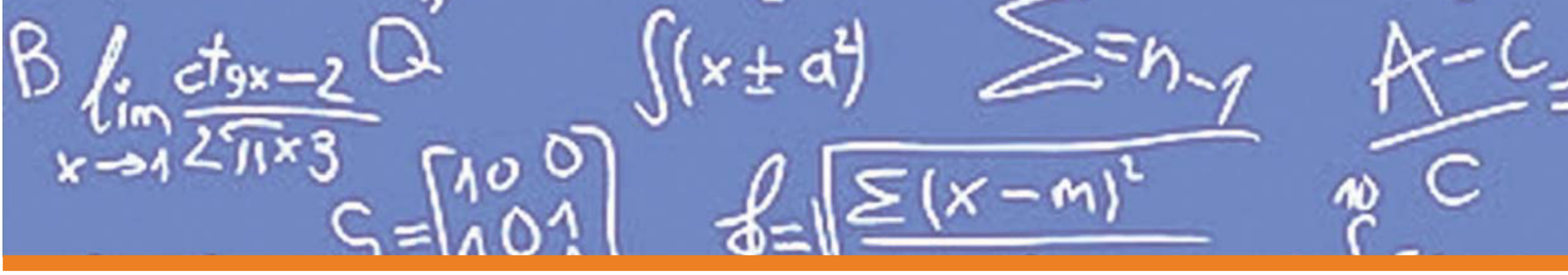
© D.R. 2012 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning™ es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en Internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

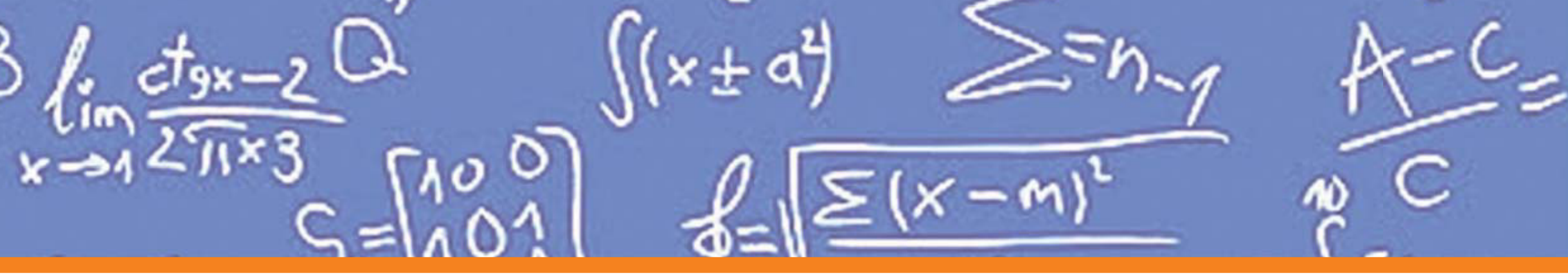
Datos para catalogación bibliográfica:
Cálculo Aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos Tomo 1
Norma Patricia Salinas Martínez/ Juan Antonio Alanís Rodríguez/ José Luis Garza García/ Ricardo Pulido Ríos/ Francisco Xavier Santos Leal/ Julio César Escobedo Mireles
ISBN-13: 978-607-481-771-3
ISBN-10: 607-481-771-5

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12



Contenido



Prefacio

CÁLCULO APLICADO
Competencias matemáticas a través de contextos
TOMO I

Con esta obra se hace una propuesta sobre

qué, cómo, y para qué enseñar/aprender *Cálculo*

pensando en favorecer un aprendizaje *funcional* del mismo. En este sentido, la meta que perseguimos es lograr que quien le estudie:

- infiera relaciones y resultados del Cálculo a partir de una variedad de contextos reales,
- analice y razone utilizando nociones y procedimientos propios del Cálculo,
- formule y resuelva problemas utilizando el lenguaje simbólico,
- argumente adecuadamente decisiones y estrategias de solución al resolver problemas,
- y comunique de manera eficaz las soluciones que construya.

Estamos proponiendo una manera de interactuar con el conocimiento del Cálculo en el aula universitaria que favorezca la formación de profesionales competentes en Matemáticas; poseedores de un aprendizaje propenso a ser aplicado en las áreas de especialidad de las distintas carreras universitarias.

Para dar oportunidad a esta meta hemos estructurado el contenido del Cálculo de forma tal que sus resultados se identifiquen al enfrentar problemas relacionados con el *predecir el valor de una magnitud que está cambiando*.

La *práctica* de la *predicción* conduce al contenido y provee de significado a las nociones y procedimientos asociados a la *razón de cambio* y el *cambio acumulado*, que se entrelazan para dar respuesta a la problemática.

Compartimos la idea de que esta forma de estructurar el contenido, *(el qué)* ofrece la oportunidad de ser partícipe en la generación de conocimientos relacionados con la *problemática de variación* que el Cálculo trata.

Cuando este significado permea el contenido del Cálculo, las nociones de *derivada* e *integral* llegan a constituir el *Teorema Fundamental del Cálculo*, el cual resulta ser una verdad evidente cuando se actúa conforme a la problemática de predicción.

Es incuestionable la importancia que tiene para quien estudia Matemáticas contar con un manejo fluido y simultáneo de símbolos y gráficas, de la *representación gráfica*, *numérica* y *algebraica* de sus nociones y procesos. Igualmente importante resulta la *identificación* de patrones de comportamiento en cada una de estas representaciones, y a la vez, la *coordinación* de un mismo patrón en diferentes contextos de representación.

Estamos claros que habilidades como las anteriores no se alcanzan como consecuencia inmediata de la enseñanza, aún y cuando ésta haga un uso insistente de las diferentes representaciones. Nuestro análisis de esta problemática didáctica nos ha permitido tomar decisiones en cuanto a la forma adecuada y oportuna de introducir las diferentes representaciones en el contenido matemático, incluyendo entre ellas al mismo lenguaje cotidiano en el que se plantean los problemas reales incitando su modelación matemática.

Hemos por tanto dosificado la integración de las diferentes representaciones (numérica, algebraica y gráfica) según su pertinencia en el desarrollo del contenido, y sin olvidar el propósito de arribar al momento propicio para encarar el desarrollo de habilidades matemáticas como son el manejo y la transformación de estas representaciones. Se estimula además la competencia de *modelación* al transformar el lenguaje cotidiano en información numérica, algebraica y/o gráfica, siempre en relación con una problemática común.

En particular, haremos uso de diferentes recursos tecnológicos *didácticamente integrados* al contenido para interactuar con la problemática de predicción, ofreciendo con ello una nueva manera de interactuar con el contenido del Cálculo (*el cómo*) donde la tecnología nos permite observar, organizar y conjeturar razonamientos.

Estamos confiriendo a la competencia de *visualización* un papel activo en el proceso de aprendizaje, competencia que se desarrolla especialmente cuando la tecnología apropiada se utiliza como un medio para acceder a nuevos escenarios de interacción con el Cálculo.

En la propuesta que esta obra presenta, se considera una amplia variedad de contextos reales en los que la problemática de la predicción plantea preguntas de interés actual, y provoca procesos de activación de la aplicación del aprendizaje, demandando con ello capacidades de análisis, razonamiento y comunicación.

A nuestro juicio, un aprendizaje del Cálculo donde el conocimiento emerge de un conjunto de problemas bien identificados resulta motivador pues se comprende la utilidad de la Matemática con la que se está interactuando.

Hablamos de apreciar el conocimiento matemático en su calidad de herramienta útil para resolver problemas (*el para qué*), y generar procesos cognitivos con más posibilidades de ser transferibles a diferentes situaciones.

Lograr la movilización de la información obtenida sobre Cálculo hacia otros campos disciplinares, es la empresa que nos motiva a proponer esta nueva obra como medio para impulsar, de manera decidida, una perspectiva de *desarrollo de competencias matemáticas*.

Vista del Jardín junto
al Edificio de Rectoría,
al fondo el CETEC

Introducción a la Unidad I: La Problemática

Para comprender el Cálculo resulta necesario conocer el problema o la clase de problemas que provocaron su surgimiento y su evolución en estrecha relación.

Para el caso del Cálculo tales problemas y su relación están “a la vista” en el mismo enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo.

Este teorema, en una de sus versiones (la de la integral) establece que:

Sea $f(x)$ función de variable real continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es una antiderivada de la función $f(x)$.

Lejos de pretender que este enunciado hable por sí mismo, lo que pretendemos más bien es subrayar que su significado, el que es factible de ser aplicado, no está evidente en el enunciado.

Los conceptos de *derivada*, *integral*, *antiderivada* y *diferencial*, los cuatro conceptos clave en la teoría del Cálculo, no surgieron en la forma que puede apreciarse cuando se estructura la teoría desde un punto de vista formal y con cierto grado de rigor.

Los cuatro conceptos funcionaban en la solución de problemas sin preocupar su definición teórica. El mismo teorema era, por decirlo de alguna manera, “la verdad evidente que entrelaza nociones” y que permitió crear procedimientos en la búsqueda de solucionar un rango cada vez más amplio de problemas que comparten algo en común.

Las nociones de *razón de cambio* y *cambio acumulado* han sido precursoras de los conceptos de *derivada* e *integral* (*definida*). Es con el significado asociado a estas nociones que podemos presentar la problemática en la que el Cálculo surgió y en la que adquiere sentido para su aplicación en la solución de problemas.

Esta Unidad considera la problemática de predecir el valor de una magnitud que está cambiando con respecto a otra cuando se conoce sobre la *razón de cambio*. Se presenta la solución de la problemática a través de la aplicación de un método numérico para aproximar valores de la magnitud.

A través de presentar diferentes contextos reales se muestra el surgimiento de los *modelos matemáticos* que representan el *valor exacto* de la magnitud en consideración, asociando de este modo la utilidad de cada modelo en relación con el contexto real correspondiente.

De este modo se reconoce en los diferentes tipos de *funciones de una variable real* la solución de la problemática de predicción de valores de la magnitud bajo estudio. A través de la representación gráfica de la *función*, se analiza e interpreta el comportamiento de la magnitud y se construyen estrategias algebraicas apoyadas en la visualización para evidenciar características del tipo de crecimiento o decrecimiento que experimenta. La detección de valores máximos y/o mínimos forma parte fundamental de este análisis.

Cabe mencionar que la competencia de resolver problemas se desarrolla en cada tema tratado, y también se hace en forma transversal al aplicar el método numérico que responda a la obtención del cálculo aproximado de valores de la magnitud. El uso de recursos tecnológicos se motiva en la búsqueda de la mejora de la aproximación obtenida mediante el método numérico, ofreciendo un escenario donde el razonamiento sobre *procesos infinitos* encuentra oportunidad de trascender intuiciones de naturaleza conflictiva. De esta forma se podrá dar solución a la problemática de predicción aún y cuando la *función* que modela a la magnitud no se conoce explícitamente, pero sí se conoce la relación que existe entre ella y sus sucesivas *razones de cambio*.

En síntesis, presentar la *problemática* (título de esta Unidad) es evidenciar la forma en que el Teorema Fundamental del Cálculo tiene un *sentido funcional* de enfrentar problemas, y es a través de ello que esperamos caracterizar los distintos modelos matemáticos representados con las *funciones de una variable real*.

Vista del Lago adjunto al Edificio CIAP.

CÁLCULO APLICADO

Competencias matemáticas a través de contextos

TOMO I

La problemática

Temas

1.1 Estudio del Cambio uniforme. Modelo lineal.

1.2 Cálculo del Valor aproximado del cambio acumulado.

1.3 Cálculo del Valor exacto del cambio acumulado. Modelo polinomial.

1.4 Estudio Cualitativo del cambio NO uniforme. Modelo cuadrático.

1.5 Estudio Cualitativo del cambio NO uniforme. Modelo Cúbico.

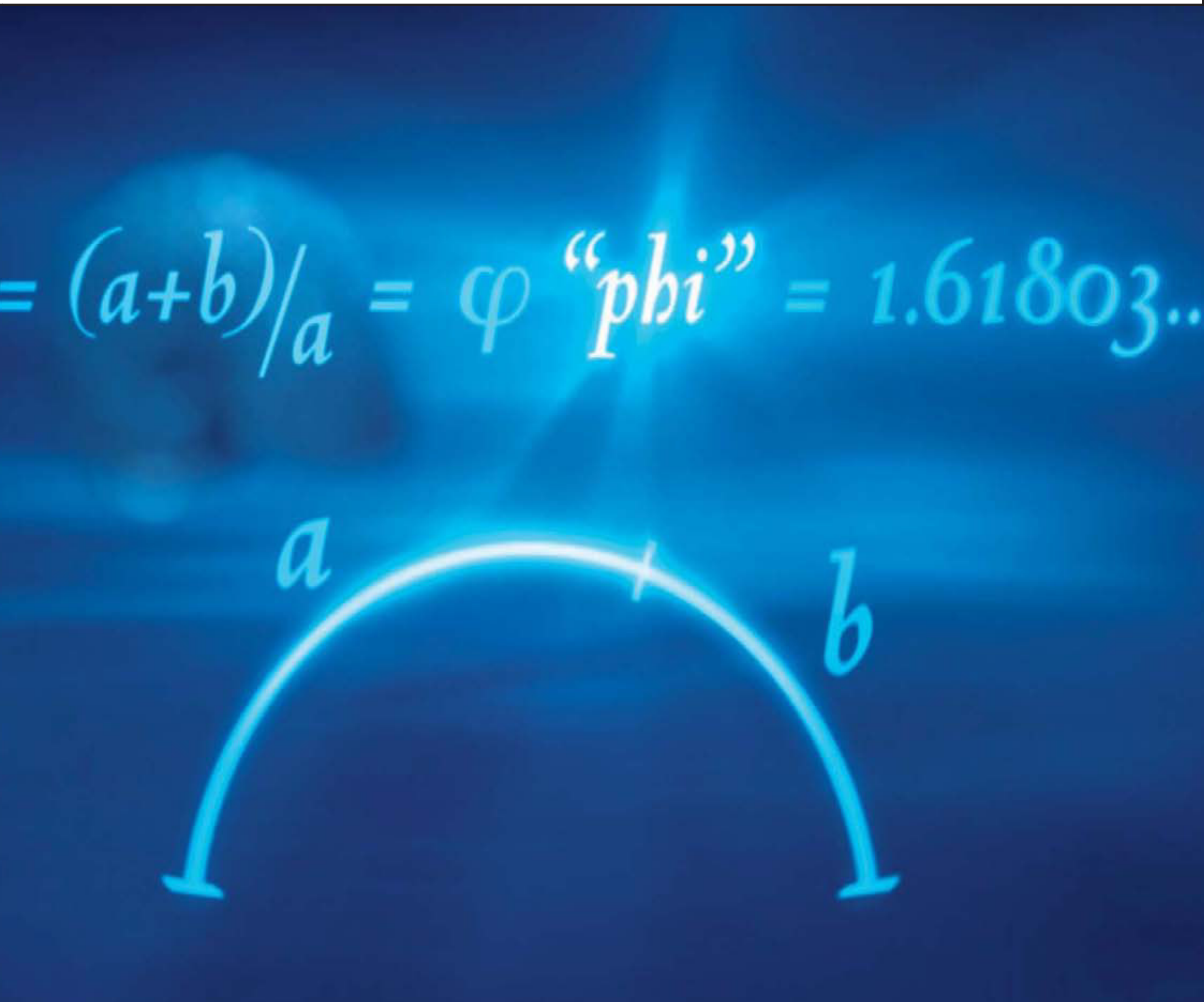
1.6 Valor Exacto del cambio acumulado. Modelo exponencial.

1.7 Valor Exacto del cambio acumulado. Modelo trigonométrico.

1.8 Nuevos modelos.

En esta Unidad se introduce la problemática de predecir el valor de una magnitud que está cambiando con respecto a otra cuando se conoce sobre la *razón de cambio* de dicha magnitud. Se presenta la solución de la problemática a través de la aplicación de un método numérico para aproximar valores de la magnitud. A través de presentar diferentes contextos reales se muestra el surgimiento de los modelos matemáticos que representan el valor exacto de la magnitud en consideración, asociando de este modo la utilidad de cada modelo en relación con el contexto real correspondiente.

Esta Unidad I permitirá al estudiante reconocer en los diferentes tipos de *funciones de una variable real* la solución de la problemática de predicción de valores de una magnitud bajo estudio, además de interpretar en la representación gráfica de la *función* un modelo matemático para analizar el comportamiento de la magnitud. A su vez, se desarrollará en el estudiante la competencia de solución de problemas al aplicar un método numérico que responda al cálculo aproximado de valores de la magnitud; y el uso de recursos tecnológicos se motivará en la búsqueda de la mejora de la aproximación obtenida mediante el método numérico. De esta forma el estudiante podrá dar solución a la problemática de predicción aún y cuando la *función* que modela a la magnitud no se conoce explícitamente, pero se conoce la relación que existe entre ella y sus sucesivas *razones de cambio*.



UNIDAD

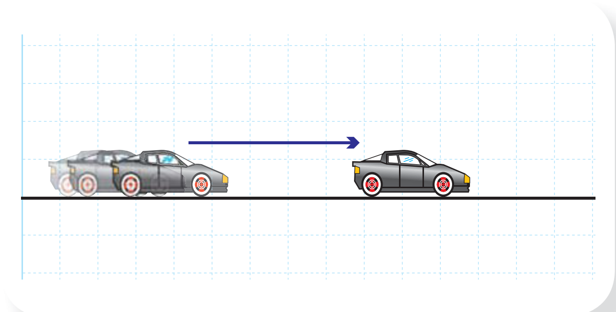
1.1 Estudio del cambio uniforme. Modelo lineal

En este tema analizamos diferentes contextos reales en los que se consideran ciertas magnitudes que varían de manera uniforme con respecto a otra magnitud. De este análisis identificamos al modelo matemático que permite precisar el comportamiento de la magnitud en cuestión: la función lineal. Establecemos y utilizamos las representaciones numérica, algebraica y gráfica del Modelo lineal. Enfatizamos el papel de los coeficientes en la representación algebraica del Modelo lineal como parámetros que muestran un valor inicial de la magnitud y el de la razón de cambio de la magnitud, el cual es constante.

Situación Problema 1.1

En seguida presentamos tres contextos reales en los que se considera la variación de una magnitud con respecto a otra. En cada contexto se cuenta con información a partir de la cual se pueden responder las preguntas planteadas. El propósito de esta Situación Problema consiste, además de contestar, en analizar la problemática común que se presenta en los tres contextos reales y su estrategia de solución.

Primer contexto real. Un automóvil transita por una carretera recta.



La siguiente tabla muestra el kilómetro sobre la carretera en el que se encuentra el automóvil para diferentes valores del tiempo en su recorrido:

t (en horas)	x (kilómetro sobre la carretera)
0	25
.5	51
1	77
1.5	103
2	129

a) Cuál será la posición del automóvil a las $t = 3$ horas?

Suponiendo que cada hora el automóvil avanza $77 - 25 = 52$ *kilómetros, como lo sugiere la tabla, entonces a las* 3 *horas el automóvil estará* 52 *kilómetros después de su posición a las* 2 *horas.*

$$x = 129 + 52 = 181 \text{ kilómetros.}$$

b) ¿Dónde estará el automóvil a las 2 horas y cuarto?

Suponiendo que cada hora el automóvil avanza 52 kilómetros, y que durante el transcurso entre las 2 y las 3 horas mantiene su velocidad constante, entonces a las 2 horas y cuarto habrá pasado un intervalo de tiempo de un cuarto de hora (a partir de $t = 2$) durante el cual recorrería la cuarta parte de los 52 kilómetros. Por tanto la posición del automóvil será

$$x = 129 + (52)(0.25) = 142 \text{ kilómetros.}$$

c) Suponiendo que el automóvil mantiene su velocidad constante, ¿en qué instante pasará por la gasolinera más cercana que se encuentra en el kilómetro 167 de la carretera?

Suponer la velocidad constante permite modelar el comportamiento de la posición del automóvil mediante la expresión matemática

$$x = 25 + 52t$$

El número 25 indica la posición que inicialmente tiene el automóvil (cuando $t = 0$) y el número 52 expresa la velocidad constante en kilómetros por hora. Al multiplicar 52 por t se está calculando la distancia recorrida por el automóvil desde el tiempo 0 hasta el tiempo arbitrario t, esto es, durante el intervalo de tiempo transcurrido de t horas.

Cuando se sustituye en la expresión anterior el valor de $x = 167$ se produce una ecuación lineal de la que se despeja el tiempo t:

$$167 = 25 + 52t$$

$$167 - 25 = 52t$$

$$142 = 52t$$

$$\frac{142}{52} = t \quad \text{o bien} \quad t = \frac{71}{26}$$

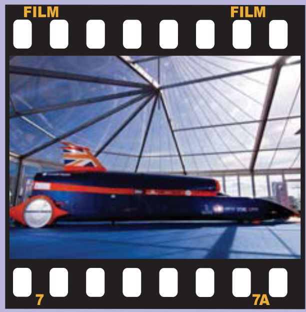
Al aproximar a dos decimales este quebrado, podemos decir que a las 2.73 horas (2 horas con 44 minutos) el automóvil pasa por la gasolinera.

Segundo contexto real. Se coloca una olla con agua en una parrilla encendida de modo que la temperatura T del agua aumenta uniformemente a razón de 6 °C/minuto.

a) En un lapso de tres minutos, ¿cuánto aumenta la temperatura?

¿Sabías que?...

En 1997 el automóvil con forma de avión, *Thrust Super Sonic*, rebasó por 8.5 km/hora la barrera del sonido, sin embargo para el 2012 se espera contar con un nuevo récord establecido por el *Bloodhound Super Sonic Car*, alcanzando una velocidad de 1 600 kilómetros por hora, es decir, 1.4 veces más rápido que la velocidad del sonido.



La razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo es de 6 °C/*minuto, por tanto, pasado cada minuto se tiene un aumento de* 6 °C, *entonces, en* 3 *minutos se tiene un aumento de* $(6)(3) = 18$ °C *en la temperatura.*

b) Si a los 2 minutos la temperatura del agua era de 50 °C, ¿cuál será su temperatura a los cinco minutos?, y ¿cuál fue la temperatura al inicio, cuando se colocó la olla en la parrilla?

De los 2 *a los* 5 *minutos se tiene un lapso de* 3 *minutos, durante el cual la temperatura aumenta* 18 °C. *Por otra parte, la temperatura a los* 2 *minutos era* 50 °C, *entonces, a los* 5 *minutos será de* $50 + 18 = 68$ °C.

El valor inicial de la temperatura podemos calcularlo al restar a los 50 °C *el cambio de temperatura ocurrido en un lapso de* 2 *minutos, que es* $(6)(2) = 12$ °C. *Por tanto, la temperatura al inicio fue* $50 - 12 = 38$ °C.

c) ¿Cuál es el cambio en la temperatura ocurrido entre los 5 y los 6.5 minutos?, ¿y entre los 8 y 9.5 minutos?

De los 5 *a los* 6.5 *minutos se tiene un lapso de* 1.5 *minutos en los cuales el cambio de la temperatura es de* $(6)(1.5) = 9$ °C. *Entre los* 8 *y* 9.5 *minutos el cambio de temperatura es el mismo,* 9 °C, *ya que el cambio en el tiempo es el mismo,* 1.5 *minutos.*

d) Construye una expresión matemática a través de la cual se pueda predecir la temperatura del agua, T (en °C) cuando transcurre un número "arbitrario" de t minutos.

Considerando el valor inicial de la temperatura obtenido en b) y agregando el cambio que experimenta la temperatura en un lapso de tiempo representado por t, *se puede expresar la temperatura en términos del tiempo mediante* $T = 38 + 6t$.

e) ¿En qué instante comienza a hervir el agua? (Suponer el grado de ebullición de 100 °C).

Para encontrar el valor del tiempo t *en que se llega al grado de ebullición, sustituimos en la expresión construida en d) el valor* 100 *para generar una ecuación lineal y despejar* t:

$$100 = 38 + 6t$$
$$100 - 38 = 6t$$
$$62 = 6t$$

$$t = \frac{62}{6} = \frac{31}{3}$$

El agua comienza a hervir a los 10 *y un tercio minutos, esto es a los* 10 *minutos* 20 *segundos.*

Tercer contexto real. La temperatura de la atmósfera en la primera de sus capas (la tropósfera) disminuye uniformemente con respecto a la altitud; lo hace a razón de -6.5 °C/kilómetro. Cierto montañista llega a la cumbre de una montaña de altura desconocida y le reporta por radio a su compañero (que está en la base de la montaña) que la temperatura allá arriba es -1 °C. Por su parte, su compañero, en la parte más baja de la montaña, observa que el termómetro marca 20 °C.

¿Sabías que?...

El punto de ebullición de un líquido se refiere a la temperatura a la cual la presión de vapor del líquido es igual a la presión atmosférica. Como la presión atmosférica varía en diferentes lugares, el punto de ebullición varía también. Se habla del punto de ebullición normal al que se calcula con una presión de una atmósfera.

a) Construye una expresión matemática que permita predecir la temperatura T para diferentes valores de la altitud h.

Considerando que la altitud 0 coincide con la base de la montaña, el valor inicial de la temperatura es 20 °C. Además, esta temperatura se verá disminuida en 6.5 °C por cada kilómetro; esto se puede expresar matemáticamente como

$$T = 20 - 6.5h$$

donde h representa el aumento en los kilómetros de altitud a partir de la base de la montaña.

b) ¿Cuál es la altura de la montaña?

La expresión construida en el inciso anterior nos sugiere sustituir el valor de la temperatura T por -1 y encontrar el valor de la altitud h correspondiente:

$$-1 = 20 - 6.5h$$
$$6.5h = 20 + 1 = 21$$
$$h = \frac{21}{6.5} \approx 3.23$$

La altura de la montaña es prácticamente 3.23 kilómetros.

Analizando la situación Problema 1.1

En los tres contextos reales se observan diferentes magnitudes que están cambiando: en el primero, la posición del automóvil cambia respecto al tiempo transcurrido; en el segundo, la temperatura del agua cambia, nuevamente, con respecto al tiempo transcurrido y en el tercer contexto, la temperatura cambia con respecto a la altitud. Esas magnitudes se han representado mediante variables x, t, T y h y se ha establecido una relación entre ellas expresada como

$$x = 25 + 52t, \qquad T = 38 + 6t, \qquad T = 20 - 6h.$$

¿Sabías que?...

Los fenómenos meteorológicos que nos afectan como viento, lluvia y huracanes ocurren en la capa de la atmósfera más baja: la tropósfera. El espesor de esta capa que está en contacto con la superficie de la Tierra varía en diferentes zonas del globo terrestre; en el ecuador mide alrededor de 17 kilómetros. Sin embargo, en latitudes templadas su grosor es menor, alrededor de 10 kilómetros, y en los polos decrece a 8 kilómetros. La tropósfera actúa como un regulador térmico de nuestro planeta.

¡Toma nota!

La palabra **razón** en el lenguaje cotidiano tiene un significado diferente al que se utiliza en Matemáticas:

razón = cociente = división

La palabra **cambio** en el lenguaje cotidiano se usa en diversas condiciones, pero en Matemáticas:

cambio = resta = diferencia

¡Toma nota!

Para calcular el **cambio** que experimenta una magnitud, debes tomar en cuenta el **orden** como ocurren los valores.

Para referirnos al **cambio** del valor 5 al valor 3 calculamos:

$3 - 5 = -2$

Para referirnos al **cambio** del valor 3 al valor 5 calculamos:

$5 - 3 = 2$

El valor inicial de la magnitud bajo estudio aparece en las expresiones, así como el dato de la razón de cambio de la magnitud que se estudia con respecto a la magnitud de la que se va a cambiar. Este último dato de la razón de cambio se refiere al cociente del cambio que experimenta la magnitud bajo estudio entre el cambio de la magnitud de la que depende. En cada contexto, tenemos

$$\text{velocidad (constante)} = \frac{\text{cambio de posición}}{\text{cambio de tiempo}}$$

$$\text{razón de cambio (constante)} = \frac{\text{cambio de temperatura}}{\text{cambio de tiempo}}$$

$$\text{razón de cambio (constante)} = \frac{\text{cambio de temperatura}}{\text{cambio de altura}}$$

Cada uno de los cambios expresados es una resta o diferencia entre dos valores de la magnitud en cuestión, por ejemplo, el cambio del tiempo es la resta

$$t_f - t_i$$

donde t_f representa el tiempo final y t_i el inicial. De manera natural este cambio se calcula al restar, de un "después", el "antes".

Es conveniente representar el cambio de posición, tiempo, temperatura y altitud utilizando la letra griega Δ "delta", de este modo, las diferentes razones de cambio se representan en forma compacta como

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta T}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta T}{\Delta h}$$

En la siguiente figura hacemos una generalización de cada contexto real, utilizando como parámetros los valores iniciales y las razones de cambio de las magnitudes. Observamos además en los tres contextos el empleo de la notación matemática de una **función**, la cual permite expresar con respecto a qué magnitud se está considerando la variación de la magnitud bajo estudio.

En el cuarto recuadro hemos querido introducir el contexto formal, donde se utilizan las letras x y y que representan las magnitudes variables, o simplemente, las variables x y y, en las cuales se ha quitado o extraído el significado original de las magnitudes consideradas.

Proponemos con ese cuarto recuadro la transferencia de la información de los diferentes contextos reales en un contexto matemático único, donde se modelan las características de los fenómenos analizados en cada contexto real.

¡Toma nota!

La palabra **formal** en el lenguaje cotidiano tiene un uso diferente a su uso en Matemáticas.

En Matemáticas la palabra **formal** se refiere a la ausencia de significados reales:

x es x y es y

...sólo letras que representan números...

Para **aplicar** la Matemática se necesita que

x y y

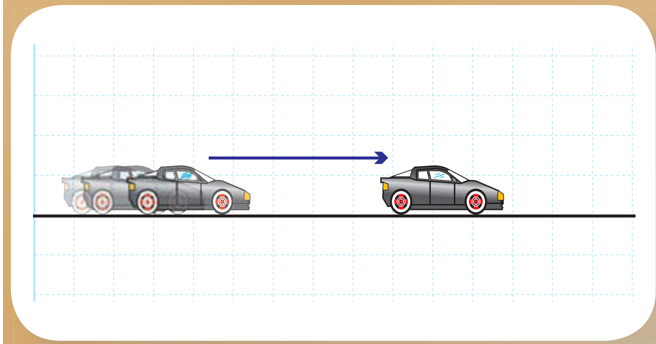
posean un significado real...

...x es la posición de un objeto,

...x es un instante de tiempo,

...y es un dato de temperatura...

Contexto real 1



$$x = 25 + 52t$$

$$x(t) = 25 + 52t$$

En general:

$$x(t) = x_0 + vt$$

donde $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

Contexto real 2

$$T = 38 + 6t$$

$$T(t) = 38 + 6t$$

En general:

$$T(t) = T_0 + rt$$

donde $r = \dfrac{\Delta T}{\Delta t}$

Contexto real 3

$$T = 20 - 6.5h$$

$$T(h) = 20 - 6.5h$$

En general:

$$T(h) = T_0 + rh$$

donde $r = \dfrac{\Delta T}{\Delta h}$

Contexto formal

(ausencia de significado en un contexto real)

$r = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ es la razón de cambio de y con respecto a x

Función Lineal

$$y(x) = y_0 + rx$$

y_0 representa el valor de y cuando $x = 0$

En el último recuadro la variable y representa la posición y la temperatura de los contextos reales; mientras que la variable x representa el tiempo y la altitud en dichos contextos.

En matemáticas a la expresión $y(x) = y_0 + rx$ se le conoce como **función lineal**. Se dice que la variable y es función lineal de la variable x, lo que queda resaltado con el uso de la notación de función,

$y(x)$,que se lee "y depende de x".

En el lenguaje matemático formal, la palabra lineal se refiere al exponente 1 que tiene la variable x, pero que no se acostumbra escribir.

¿Qué tienen en común los contextos reales analizados?

Situaciones que satisfacen un Cambio uniforme. Los tres contextos reales han quedado modelados matemáticamente con una función lineal

$$y(x) = y_0 + rx$$

donde el parámetro y_0 representa el valor inicial de la variable y y el parámetro r representa la razón de cambio constante de y con respecto a x.

La expresión de la razón de cambio constante

$$r = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

puede ser expresada despejando Δy, como

$$\Delta y = r\Delta x$$

y esta última expresión establece la proporcionalidad entre los cambios de las variables x y y. Se dice que y cambia **uniformemente** con respecto a x para manifestar este tipo de dependencia entre las dos magnitudes.

Para responder en cada contexto a las preguntas de predicción planteadas y a todas las que podamos plantear, debemos construir la función lineal que modela la situación, y para ello debemos interpretar del contexto real cuál magnitud está cambiando (la magnitud de nuestro interés) y con respecto a cuál (la magnitud de referencia), además de precisar la razón de cambio de la magnitud bajo estudio entre la magnitud de la que depende.

Siendo esta razón de cambio constante se tiene que el cambio de la magnitud de interés es proporcional al de la magnitud de referencia, lo que se representa matemáticamente con la expresión $\Delta y = r\Delta x$.

Procedimientos algebraicos y gráficos. Las preguntas de predicción provocan el planteamiento de ecuaciones lineales para contestar. De manera formal dado un valor de x, se sustituye éste en la función y se obtiene el valor correspondiente de y. A su vez, dado un valor y, se sustituye ese valor en el lugar de $y(x)$ generando una ecuación lineal de la cual se despeja x.

Ejemplificamos lo anterior retomando el tercer contexto real modelado ahora formalmente por

$$y(x) = 20 - 6.5x$$

Contestar cuál es la altura de la montaña equivalente a **sustituir** $y(x)$ por -1, que es el dato de la temperatura en la cúspide,

$$-1 = 20 - 6.5x$$

de donde al despejar se obtiene (como lo hicimos antes) que $x \approx 3.23$.

Por otra parte, podemos preguntarnos qué temperatura se tiene a los 2500 metros, lo que equivale a **evaluar** la función a los 2.5 kilómetros, esto es,

$$y(2.5) = 20 - 6.5(2.5) = 3.75\ °C$$

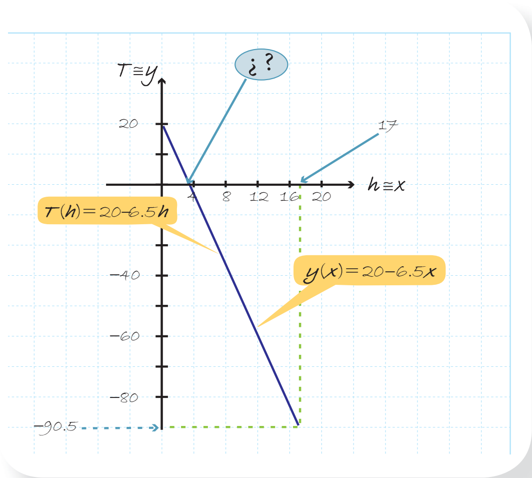
¿Cómo visualizar de manera global el comportamiento de la temperatura?

Sabiendo que la tropósfera tiene un espesor de 17 kilómetros, podemos representar gráficamente el comportamiento de la temperatura con respecto a la altitud mediante la recta que inicia en el eje vertical a los 20 °C y que termina en el punto donde la altitud en el eje horizontal marca los 17 kilómetros.

Evaluamos la función de la temperatura y obtenemos

$$y\,(17) = 20 - 6.5\,(17) = -90.5 \text{ °C}$$

Por tanto, la gráfica que modela el comportamiento de la temperatura con respecto a la altitud consiste de un segmento de recta que inicia en el punto $(0, 20)$ y termina en el punto $(17, -90.5)$.



En la gráfica hemos dejado un signo de interrogación que señala un punto importante de la imagen visual que estamos construyendo; se trata del corte (o intersección) con el eje horizontal.

Al retomar el contexto real de la temperatura en función de la altitud, observamos que encontrar ese corte significa conocer la altitud a la cual la temperatura es 0 °C.

Como la temperatura se modela con la función lineal

$$y\,(x) = 20 - 6.5x,$$

igualamos a 0 esta función de modo que

$$0 = 20 - 6.5x$$
$$6.5x = 20$$
$$x = \frac{20}{6.5} = \frac{40}{13} \approx 3.077$$

¡TOMA NOTA!

Una **imagen visual** está cargada de información ...pero no basta **ver** para captarla...

Con la palabra **visualizar** queremos dar lugar al desarrollo de una **competencia matemática**.

Visualizar es... interpretar y procesar cognitivamente información a partir de una imagen visual, para producir un nuevo conocimiento.

Prácticamente, a los 3 kilómetros se llega a una temperatura de 0 °C. El signo de interrogación señala el valor de x (o bien h) en la gráfica y con esto determinado podemos visualizar de manera global el comportamiento de la temperatura que describimos en seguida.

"Al nivel del suelo la temperatura es 20 °C y desciende uniformemente con respecto al aumento de la altitud. Al llegar esta última a los 3.044 kilómetros la temperatura llega a los 0 °C y continúa descendiendo a medida que la altitud aumenta, de tal forma que en los límites de la tropósfera, a los 17 kilómetros de altitud, la temperatura llega a los -90.5 °C de acuerdo al modelo matemático utilizado".

La función lineal

$$y(x) = y_0 + rx$$

modela el comportamiento de una magnitud (representada por la variable y) que varía uniformemente con respecto a otra magnitud (representada por la variable x).

El parámetro y_0 representa el valor inicial de la magnitud, $y_0 = y(0)$; es el valor de y justo cuando $x = 0$.

El parámetro r representa la razón de cambio constante de y con respecto a x, que se denota por:

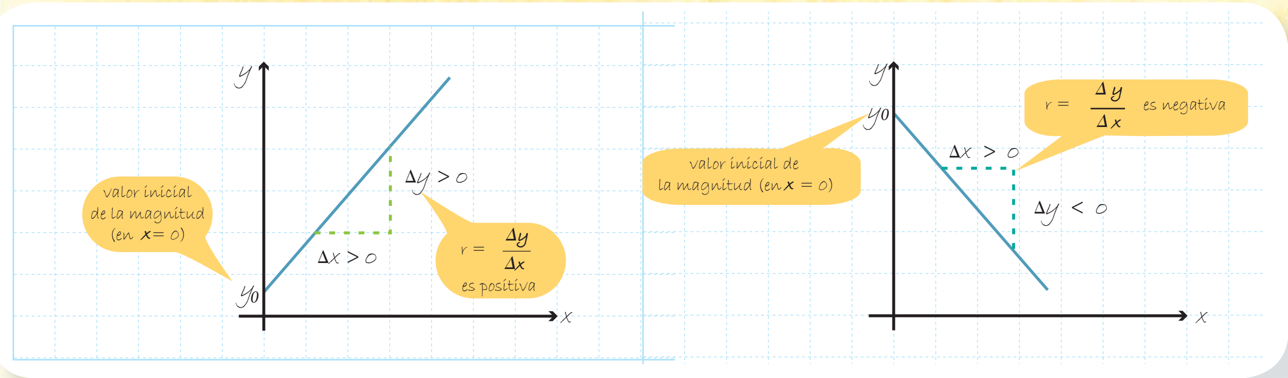
$$r = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

cambio = resta

cambio = resta

razón = cociente

La representación gráfica de esta función es una recta (o parte de ella) que cruza el eje vertical en y_0 y cuya pendiente es precisamente el valor r de la razón de cambio de y respecto a x.



Observamos que en ambos casos, siendo $r > 0$ o $r < 0$, si prolongamos el segmento dibujado, inevitablemente la recta llega a cortar el eje horizontal xw. ¿Cómo encontrar el valor de x correspondiente al corte (o intersección) de la recta con el eje horizontal?

Identificamos un nuevo proceso algebraico para dar respuesta: Primero, igualar a 0 la función $y(x)$, lo que significa forzar a que el punto de la recta esté sobre el eje x, y segundo, despejar el valor de x de la ecuación lineal que se ha generado.

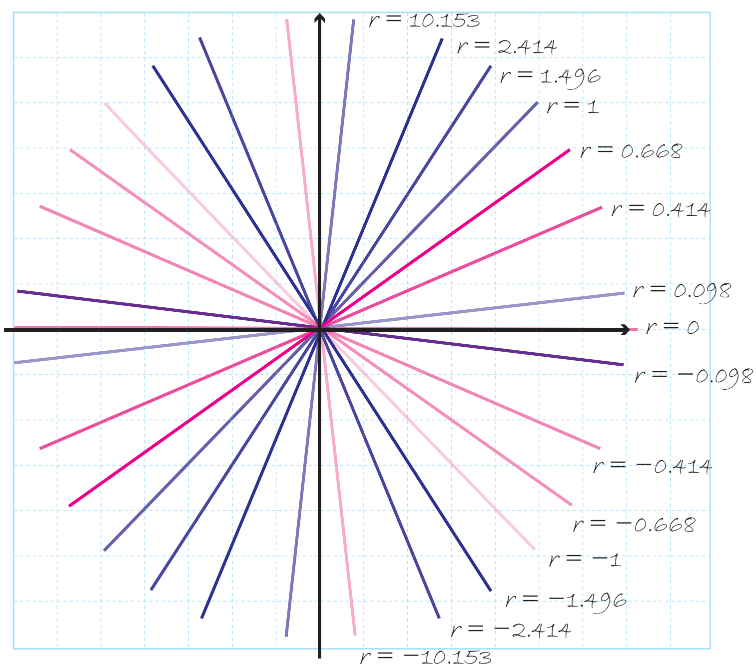
La expresión $\Delta y = r\Delta x$ establece que cambios en la variable y son directamente proporcionales a los cambios en la variable x.

Cuando se tiene el caso de que el valor inicial y_0 es cero, se tiene que la función lineal queda expresada por

$$y(x) = rx$$

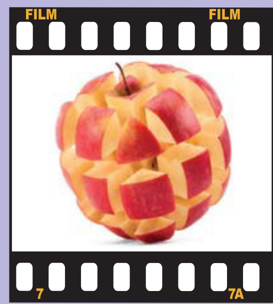
Esto se representa gráficamente por una recta que pasa por el origen $(0, 0)$ del sistema coordenado, lo que asegura demás la proporcionalidad directa entre los valores de las magnitudes y y x y no sólo la proporcionalidad de sus cambio Δy y Δx.

En la siguiente imagen visual se tienen diferentes casos donde los diferentes valores de la razón de cambio r expresan diferentes comportamientos en las magnitudes representadas. Los signos positivos en r corresponden con crecimiento de y cuando x crece, mientras que signos negativos en r corresponden con decrecimiento en y cuando x crece.



¿Sabías que?...

Decimos que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra se afecta de la misma forma, se multiplica (o divide) por el mismo número. Matemáticamente decimos que y y x son directamente proporcionales si $y = kx$ donde k es la constante de proporcionalidad.



¡Toma nota!

Cada punto de un plano coordenado tiene asignados dos valores numéricos:

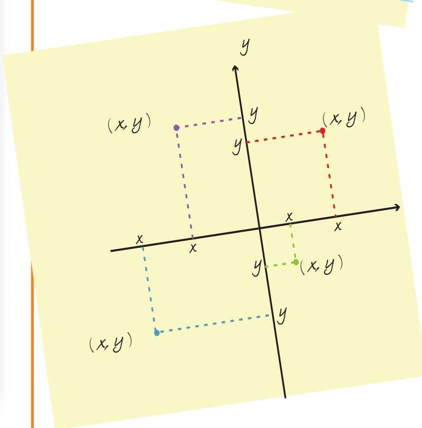
x (su abscisa)

y (su ordenada)

y sus coordenadas:

(x, y)

nos permiten ubicarlo.



PROBLEMA 1

Cuando un paracaidista se lanza desde una gran altura y abre su paracaídas, llega un instante en que su movimiento es prácticamente uniforme. Consideremos que un paracaidista se encuentra a 2500 metros de altura y está descendiendo uniformemente a una rapidez de 5 metros/segundo.

a) Construye la función que permita predecir la altura h (en metros) del paracaidista.

Consideramos el valor inicial de la altura del paracaidista, $h_0 = 2500$ metros, y la velocidad constante que lleva de -5 metros/segundo, donde el signo negativo provoca la disminución de la altura. Construimos la función lineal que permite predecir el valor de la altura h del paracaidista en cualquier instante t mientras se encuentre en descenso:

$$h(t) = 2500 - 5t$$

b) Calcula el tiempo que tarda el paracaidista en llegar al suelo.

Para que llegue al suelo, el valor de h debe ser 0, igualamos a 0 la función y despejamos de la ecuación construida el valor de t:

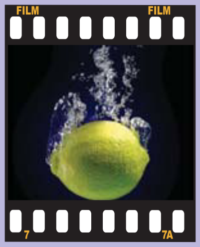
$$h(t) = 2500 - 5t = 0$$

$$2500 = 5t$$

$$t = \frac{2\,500}{5} = 500$$

Por tanto, pasados 500 segundos, que equivale a (8 minutos con 20 segundos) el paracaidista llega al suelo.

¿Sabías que?...



Cuando un objeto cae desde suficiente altura bajo la acción de la gravedad, se produce una fuerza de rozamiento del aire que es proporcional a la velocidad del cuerpo. Con esto se llega a un valor límite (o valor terminal) de la velocidad y a partir de ese momento, puede considerarse que el objeto cae prácticamente con esa velocidad constante.

PROBLEMA 2

La presión P que experimenta bajo el agua un buzo depende de la profundidad x a la que se encuentra éste. La razón con lo que está cambiando la presión (con respecto a la profundidad) es constante e igual a 0.0994 atmósferas/metro.

a) Construye la función que permita predecir la presión atmosférica a la que está expuesto un buzo considerando que la presión en la superficie es de 1 atmósfera.

Por las condiciones de la situación, se sabe que la presión varía de manera uniforme con respecto a la profundidad, por tanto se representa con una función lineal. El valor inicial de la presión es el que se tiene en la superficie, $P_0 = 1$ atmósfera. La razón de cambio de la presión respecto a la profundidad está dada por $r = \frac{\Delta P}{\Delta x} = 0.0994$

atmósferas/metro. Por tanto, la función que permite predecir el valor de la presión es:

$$P(x) = P_0 + rx = 1 + 0.0994x$$

b) ¿Cuál será la presión a la que se encuentra el buzo a los 50 metros de profundidad, si la presión en la superficie es de 1 atmósfera?

Para predecir el valor de la presión a la que está sujeto el buzo a los 50 metros de profundidad, basta con sustituir este valor en la función:

$$P(50) = 1 + 0.0994\,(50) = 5.97 \text{ atmósferas.}$$

c) Una presión de 11 atmósferas ejerce un efecto dañino en el buzo. ¿Qué profundidad debe el buzo tener muy presente para evitarse el daño?

Predecir la profundidad a la que se experimenta una presión de 11 atmósferas equivale a igualar $P(x)$ a 11 y despejar el valor de x.

$$11 = 1 + 0.0994x$$

$$10 = 0.0994x$$

$$x = \frac{10}{0.0994} \approx 100.604$$

El buzo debe evitar llegar a una profundidad de 100 metros.

¿Sabías que?...

El barómetro es un instrumento que mide el peso que ejerce la atmósfera sobre los cuerpos por unidad de superficie. Los primeros instrumentos consistieron de un tubo largo cerrado por un lado que se llena de mercurio, voltea y coloca en un recipiente también con mercurio. Al nivel del mar en un día despejado, la columna de mercurio sostenida por la presión atmosférica se eleva aproximadamente 76 centímetros, y esto es lo que se conoce como presión atmosférica:

760 mm de mercurio = 1 atmósfera.

Problema 3

Cuando un automóvil está en movimiento, la cantidad de gasolina en su tanque disminuye uniformemente con respecto a la distancia que recorre. En un Tsuru 2011 la razón con la que disminuye la gasolina es de 0.05 litros por kilómetro. Supongamos que vamos en ese automóvil por la carretera nacional y sabemos que hay 40 litros de gasolina en el tanque del carro.

a) Construye la función que predice la cantidad de gasolina en el tanque en términos de los kilómetros recorridos.

Consideramos el dato inicial de 40 litros de gasolina correspondiente a los 0 kilómetros recorridos.

Si g representa litros de gasolina en el tanque y x representa kilómetros recorridos, entonces siendo $x = 0$ se tiene $g(0) = g_0 = 40$.

Además, la razón de cambio de la cantidad de gasolina con respecto al kilómetro recorrido es

$$r = \frac{\Delta g}{\Delta x} = -0.05 \frac{\text{litros}}{\text{kilómetro}}$$

Por tanto, la función

$$g(x) = 40 - 0.05x$$

modela el comportamiento de la cantidad de gasolina con respecto a los kilómetros recorridos a partir de tener 40 *litros en el tanque.*

b) ¿Cuántos litros quedarán en el tanque una vez que el carro ha recorrido 130 kilómetros?

Los litros necesarios para recorrer 130 *kilómetros se obtienen evaluando la función en* $x = 130$

$$g(130) = 40 - 0.05(130) = 40 - 6.5 = 33.5$$

Por tanto, en el tanque quedan 33.5 *litros una vez recorridos* 130 *kilómetros.*

c) ¿Cuántos kilómetros se habrán recorrido cuando en el tanque quedan 18 litros de gasolina?

El que queden 18 *litros en el tanque se representa igualando* $g(x)$ *a* 18, *construimos la ecuación lineal sustituyendo ese valor en su lugar:*

$$18 = 40 - 0.05x$$

y despejamos x:

$$0.05x = 40 - 18 = 22$$

$$x = \frac{22}{0.05} = 440$$

por tanto, se habrán recorrido 440 *kilómetros una vez que quedan* 18 *litros en el tanque.*

d) ¿Alcanzará o no alcanzará la cantidad actual de gasolina para viajar desde Monterrey a México, que se encuentra aproximadamente a 930 kilómetros de distancia?

Para determinar si alcanza la cantidad de gasolina para recorrer 930 *kilómetros podemos evaluar*

$$g(930) = 40 - .05(930) = 40 - 46.5 = -6.5 \text{ litros.}$$

El resultado negativo en la cantidad de litros se debe interpretar en una respuesta negativa: no alcanzan los 40 *litros que tiene inicialmente el tanque para recorrer la distancia de* 930 *kilómetros, para llegar a México se deberá volver a cargar gasolina.*

Problema 4

Una llave está llenando de agua un tanque que tiene la forma de un cilindro de un metro y medio de altura y radio en su base de 45 centímetros. La siguiente tabla muestra los valores del nivel del agua en el tanque en determinados tiempos:

Tiempo t (minutos)	Nivel h (centímetros)
0	20
2	29
4	38
6	47
8	56

Los datos en la tabla nos permiten suponer que a partir de que lo observamos (en $t = 0$) el nivel del agua en el tanque está cambiando uniformemente en el tiempo.

a) ¿Cuál es el valor de la razón de cambio (constante) del nivel respecto al tiempo?

La razón de cambio constante puede obtenerse de cualesquier dos renglones de datos en la tabla, mientras se divida un cambio en el nivel ocurrido entre el respectivo cambio de tiempo. Por ejemplo, utilizando los primeros dos renglones obtenemos:

$$r = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{29-20}{2-0} = \frac{9}{2} = 4.5 \quad \textit{centímetros/minuto.}$$

Podemos comprobar que llegamos al mismo valor utilizando los renglones segundo y cuarto, por ejemplo:

$$r = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{47-29}{6-2} = \frac{18}{4} = 4.5$$

b) Construye la función lineal que permite predecir el nivel del agua en cualquier tiempo admisible, mientras el tanque se está llenando.

Con el dato inicial del nivel, $h_0 = 20$ *tomado de la tabla y la razón de cambio calculada en el inciso anterior tenemos que:*

$$h(t) = h_0 + r\,t = 20 + 4.5t$$

c) ¿Cuál será el nivel del agua en el tanque a los 21.5 minutos?

Evaluamos la función que hemos construido en el valor del tiempo $t = 21.5$ *minutos:*

$$h(21.5) = 20 + 4.5(21.5) = 116.75 \ \textit{centímetros}$$

El nivel de agua en el tanque a los 21.5 *minutos es* 116.75 *centímetros.*

d) ¿Cuánto tiempo se tardará en llenar el tanque?

Para que el tanque se llene, el nivel debe llegar a ser de 150 *centímetros. Igualamos el nivel a este valor y con ello construimos una ecuación lineal por resolver:*

$$h(t) = 20 + 4.5t = 150$$

$$4.5t = 150 - 20 = 130$$

$$t = \frac{130}{4.5} = \frac{260}{9} \approx 28.889 \quad \textit{minutos.}$$

Aproximado a números enteros, pasados prácticamente 29 *minutos, el tanque se llena.*

e) ¿Cuál es el cambio que se produce en el nivel entre los 3 y 3.5 minutos?

De los 3 a los 3.5 minutos ha habido un cambio de

$$\Delta t = 3.5 - 3 = 0.5 \text{ minutos}$$

Como la razón de cambio constante es

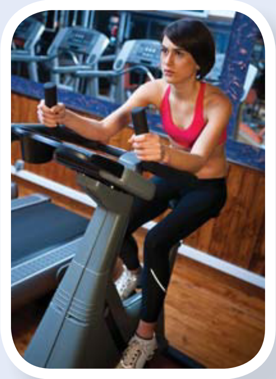
$$r = \frac{\Delta h}{\Delta t} = 3.5 \quad \text{entonces} \quad \Delta h = 3.5\,\Delta t$$

Por tanto $\Delta h = (3.5)(0.5) = 1.75$ *centímetros es el aumento del nivel.*

Mismo que ocurre cada medio minuto: Δh *es directamente proporcional a* Δt*.*

Cada medio minuto va aumentando 1.75 *centímetros el nivel.*

Problema 5



Haciendo ejercicio en una bicicleta elíptica, manteniéndose a un ritmo de 30 revoluciones por minuto, por cada segundo que pasa el tablero muestra que se acumulan 0.2 calorías. Supongamos que se realiza una rutina de calentamiento en la que se han acumulado 40 calorías.

a) Construye la función que calcula las calorías acumuladas en términos del tiempo (medido en minutos) una vez que ya se ha realizado la rutina de calentamiento y se mantiene el ritmo.

Consideramos el valor inicial de las calorías acumuladas como $c_0 = 40$ *calorías. Por otra parte, la razón de cambio de la cantidad de calorías acumuladas con respecto al tiempo transcurrido se calcula tomando en cuenta el dato de* 0.2 *calorías por segundo, el cual debemos traducir de segundos a minutos:*

$$r = \frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{0.2}{\frac{1}{60}} = 12\ \frac{\text{calorías}}{\text{minuto}}$$

Con este dato construimos la función que calcula la cantidad de calorías acumuladas a los t *minutos (luego del calentamiento) como*

$$c(t) = c_0 + rt$$

$$c(t) = 40 + 12t$$

b) ¿Cuántas calorías muestra el tablero un cuarto de hora después del calentamiento?

Evaluamos la función en $t = 15$ *minutos*

$$c(15) = 40 + 12(15) = 240 \text{ calorías}$$

c) Para satisfacer los requerimientos de una dieta balanceada en carbohidratos, proteínas y grasas se recomienda acumular en la bicicleta elíptica diariamente 375 calorías. ¿Cuántos minutos (aparte de los del calentamiento) se debe usar la elíptica diariamente al ritmo de 30 revoluciones por minuto?

Acumular 375 calorías se representa igualando la función que hemos construido a este valor y generando una ecuación lineal por resolver:

$$375 = 40 + 12t$$

$$12t = 375 - 40 = 335$$

$$t = \frac{335}{12} \approx 27.917$$

Prácticamente, se requieren 28 minutos adicionales al calentamiento.

d) ¿Cuál es el cambio que se produce en la cantidad de calorías por cada 5 minutos?

Como la razón de cambio es constante

$$r = \frac{\Delta c}{\Delta t} = 12\,\frac{\text{calorías}}{\text{minuto}} \quad \text{entonces} \quad \Delta c = 12\Delta t$$

El cambio en la cantidad de calorías es proporcional al tiempo transcurrido.

Luego, pasados 5 minutos se tiene

$$\Delta t = 5 \quad \text{y así} \quad \Delta c = 12(5) = 60.$$

Cada 5 minutos el tablero muestra que se acumulan 60 calorías.

Problema 6

La Ley de Charles establece que a presión constante, el volumen de un gas cambia uniformemente respecto a la temperatura. La siguiente tabla muestra valores del volumen de un gas contenido en un recipiente a determinadas temperaturas:

Temperatura en grados centígrados	Volumen en mililitros
0	107.9
5	109.875
10	111.85
15	113.825
20	115.8

a) ¿Cuál es la razón constante con la cual cambia el volumen del gas respecto a la temperatura?

La razón con la cual cambia el volumen respecto de la temperatura se puede calcular mediante el cociente $\frac{\Delta V}{\Delta T}$ *donde* ΔV *es el cambio que experimenta el volumen en un intervalo de temperatura en la que ésta cambia* ΔT*. Si consideramos, por ejemplo, el intervalo en el que la temperatura cambia de* 0 *a* 5 *grados centígrados, tenemos que*

$$r = \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{109.875 - 107.9}{5 - 0} = \frac{1.975}{5} = 0.395$$

Por tanto, la razón de cambio constante con la cual cambia el volumen respecto a la temperatura es de 0.395 *mililitros/grado centígrado.*

b) Construye la función que modela el comportamiento del volumen V del gas (medido en mililitros) en términos de la temperatura T (medida en grados centígrados).

Denotemos por $V(T)$ *al volumen del gas en mililitros cuando la temperatura en grados centígrados es* T*. Sabemos que* $V(0) = V_0 = 107.9$*, como se establece en la tabla, y además*

$$r = \frac{\Delta V}{\Delta T} = 0.395$$

Por tanto, $V(T) = V_0 + \Delta V = 107.9 + 0.395T$

La función lineal $V(T) = 107.9 + 0.395T$

expresa al volumen V *del gas (medido en mililitros) en términos de la temperatura* T *(medida en grados centígrados).*

c) ¿Cuál será el volumen del gas cuando la temperatura sea de 40 °C?

Si $T = 40$*, entonces evaluamos la función:*

$$V(40) = 107.9 + 0.395(40) = 123.7$$

Por tanto, cuando la temperatura sea 40 °C *el volumen será de* 123.7 *mililitros.*

d) Si extrapolamos la función lineal para valores de la temperatura fuera del intervalo donde esta magnitud es conocida, podrías contestar a qué temperatura el volumen del gas es igual a cero.

Si T *es la temperatura a la cual el volumen es igual a cero, entonces*

$$V(T) = 107.9 + 0.395T = 0$$

Resolviendo esta ecuación tenemos

$$107.9 + 0.395T = 0$$

$$0.395T = -107.9$$

$$T = \frac{-107.9}{0.395} \approx -273.165$$

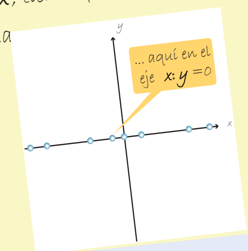
Por tanto, según el modelo planteado, -273.165 °C *sería la temperatura a la cual el volumen es igual a cero.*

¿Sabías que?...

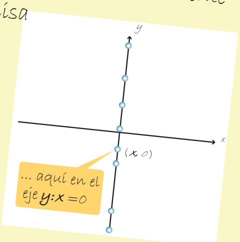
A fines del siglo XVIII los experimentos que el físico francés Jacques Charles llevó a cabo le hicieron concluir que, dada cierta cantidad de gas mantenida a presión constante, existe una relación entre las magnitudes volumen y temperatura: el volumen del gas es directamente proporcional a la temperatura. Por cada grado centígrado que disminuye la temperatura, el volumen del gas disminuye 1/273 de su volumen a los 0 grados. En 1860, Lord Kelvin concluye que la temperatura más baja posible es 2273 °C y este valor se constituye en el cero absoluto de las temperaturas; conocido como el 0 en la escala Kelvin. De este modo, la temperatura de un objeto en grados Kelvin coincide con su temperatura en grados centígrados más 273.

¡Toma nota!

En un sistema coordenado *x-y* los puntos situados sobre el eje horizontal *x*, tienen forzosamente su ordenada $y = 0$.

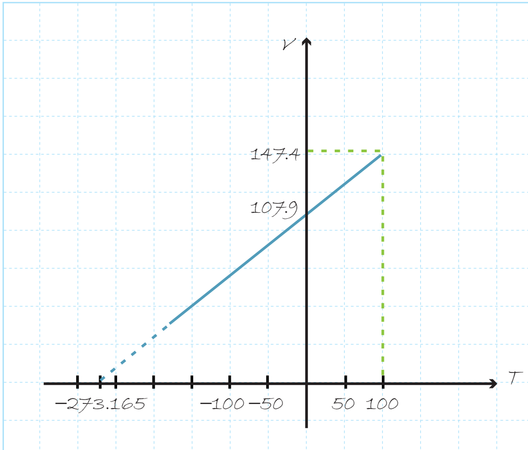


En un sistema coordenado *x-y* los puntos situados sobre el eje vertical *y*, tienen forzosamente su abscisa $x = 0$



e) Grafica la función lineal $V(T)$ desde la temperatura en la que V se supone 0 hasta que se llega a la temperatura de 100 °C.

En la siguiente figura se muestra la gráfica del volumen contra la temperatura correspondiente al intervalo desde -273.165 *hasta los* 100 °C. *Señalamos además el dato inicial del volumen en su eje vertical.*



f) ¿Cuánto cambia el volumen del gas cuando la temperatura incrementa de 40 °C a 45 °C?

Sabemos que ΔV *es el cambio que experimenta el volumen en un intervalo de temperatura en la que ésta cambia* ΔT, *además, conocemos la razón de cambio, la cual es constante:*

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = 0.395$$

Podemos despejar en la expresión anterior:

$$\Delta V = 0.395\,\Delta T$$

y en ello observamos la proporcionalidad de estos cambios.

Ahora bien, cuando la temperatura incrementa de 40 a 45 °C *se tiene que* $\Delta T = 45 - 40 = 5$, *luego*

$$\Delta V = 0.395\,\Delta T = 0.395\,(5) = 1.975$$

Por tanto, el volumen incrementa 1.975 *mililitros cuando la temperatura aumenta de* 40 *a* 45 *grados centígrados. De hecho, podemos afirmar que cada* ΔT *de* 5 °C *provoca un aumento en el volumen de* $\Delta V = 1.975$ *mililitros, tal y como se observa en los datos de la tabla en el enunciado de este problema.*

PROBLEMA 1

Una taza de café se calienta en un horno de microondas alcanzando una temperatura de 65 ºC. Se extrae y se expone al medio ambiente que se encuentra a una temperatura de 21 ºC. Para fines prácticos se puede suponer que en los primeros 8 minutos la temperatura de la taza de café disminuye uniformemente a razón de 3.5 grados centígrados por minuto.

a) Construye la función que permite predecir la temperatura T para diferentes valores del tiempo t medido en minutos.

b) ¿Cuántos minutos se deberá esperar a partir de su extracción del horno para beber el café a una temperatura de 40 grados centígrados?

c) Si consideramos este modelo lineal funcionando por más tiempo ¿Qué temperatura alcanza el café a los 15 minutos? ¿Es esto posible?

Respuestas:

a) $T(t) = 65 - 3.5t$ *b*) $t \approx 7.143$ *c*) $T = 12.5$, no.

PROBLEMA 2

Los aviones comerciales deben estar provistos de sistemas de presurización en la cabina de pasajeros ya que la presión atmosférica disminuye a razón de 1 milibar por cada 9 metros de altura. A nivel del mar la presión atmosférica es de 1013 milibares.

a) Construye la función que representa la presión atmosférica en términos de la altura, tomando como referencia el nivel del mar.

b) Encuentra la presión atmosférica en el exterior de un avión que está volando a 8 kilómetros de altura.

c) Predice el valor de la altura que debe alcanzar un avión para que la presión atmosférica a esa altura sea de 927.5 milibares.

Respuestas:

a) $p(h) = 1013 - \frac{1}{9}h$ *b*) $p \approx 124.111$ *c*) $h = 769.5$

Problema 3

La temperatura T en cualquier lugar de nuestro planeta disminuye a razón constante con respecto a la altura h sobre el nivel del mar. En la siguiente tabla se muestran las temperaturas (en grados centígrados) a diferentes alturas (en kilómetros) en cierto lugar del planeta.

h	T
0	15
1	8.7
2	2.4
3	−3.9
4	−10.2

a) ¿A qué razón está cambiando la temperatura T con respecto a la altura h?

b) Construye la función que calcula la temperatura T en términos de la altura h.

c) ¿A qué altura podemos esperar que la temperatura sea 0 ºC?

Respuestas:

a) $r = -6.3$ *b*) $T(h) = 15 - 6.3h$ *c*) $h \approx 2.381$

Problema 4

Al saltar de un bungee, el alargamiento de la cuerda elástica cambia uniformemente en función del peso de la persona que está saltando. Consideremos que el largo de la cuerda sin deformar es 15 metros y que alcanza un largo de 24 metros cuando lo utiliza una persona de peso 45 kilogramos.

a) Calcula la razón de cambio del largo de la cuerda con respecto al peso de la persona

b) Construye la función que prediga el largo de la cuerda l, en términos del peso, p, de la persona:

c) Si la superficie de concreto se encuentra a 45 metros abajo del punto donde está atada la cuerda del bungee, cuál es el máximo peso para que una persona de 1.7 metros de altura se pueda lanzar sin que se golpee con el suelo. Se asume que la cuerda del bungee está atada a los tobillos de la persona.

Respuestas:

a) $r = 0.2$ *b*) $l(p) = 15 + 0.2p$ *c*) $p = 141.5$

PROBLEMA 5

Consideremos una gota de lluvia que se encuentra a 3 kilómetros de altura y desciende con una velocidad terminal de 7 metros/segundo. Determina:

a) Construye la función de la altura h (en metros) de la gota en términos del tiempo t (en segundos).

b) Calcula el tiempo que tarda la gota en llegar al suelo.

Respuestas:

a) $h(t) = 3000 - 7t$

b) $t \approx 428.571$

¡TOMA NOTA!

De acuerdo con la presentación **formal** de la Matemática, tradicionalmente se utilizan las letras x y y para las variables: x es la variable independiente y y es la variable que depende de x.

La dependencia **funcional** entre las variables x y y se representa por:

$$y = f(x)$$

que se lee:

"y es función de x".

La función

$$y = f(x)$$

establece que:

"a cada valor de x se le asocia un único valor de y".

Los valores numéricos que acepta la variable x se refieren como el **dominio** de $f(x)$ y los que toma la variable y como el **rango** o **imagen** de la función $f(x)$

¡TOMA NOTA!

Si damos el significado:

x es tiempo, y es posición de un objeto que se mueve en una línea recta…tiene sentido que

$$y = f(x)$$

a cada valor del tiempo x le asocie un **único** valor de la posición y…

…porque el objeto **no** puede estar en **dos** posiciones distintas al mismo tiempo…

Cuando damos significado a las variables…

y es la variable que se asocia con la magnitud bajo estudio, y …

x es la variable que se asocia con la magnitud con respecto a la cual está cambiando la magnitud bajo estudio, y.

En contextos reales el **dominio** comúnmente incluye sólo números positivos, pero hay casos (problema 6) en que los números negativos son igual de útiles.

1) Evalúa la función lineal $y(x) = 2.5x - 1.3$ en $x = -1.1$.

Respuesta: $y(-1.1) = -4.05$

2) Iguala a 1.1 la función lineal $y(x) = 2.5x + 1.3$ y obtén el valor correspondiente de x.

Respuesta: $x = -0.08$

3) Despeja x de $y = -\frac{5}{2}x + 3$.

Respuesta: $x = -\frac{2}{5}y + \frac{6}{5}$

4) Despeja y de $\frac{3}{2}x - 5y = \frac{1}{3}$.

Respuesta: $y = \frac{3}{10}x - \frac{1}{15}$

5) Sustituye $y = 1 - 2x$ en $2x - 3y + 5 = 0$ y encuentra el valor de x.

Respuesta: $x = -0.25$

6) Sustituye $x = 2y - 5$ en $y = -2x + 1.5$ y encuentra el valor de y.

Respuesta: $y = 2.3$

¡TOMA NOTA!

Estos son ejercicios,
no son problemas...
aquí x y y
toman todos los valores
numéricos porque
sólo representan
números sin relación
con alguna magnitud.

¡TOMA NOTA!

Usar correctamente
el lenguaje algebraico
en Matemáticas
exige desarrollar una
habilidad...
y por tanto...
requiere práctica,
así que... ¡practica!

7) Iguala a 0 la y en $-\frac{5}{2}x+3y-6=0$ y encuentra x.

Respuesta: $x=-2.4$

8) Iguala a 0 la x en $-2.5x+\frac{y}{3}-6=0$ y encuentra el valor de y.

Respuesta: $y=18$

9) Sustituye x por -2 en $2.5x-3y+6=0$ y encuentra y.

Respuesta: $y=\frac{1}{3}$

10) En la función $y(x)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x$, si y vale -5 ¿cuánto vale x?

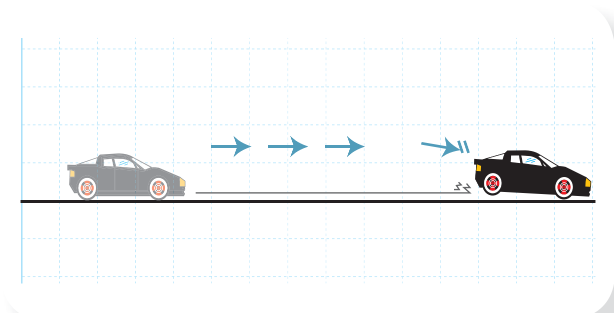
Respuesta: $x=17$

1.2 Cálculo del valor aproximado del cambio acumulado

En este tema proponemos retomar el contexto real del movimiento de un objeto en línea recta para apoyar el surgimiento de una estrategia que permite aproximar el cambio que experimenta la posición del objeto en determinado intervalo de tiempo transcurrido. Dado que no se trata del caso de un movimiento rectilíneo uniforme, la velocidad, además de la posición, será una magnitud que también estará cambiando en esta situación. La idea de considerar que la velocidad se mantenga constante en intervalos de tiempo pequeños resultará ser fructífera para atacar la problemática de predicción. Con ella, se identifica un proceso numérico que está apoyado en el conocimiento de la razón de cambio de la magnitud y que puede ser realizado con el uso de recursos tecnológicos actuales. La eficacia de este método numérico para calcular valores suficientemente cercanos a los valores de la magnitud en consideración, le consolida como un método efectivo aplicable en múltiples y variadas situaciones.

Situación Problema 1.2

Un carro transita por una carretera recta a una velocidad de 20 metros/segundo, cuando de pronto aplica los frenos.



A partir de ese instante $(t=0)$ la velocidad del automóvil disminuye y está modelada por la función

$$v(t)=\sqrt{400-25t^2} \text{ metros/segundo.}$$

a) Verifica que el carro se detiene a los 4 segundos.

Basta que evaluemos la función de velocidad en $t=4$

$$v(4)=\sqrt{400-25(16)}=0$$

para comprobar que en ese instante la velocidad llegó al valor 0 *y el automóvil se ha detenido por completo.*

b) Completa la siguiente tabla aproximando los valores a 3 decimales exactos.

t tiempo (segundos)	v velocidad (metros/segundo)
0	20
1	19.365
2	17.321
3	13.229
4	0

en cada renglón evaluamos
$v(2)=\sqrt{400-25(2)^2}$
≈ 17.320508

¡TOMA NOTA!

Verdadero o Falso?

posición final = posición inicial + distancia recorrida

...es ¿ V o F ?

Si camino del 2 al 5...

entonces...

¿ 5 = 2 + 3 ?...es V

pf pi dr

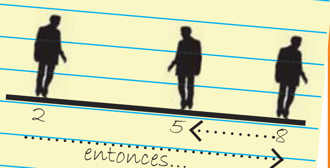
Si camino del 5 al 2...

entonces...

¿ 2 = 5 + 3 ?...es F

pf pi dr

Si camino del 2 al 8... y me regreso al 5



entonces...

¿ 5 = 2 + 9 !!!...es F

pf pi dr

Una afirmación es **verdadera** si es válida en todos y cada uno de los casos

c) Haciendo uso de la tabla anterior, calcula en forma aproximada la distancia recorrida por el carro desde que aplica los frenos hasta que se detiene por completo. Para ello considera que la velocidad se mantendrá constante en cada subintervalo de tiempo:

$$[0,1],\ [1,2],\ [2,3] \text{ y } [3,4]$$

Si la velocidad fuese constante, la distancia se calcula simplemente multiplicando ese valor constante por el tiempo transcurrido desde los 0 a los 4 segundos. Éste no es el caso, pues la función de velocidad nos está dando evidencia de que está cambiando, de hecho, sus valores están disminuyendo a medida que pasa el tiempo.

Sin embargo, si recurrimos a la idea de subdividir el intervalo de tiempo transcurrido en pequeños subintervalos, podemos hacer la suposición de que en ellos la velocidad se mantenga constante. Esta idea (intuitiva, mas no obvia) nos permite ahora aproximar la distancia recorrida por el automóvil. Aproximaremos su valor considerando que la velocidad se mantiene constante en los 4 intervalos de tiempo que se construyen a partir de los datos de la tabla:

$$[0,1],\ [1,2],\ [2,3] \text{ y } [3,4]$$

Calcularemos una aproximación de la distancia real recorrida en cada uno de esos intervalos tomando la velocidad constante con el valor que toma justo en el extremo izquierdo de cada subintervalo:

En el intervalo $[0,1]$ se tiene que $\Delta t = 1$, suponiendo que la velocidad se mantiene constante e igual a $v(0) = 20$ en ese subintervalo, tenemos que la distancia recorrida será

$$(20)(1) = 20 \text{ metros.}$$

Si $\Delta_1 d$ representa la distancia recorrida en el intervalo $[0,1]$, hemos obtenido una aproximación de este valor:

$$\Delta_1 d \approx v(0)\Delta t = 20(1) = 20 \text{ metros.}$$

En el intervalo $[1,2]$ se tiene que $\Delta t = 1$ nuevamente. Suponiendo la velocidad constante en ese intervalo también, pero ahora con el valor $v(1) = 19.365$, obtenemos una aproximación de la distancia recorrida en ese intervalo con

$$\Delta_2 d \approx v(1)\Delta t \approx (19.365)(1) = 19.365 \text{ metros.}$$

Procederemos de la misma manera en los dos intervalos restantes de modo que

$$\Delta_3 d \approx v(2)\Delta t \approx (17.321)(1) = 17.321 \text{ y}$$

$$\Delta_4 d \approx v(3)\Delta t \approx (13.229)(1) = 13.229$$

Sumamos los 4 valores y obtenemos que la distancia recorrida en los 4 subintervalos es aproximadamente igual a 69.914 metros

$$\sum_{i=1}^{4} \Delta_i d = \Delta_1 d + \Delta_2 d + \Delta_3 d + \Delta_4 d \approx 69.914$$

d) Con ayuda de la función velocidad, completa la siguiente tabla (aproxima con 3 decimales exactos):

t tiempo (segundos)	*v* velocidad (metros/segundo)
0	$v(0) = 20$
$.5$	$v(.5) \approx 19.843$
1	$v(1) \approx 19.365$
1.5	$v(1.5) \approx 18.540$
2	$v(2) \approx 17.321$
2.5	$v(2.5) \approx 15.612$
3	$v(3) \approx 13.229$
3.5	$v(3.5) \approx 9.682$
4	$v(4) = 0$

en cada renglón evaluamos
$v(1.5) = \sqrt{400 - 25(1.5)^2}$
≈ 18.540496

e) Haciendo uso de esta tabla calcula en forma aproximada la distancia recorrida por el automóvil desde que aplica los frenos hasta que se detiene por completo considerando que la velocidad se mantendrá constante en cada subintervalo de tiempo.

Con los datos adicionales de la tabla, el intervalo original de variación del tiempo $[0, 4]$, *se divide en* 8 *subintervalos cada uno de longitud de medio segundo, esto es,* $\Delta t = 0.5$ *En cada uno de ellos vamos a suponer que la velocidad se mantiene constante, y el valor de esa velocidad será justo el que se tiene en el extremo izquierdo de cada subintervalo.*

En $[0, 0.5]$ *tomamos* $v(0) = 20$ *constante en ese subintervalo.*

En $[0.5, 1]$ *tomamos* $v(0.5) \approx 19.843$ *constante.*

En $[1, 1.5]$ *tomamos* $v(1) \approx 19.365$ *constante.*

En $[1.5, 2]$ *tomamos* $v(1.5) \approx 18.540$ *constante.*

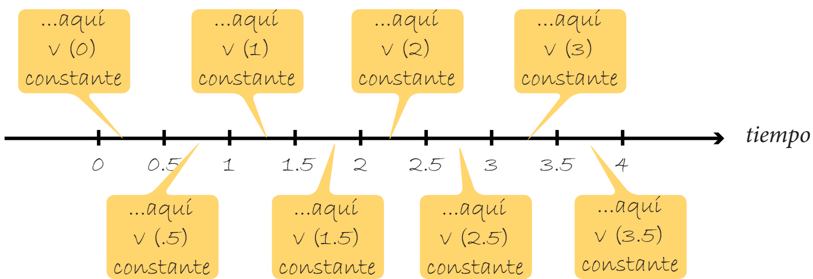
En $[2, 2.5]$ *tomamos* $v(2) \approx 17.321$ *constante.*

En $[2.5, 3]$ *tomamos* $v(2.5) \approx 15.612$ *constante.*

En $[3, 3.5]$ *tomamos* $v(3) \approx 13.229$ *constante.*

Finalmente, en $[3.5, 4]$ *tomamos* $v(3.5) \approx 9.682$ *constante en ese último subintervalo.*

Podemos representar esta acción de la siguiente manera



¡TOMA NOTA!

La afirmación **verdadera** es:

posición final = posición inicial + **cambio de la posición**

$5 = 2 + \Delta$posición

$5 = 2 + 3$

$x_f = x_i + \Delta x$

¿Sabías que?...

Los números naturales surgen de la necesidad práctica de **contar** objetos individuales. Tres hombres, tres piedras, tres CD, tres canciones, etc.

Estos conjuntos tienen en común la propiedad que se denota de manera abstracta con el símbolo 3 ...tan familiar para nosotros.

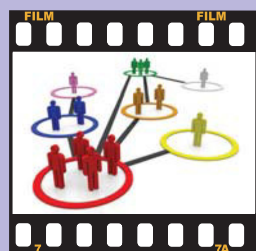
Pero en la vida diaria no sólo **contar** es importante, también es necesario **medir**.

Medir es asignar un número a diferentes magnitudes, como longitud, área, peso, energía, velocidad, tiempo, temperatura, costo, etc.

Los **números naturales** (enteros positivos)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

son suficientes para **contar**... pero **no** son suficientes para resolver el problema de **medir**.



Con la guía de la figura anterior obtenemos aproximaciones de la distancia recorrida en cada subintervalo multiplicando la velocidad constante por el tiempo transcurrido en el subintervalo, que en este caso siempre es medio segundo.

$$\Delta_1 d \approx v(0)(0.5) \approx (20)(0.5) = 10$$

$$\Delta_2 d \approx v(0.5)(0.5) \approx (19.843)(0.5) = 9.9215$$

$$\Delta_3 d \approx v(1)(0.5) \approx (19.365)(0.5) = 9.6825$$

$$\Delta_4 d \approx v(1.5)(0.5) \approx (18.540)(0.5) = 9.270$$

$$\Delta_5 d \approx v(2)(0.5) \approx (17.321)(0.5) = 8.660$$

$$\Delta_6 d \approx v(2.5)(0.5) \approx (15.612)(0.5) = 7.806$$

$$\Delta_7 d \approx v(3)(0.5) \approx (13.229)(0.5) = 6.6145$$

$$\Delta_8 d \approx v(3.5)(0.5) \approx (9.682)(0.5) = 4.841$$

Por tanto, la distancia recorrida por el automóvil se aproxima con la suma

$$\sum_{i=1}^{8} \Delta_i d = \Delta_1 d + \Delta_2 d + \Delta_3 d + \Delta_4 d + \Delta_5 d + \Delta_6 d + \Delta_7 d + \Delta_8 d$$

$$\approx 10 + 9.9215 + 9.6825 + 9.270 +$$

$$8.66 + 7.806 + 6.6145 + 4.841 = 66.7955$$

f) De las aproximaciones calculadas en los dos incisos anteriores, ¿cuál de ellas es una mejor aproximación a la distancia real recorrida por el automóvil?, ¿por qué? ¿Cómo podrías obtener una mejor aproximación aún?

Esta última aproximación mejora el cálculo de la distancia recorrida. Argumentamos esto al observar que la variación que se da en los valores de la velocidad en cada subintervalo es menor ahora, ya que se ha considerado menos tiempo en el que puede variar la velocidad. Esto hace de ella una mejor aproximación que la obtenida en el inciso c).

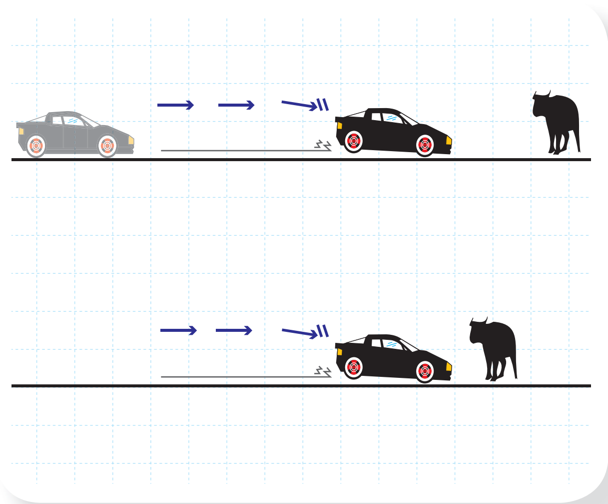
Podemos generar una mejor aproximación si consideramos un mayor número de subintervalos en que se divide el intervalo original $[0, 4]$; *esto siempre actuando bajo el supuesto (que resulta natural) de que los valores de la velocidad varían menos entre sí cuando consideramos un intervalo de tiempo cada vez más pequeño.*

g) Analiza la situación para que decidas si la aproximación que se ha obtenido de la distancia recorrida por el automóvil es mayor o menor que dicha distancia.

La aproximación obtenida de 66.7955 *metros es mayor a la distancia recorrida por el automóvil, porque en cada subintervalo de tiempo consideramos el dato del valor mayor de la velocidad al que se llega en ese subintervalo. Como supusimos que este valor se mantendría constante, los valores de la velocidad que se consideraron para calcular la aproximación son realmente valores mayores a los que llevaba realmente el automóvil en cada subintervalo. Para hacer esta consideración es clave tomar en cuenta la situación real planteada en el problema que nos asegura que los valores de la velocidad están disminuyendo a medida que transcurre el tiempo.*

h) Supongamos que la causa del frenado del automóvil fue haber observado una vaca parada en medio del camino. Supongamos que la vaca estaba justo a 67 metros del automóvil en el momento en que inicia el frenado. La aproximación obtenida para la distancia recorrida por el automóvil, ¿te permite asegurar que la vaca no fue atropellada? Argumenta tu respuesta.

La vaca no fue atropellada porque la aproximación de la distancia recorrida por el automóvil es un valor mayor que dicha distancia. Si le llamamos d, *entonces* $d \le 66.7955$ *y como* $66.7955 < 67$ *entonces* $d < 67$. *El automóvil se paró antes de impactarse con la vaca, ¿qué tanto antes? eso no lo sabemos con precisión pero sí sabemos que se detiene en una posición menor que* 66.7955, *por tanto menor que* 67.



¡Toma nota!

Expresiones del tipo:

$\frac{1}{0}, \frac{10}{0}, \frac{0}{0}$

que incluyen la división entre el número 0…

¡no representan números!

Partiendo de:		$a = b$
multiplico por a:		$a^2 = ab$
resto b^2:		$a^2 - b^2 = ab - b^2$
factorizo:		$(a-b)(a+b) = b(a-b)$
divido entre $a-b$:		$a + b = b$
sustituyo $a = b$:		$b + b = b$
sumo:		$2b = b$
y divido entre b:		$2 = 1$

¡¿ Qué estuvo mal ?!

Si vas a dividir y cancelar… ¡asegúrate de no hacerlo entre cero!

$\frac{0}{0}$ no es 1

$\frac{a-b}{a-b} = 1$ sí y sólo sí $a \neq b$

$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ sí y sólo sí $x \neq 1$

¿Sabías que?…

El problema de **medir** se reduce, en una primera instancia, al problema de **contar**:

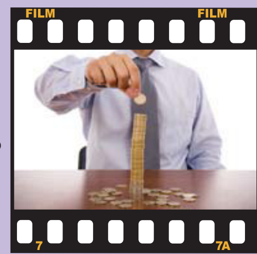
se elige una **unidad de medida** y se trata de ver **cuántas veces** esa unidad está contenida en la magnitud que buscamos medir.

Piensa, por ejemplo, en medir el filo de tu escritorio utilizando "una cuarta", es decir, considerando como unidad a la longitud entre las puntas de tu dedo pulgar y meñique al extender tu mano.

Seguro te darás cuenta que este proceso, en general, no es suficiente, porque puede ser que la medida buscada no sea un **múltiplo** de la unidad.

Es común que quede un resto de la magnitud sin medir, una parte restante que queda del todo.

En ese momento se requiere subdividir a la unidad original en un cierto número de partes iguales. Se toma una de ellas como unidad para medir con ella el resto de la magnitud.



Cuando la unidad de medida se asocia con el número 1 y ésta se divide en n partes iguales, se genera la subunidad $\frac{1}{n}$.

Si la medida de la magnitud se asocia con el número $\frac{m}{n}$, esto significa que la subunidad $\frac{1}{n}$ cabe "m veces" en la magnitud: $m\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}$.

Después de realizar varias veces esta acción de subdividir la subunidad para medir el resto… ¿quedará aún un resto sin medir?

Generalización y uso de la notación matemática

En esta situación problema hemos considerado la distancia recorrida por el automóvil respecto al tiempo y calculamos un valor aproximado de la misma que fuimos mejorando conforme obteníamos más datos de la velocidad. Conviene en este momento valorar el uso de un recurso tecnológico, como la hoja de cálculo, en el que podemos realizar de manera automática los cálculos expresados en el procedimiento numérico que hemos estado recreando. En seguida aparece la imagen con cierta organización de la información que te proponemos realices en la hoja de cálculo que tengas a la mano.

… aquí se introduce la fórmula de $v(t)$

… aquí se calculan los productos manteniendo la velocidad constante

t	$v(t)$	$v(t)\Delta t$		Δt
0	20.000	20.000		1
1	19.365	19.365		
2	17.321	17.321		
3	13.229	13.229	Δx = distancia	
4	0.000	0.000	aproximación	69.9142

… aquí se suman los 4 primeros datos de la tercera columna

… aquí se introduce la fórmula que agrega Δt a la celda de arriba

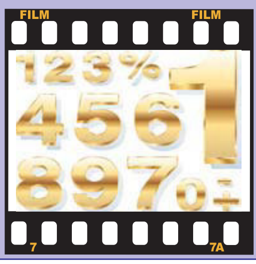
¿Sabías que?...

Los **números enteros** resultan al agregar a los naturales el número 0 y los negativos de cada número natural:

$\mathbb{Z}=\{\ldots-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\ldots\}$

Los **números racionales** resultan del cociente (división, razón) de dos números enteros claro, siempre y cuando el denominador no sea 0.

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \text{ tal que } \mathbf{m},\, n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0\right\}$



¡TOMA NOTA!

Con los números
racionales
aparece nuevamente
la palabra
razón
para denotar
división o cociente

Los números **racionales**
son la **razón**
de dos números **enteros**,
donde la división
no incluye al número 0

numerador
$\frac{m}{n}$ razón
denominador

Observamos que en cada celda de la tercer columna se utiliza la idea de considerar la velocidad constante en el intervalo que comienza en el valor de t del mismo renglón y acaba en el valor de t del siguiente renglón; por ejemplo, en el intervalo de tiempo de $t = 1$ a $t = 2$ la velocidad constante 19.365 metros/segundo provoca un cambio en la posición de 19.365 metros dado que $\Delta t = 1$. De esta forma, basta sumar los primeros 4 renglones de la tercer columna para obtener la aproximación de la distancia recorrida hasta $t = 4$.

La ventaja de contar con este recurso es que de una manera sencilla podemos obtener la mejora en la aproximación al cambiar el dato de Δt por 0.5 y prolongar el efecto de las operaciones declaradas en la hoja de cálculo hasta obtener el renglón donde el tiempo llega a 4 segundos. La certeza de que el dato $\Delta t = 0.5$ brinde una mejor aproximación de la distancia lo seguimos apoyando en el hecho intuitivo (pero no obvio) de que la variación de los valores de la velocidad en un intervalo menor de tiempo es menor a la variación que puede tener en un intervalo mayor de tiempo.

Habrá ocasión de ahondar en esto posteriormente. Por el momento vale la pena que realices en tu propio recurso tecnológico el cambio de $\Delta t = 0.5$, prolongues las operaciones en el archivo electrónico y compares con la tabla que en seguida presentamos.

t	$v(t)$	$v(t)\Delta t$		Δt
0.0	20.000	10.0000		0.5
0.5	19.843	9.9216		
1.0	19.365	9.6825		
1.5	18.540	9.2702		
2.0	17.321	8.6603		
2.5	15.612	7.8062		
3.0	13.229	6.6144		
3.5	9.682	4.8412	Δx = distancia	
4.0	0.000	0.000	aproximación	66.7964

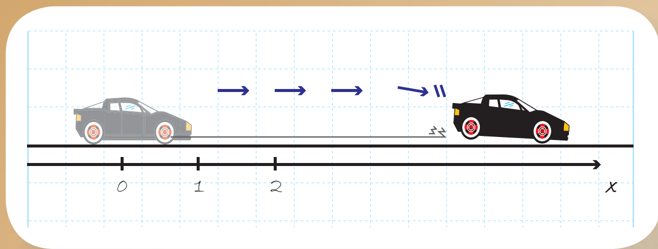
La nueva aproximación obtenida es 66.7964 y difiere un poco de la que calculamos manualmente, la razón es que estamos permitiendo al recurso tecnológico que considere todas las cifras decimales que puede utilizar, lo que hace nuestra aproximación más certera. Acostumbrándonos a manejar este recurso tecnológico y considerando una cantidad de cifras decimales fija (3, 4 o 5 decimales) para obtener nuestras respuestas, podremos comparar los resultados obtenidos sin problema.

Nuevamente la hoja de cálculo nos invita a mejorar la aproximación para la distancia recorrida por el automóvil antes de quedar en reposo. Con un $\Delta t = 0.1$ obtenemos la aproximación de la distancia 63.73895 metros, que es menor al valor obtenido anteriormente y es más cercano al valor exacto de la distancia. Interactúa con tu propia hoja para que compruebes el dato que te damos.

Está haciendo falta que compartamos una manera de denotar el proceso numérico que estamos implementando y poder generalizarlo. Para ello, debemos hacer algunas precisiones.

Primera precisión.

La distancia recorrida por el automóvil puede ser considerada como el cambio de su posición x, donde la posición inicial es 0. Estamos fijando el origen del sistema coordenado en el que se mueve el automóvil justo en donde éste se encontraba al aplicar los frenos.



De esta manera, el valor de la distancia recorrida puede denotarse como Δx y siendo que el cálculo se hizo de los 0 a los 4 segundos, podemos señalar esto como

$$\Delta x[0, 4]$$

que se lee: "el cambio de la posición en el intervalo de 0 a 4".

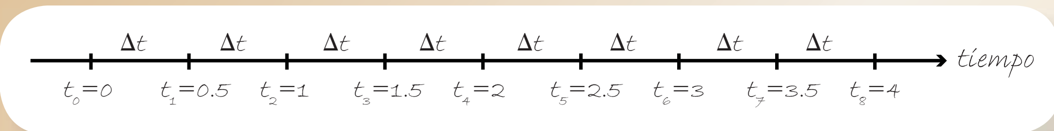
Habiendo considerado la subdivisión del intervalo de tiempo en 8 subintervalos, calculamos que

$$\Delta x[0, 4] = \Delta x[0, 0.5] + \Delta x[0.5, 1] + \ldots + \Delta x[3, 3.5] + \Delta x[3.5, 4]$$

$$\Delta x[0, 4] \approx v(0)(0.5) + v(0.5)(0.5) + \ldots + v(3)(0.5) + v(3.5)(0.5)$$

La expresión anterior invita a pensar el cambio de la posición en el intervalo $[0, 4]$ como una **acumulación del cambio** de la posición en los consecutivos 8 subintervalos que se determinan.

Apoyándonos en la siguiente figura podemos generalizar la expresión del cambio de la posición en el intervalo de tiempo $[0, 4]$ introduciendo la notación t_i para enumerar las divisiones que se hacen del intervalo. Observa que t_0 coincide con el valor inicial del tiempo y t_8 con el valor final del tiempo, en este caso, 4.



Utilizando la declaración de los puntos de subdivisión escribimos en seguida el cambio de la posición en el intervalo de 0 a 4 y su aproximación:

$$\Delta x[0, 4] \approx$$

$$v(t_0)\Delta t + v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + v(t_3)\Delta t + v(t_4)\Delta t + v(t_5)\Delta t + v(t_6)\Delta t + v(t_7)\Delta t$$

$$\Delta x[0, 4] \approx \sum_{i=1}^{8} v(t_{i-1})\Delta t$$

Observa que en la expresión para la sumatoria hemos utilizado el subíndice i que varía de $i = 1$ a $i = 8$ haciendo que el dato de la velocidad se calcule en t_{i-1} generando t_0, t_1 hasta t_7, porque $v(t_7)$ es el último valor de velocidad que debe considerarse para mantenerle constante en el último subintervalo $[t_7, t_8] = [3.5, 4]$.

Segunda precisión.

Pensar que el cálculo del cambio que se acumula en el intervalo $[0, 4]$ fuese calculado en el intervalo $[0, 3.4]$, en $[0, 3]$, o $[0, 2.5]$, en general en cualquier tiempo t posible para la situación, nos sugiere **generalizar** la manera de denotar el **cambio acumulado** de la posición en el intervalo $[0, t]$ como

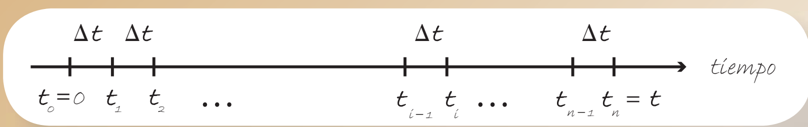
$$\Delta x\left[0, t\right] \approx \sum_{i=1}^{8} v(t_{i-1})\Delta t$$

Pero esta expresión estaría considerando que el intervalo de tiempo $[0, t]$ fuese subdividido en 8 subintervalos, sin embargo pensando en la mejora de la aproximación del cambio acumulado, propongamos en seguida una subdivisión **general** del intervalo $[0, t]$ que sea de n subintervalos de igual longitud.

La longitud del intervalo $[0, t]$ es t y subdividido $[0, t]$ en n subintervalos generará longitudes iguales

$$\Delta t = \frac{t}{n},$$

como lo representamos en la siguiente figura:



Apoyados en la figura anterior expresamos:

$$\Delta x[0,t] = \Delta x[t_0, t_1] + \Delta x[t_1, t_2] + \ldots + \Delta x[t_{i-1}, t_i] + \ldots + \Delta x[t_{n-1}, t_n]$$

$$\Delta x[0,t] \approx v(t_0)\Delta t + v(t_1)\Delta t + \ldots + v(t_{i-1})\Delta t + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t$$

$$\Delta x[0,t] \approx \sum_{i=1}^{n} v(t_{i-1})\Delta t$$

Observa nuevamente que la notación de sumatoria utiliza el subíndice i que al variar de $i = 1$ a $i = n$ produce los valores para la velocidad desde t_0 hasta t_{n-1} donde $v(t_{n-1})$ es el último valor de velocidad que se mantiene constante en el último intervalo $[t_{n-1}, t_n]$ que termina en $t_n = t$.

Tercera precisión.

Un último paso hacia la **generalización** consiste en **transferir** el proceso numérico que hemos generado en el contexto real del movimiento en línea recta al contexto general de una magnitud de interés que varía con respecto a otra magnitud:

La posición x representa a la magnitud M y el tiempo t a la magnitud x de la que depende M.

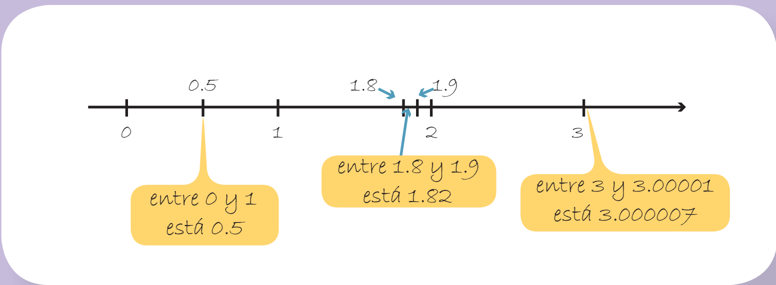
Generalización

Sea M una magnitud que depende de la magnitud x y cuya razón de cambio $r(x)$ es conocida. El **cambio acumulado** de M en el intervalo $[0, x]$ se denota por $\Delta M[0, x]$ y se aproxima mediante:

$$\Delta M[0, x] \approx \sum_{i=1}^{n} r(x_{i-1})\Delta x$$

¿Sabías que?...

Los números racionales, $\mathbb{Q}$, son **densos** en la recta numérica. Esto quiere decir que dados dos números racionales, siempre existe otro número racional entre ellos.



Cada vez que propongas dos números racionales, bastante cercanos entre sí, por decir:

$$2.71845 \text{ y } 2.71846,$$

podrás encontrar otro número racional entre ellos, por ejemplo

$$2.7184572$$

Habrás notado que estamos "a las puertas" de un **proceso infinito**...

¡TOMA NOTA!

El **algoritmo de la división** nos informa que la expansión decimal de los **números racionales** es muy peculiar...

Si divido dos enteros, por ejemplo $\frac{2}{5}$

$$5\overline{)2.0}\;=0.4 \qquad \frac{2}{5}=0.4$$

0

este **número racional** tiene una **expansión decimal finita**

Si divido los enteros $\frac{4}{3}$:

$$3\overline{)4.000}\;=1.333\ldots$$

10
10
10
.
.
.

$$\frac{4}{3}=1.333\ldots\ldots$$

este **número racional** tiene una **expansión decimal...¡infinita!**

¡TOMA NOTA!

Divide $\frac{25}{8}$, también $\frac{20}{7}$ y comprueba cuál tiene expansión decimal **finita** y cuál **infinita**...

¿cómo expresa tu **calculadora** esa diferencia?

Expansiones decimales **finitas**:

$$\frac{2}{5}=0.4 \qquad \frac{25}{8}=3.125$$

$$8.342=\frac{8342}{1000} \qquad 4=\frac{4}{1}=\frac{8}{2}$$

$$-3.1111=\frac{-31111}{10000} \qquad .333=\frac{333}{1000}$$

¡TOMA NOTA!

Los números **racionales** corresponden con expansiones decimales finitas o infinitas **periódicas** ...donde se repite un bloque de cifras eternamente...

Expansiones decimales **infinitas periódicas**:

$$\frac{1}{3}=0.333\ldots=0.\overline{3}$$

$$0.111\ldots111\ldots=0.\overline{1}$$

$$0.123123\ldots=0.\overline{123}$$

$$\frac{20}{7}=2.85714285714\ldots$$

$$=2.\overline{857142}857142$$

En un tanque circular se comienza a introducir agua de tal manera que el comportamiento de la razón de cambio del volumen de agua con respecto al tiempo está modelado mediante la función

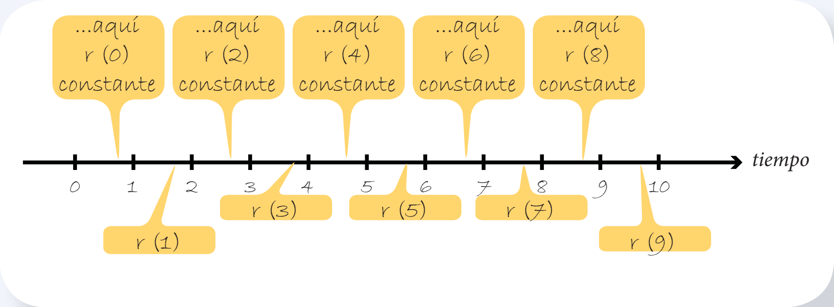
$$r(t)=\sqrt{t^3+t} \text{ litros por minuto.}$$

a) Construye una tabla para los valores de la razón de cambio del volumen en los instantes desde $t = 0, 1, 2, 3, 4...$ hasta $t = 10$. Utiliza un recurso tecnológico como una hoja de cálculo para obtener los valores aproximados a 5 decimales.

En el contexto que estamos considerando, la magnitud bajo estudio es el volumen de agua en el tanque, el cual depende del tiempo. Así, V representa al volumen y x representa al tiempo. En la hoja de cálculo, anexamos la columna del tiempo y en seguida introducimos la función de la razón de cambio del volumen evaluándose en los instantes de $t = 0$ a $t = 10$

t	$r(t)$
0	0
1	1.414
2	3.162
3	5.477
4	8.246
5	11.402
6	14.900
7	18.708
8	22.804
9	27.166
10	31.780

b) Calcula con ayuda de la hoja de cálculo la aproximación del cambio de volumen ocurrido en cada uno de los subintervalos de tiempo en que se divide el intervalo de los 10 primeros minutos del llenado del tanque. La razón de cambio constante que consideres debe coincidir con el extremo izquierdo de cada subintervalo, como lo sugiere la siguiente figura:



Estamos utilizando la idea de mantener la razón de cambio constante en cada uno de los 10 *subintervalos de longitud* $\Delta t = 1$ *que se generaron. De este modo, podemos escribir:*

$$\Delta V[0,10] \approx r(0)(1) + r(2)(1) + r(3)(1) + \ldots + r(9)(1)$$

Observa que $r(0)(1)$ *aproxima el cambio de* V *en el intervalo* $[0, 1]$, *esto es* $\Delta V[0,1] \approx r(0)(1)$, *de manera análoga se tiene* $\Delta V[1, 2] \approx r(1)(1)$, $\Delta V[2, 3] \approx r(2)(1)$, *y así sucesivamente hasta* $\Delta V[9, 10] \approx r(9)(1)$.

El cambio acumulado del volumen en el intervalo $[0, 10]$ *es la suma de estos* 10 *valores. En la hoja de cálculo introducimos en la tercer columna estos productos de* $r(t)\ \Delta t$ *:*

t	$r(t)$	$r(t)\Delta t$		Δt
0	0	0.000		1
1	1.414	1.414		
2	3.162	3.162		
3	5.477	5.477		
4	8.246	8.246		
5	11.402	11.402		
6	14.900	14.900		
7	18.708	18.708		
8	22.804	22.804		
9	27.166	27.166	ΔV = volumen	
10	31.780	31.780	aproximación	113.27930

¡TOMA NOTA!

El valor que se ha obtenido, 113.27930 es igual a la suma de los números de la columna $r(t)\ \Delta t$ pero **sin incluir** el último. No se suma 31.780 . . . ¿por qué?

c) Nuevamente, usando el recurso tecnológico calcula la aproximación del valor del volumen de agua que ha entrado al tanque en los primeros 10 minutos. Denota en papel el procedimiento utilizando la notación de cambio de volumen ΔV y tiempo Δt, además del símbolo de sumatoria Σ.

En la imagen de arriba calculamos la suma de los cambios correspondientes a los 10 *subintervalos en la casilla señalada. Denotamos el procedimiento así:*

$$\Delta V[0,10] \approx \sum_{i=1}^{10} r(t_{i-1})\Delta t$$

donde $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2, \ldots, t_9 = 9$ *y* $t_{10} = 10$ *y por tanto* $\Delta t = 1$.

d) Al dividir cada subintervalo en dos, el cálculo aproximado del volumen de agua en el tanque mejora porque se toman en cuenta un mayor número de datos y los valores de la razón de cambio son más cercanos a los reales que los anteriores. Realiza esta subdivisión utilizando el recurso de la hoja de cálculo y obtén una mejor aproximación del volumen de agua acumulado en los primeros 10 minutos en el tanque. Utiliza las notaciones de cambio y sumatoria para expresar tu procedimiento en papel. Respuesta con 5 decimales.

La imagen siguiente muestra el desarrollo en la hoja de cálculo con la mejora de la aproximación expresada con 5 *decimales:*

t	$r(t)$	$r(t)\Delta t$		Δt
0	0	0.000		0.5
0.5	0.791	0.395		
1	1.414	0.707		
1.5	2.208	1.104		
2	3.162	1.581		
2.5	4.257	2.129		
3	5.477	2.739		
3.5	6.810	3.405		
4	8.246	4.123		
4.5	9.779	4.889		
5	11.402	5.701		
5.5	13.110	6.555		
6	14.900	7.450		
6.5	16.767	8.383		
7	18.708	9.354		
7.5	20.721	10.361		
8	22.804	11.402		
8.5	24.952	12.476		
9	27.166	13.583		
9.5	29.443	14.721	$\Delta V =$ volumen	
10	31.780	15.890	aproximación	121.05867

¡TOMA NOTA!

Al utilizar tu hoja de cálculo ten cuidado de **no incluir** en la sumatoria el valor en $t = 10$ de 15.890 para calcular la aproximación de ΔV

Observamos ahora 20 renglones en la hoja de cálculo, uno para cada uno de los 20 subintervalos que se determinan al dividir el intervalo de tiempo $[0, 10]$ utilizando $\Delta t = 0.5$, medio minuto.

e) Calcula una mejor aproximación dividiendo cada subintervalo de longitud 1 en 10 subintervalos. Denota adecuadamente tu procedimiento en papel. Respuesta con 5 decimales.

La siguiente imagen captura el inicio del documento y el final del mismo, donde aparece la mejora del cálculo del cambio acumulado en $[0, 10]$ habiendo considerado $\Delta t = 0.1$

t	$r(t)$	$r(t)\Delta t$		Δt
0	0	0.000		0.1
0.1	0.318	0.032		
0.2	0.456	0.046		
0.3	0.572	0.057		
0.4	0.681	0.068		
0.5	0.791	0.079		
0.6	0.903	0.090		
0.7	1.021	0.102		
0.8	1.145	0.115		
0.9	1.276	0.128		
1	1.414	0.141		
9	27.166	2.717		
9.1	27.616	2.762		
9.2	28.069	2.807		
9.3	28.525	2.852		
9.4	28.982	2.898		
9.5	29.443	2.944		
9.6	29.905	2.991		
9.7	30.371	3.037		
9.8	30.838	3.084		
9.9	31.308	3.131	ΔV = volumen	
10	31.780	3.178	aproximación	127.38659

¡Toma nota!

Es muy simple mejorar las aproximaciones utilizando la hoja de cálculo ...sólo ten cuidado de cambiar la fórmula de la sumatoria para incluir toda la columna $r(t)\ \Delta t$ ¡excepto el dato en $t = 10$!

En esta ocasión se trata de 100 renglones en los cuales, consecutivamente, se van acumulando las aproximaciones del cambio del volumen de agua que se va acumulando cada $\Delta t = 0.1$, esto es, cada décimo de minuto. Se tiene una aproximación del volumen de agua de 127.38659 litros que mejora la aproximación calculada con $\Delta t = 0.5$ ya que en un décimo de minuto seguramente es menor la variación de los valores de la razón de cambio comparando con la variación en medio minuto, por ende, los datos que estamos considerando para calcular la aproximación del cambio de volumen en el tanque son más cercanos a los valores reales de la razón de cambio del volumen.

f) Analiza la situación para que decidas si las aproximaciones que has obtenido del volumen de agua acumulado en el tanque representan un valor mayor, o bien, menor que el volumen acumulado a los 10 minutos.

*Los datos de la razón de cambio del volumen de agua que va entrando al tanque nos aseguran que dicha razón de cambio va en aumento. Por tanto, cada vez que consideramos un subintervalo en el intervalo $[0, 10]$ y decidimos mantener constante la razón de cambio según el valor que toma en el extremo izquierdo del subintervalo, estamos suponiendo un valor que es **menor** que los valores que toma la razón en los elementos de ese subintervalo.*

Por ejemplo, en la tabla anterior, considerando el penúltimo renglón que expresa el procedimiento en el intervalo $[9.9, 10]$, mantuvimos la razón de cambio como 31.308 litros/minuto, que es el valor que toma en $t = 9.9$, el cual es el menor valor que toma la razón de cambio porque después de $t = 9.9$ la razón de cambio va en aumento.

*En consecuencia, el valor aproximado del cambio acumulado de volumen que hemos calculado es un valor que es menor al cambio acumulado de volumen, es decir, en realidad el **cambio acumulado de volumen** en los primeros 10 minutos es un valor mayor a 127.38659 litros.*

g) Tomando en cuenta esta última mejora en la aproximación y que la capacidad del tanque es de 127 litros, ¿puedes asegurar que el tanque se ha desbordado para los 10 minutos? Justifica tu respuesta con argumentos adecuados.

Efectivamente, el tanque se ha desbordado para los 10 minutos ya que la aproximación que hemos obtenido para el volumen acumulado es mayor a 127 litros; en realidad la acumulación de volumen de agua es mayor a 127.38659, y por ende, mayor a 127 litros.

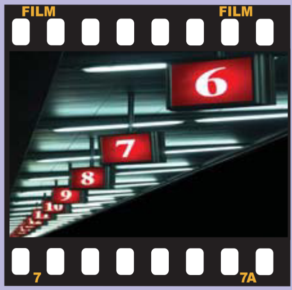
¿Sabías que?...

Desde el punto de vista lógico formal de las Matemáticas, hay tantos números naturales como los hay enteros.

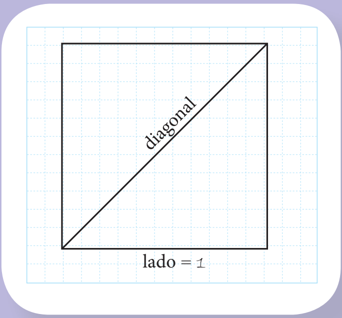
Esto pudiera parecer que va en contra de nuestra intuición, en el sentido de que debieran ser más números enteros porque se incluyeron los números negativos a los naturales.

La igualdad en la cantidad de elementos de los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ se decide a partir de establecer una correspondencia biyectiva entre ellos, lo que quiere decir que puede establecerse una relación entre estos dos conjuntos de números, donde cada natural corresponde con un único entero y cada entero con un único natural… y ni sobran naturales… ni sobran enteros.

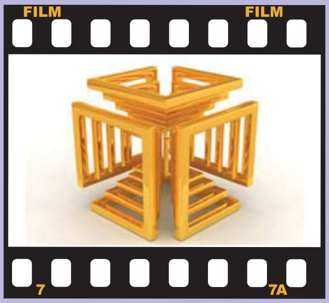
La noción de cardinalidad de un conjunto surge con el estudio de los conjuntos infinitos. Resulta que la cardinalidad de los números racionales $\mathbb{Q}$ es también la misma que la de los números naturales $\mathbb{N}$, que es la misma de los números enteros $\mathbb{Z}$… ¿habrá un infinito "más grande"?



¿Sabías que?...



Los números racionales son **prácticamente** suficientes para resolver el problema de **medir**... pero no son suficientes **teóricamente**, ¿por qué? ... porque hay medidas que no corresponden con un número racional.



Considera el cuadrado de lado 1 y piensa en su diagonal

La longitud de la diagonal se puede calcular con el Teorema de Pitágoras:

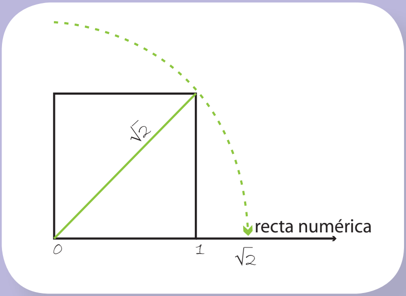
$$(1)^2 + (1)^2 = (\text{diagonal})^2$$

De ahí se obtiene que la diagonal mide $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ...

En la teoría está demostrado que este número $\sqrt{2}$ es un número irracional, es decir, **no es** un número racional.

Demostrar la "irracionalidad" de $\sqrt{2}$ no es simple, requiere del uso de la lógica deductiva. Nuestro propósito aquí no es demostrarlo, sino más bien, mostrarte que la "incompletez" de la recta numérica queda en evidencia con sólo considerar el número irracional $\sqrt{2}$.

Además de los racionales, existen otros números que "habitan" también en la recta numérica... ¿serán muchos?



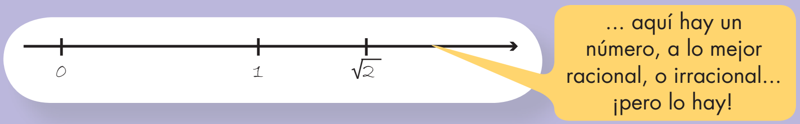
¿Sabías que?...

El infinito que expresa la cantidad de elementos en los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ es el mismo. Matemáticamente, se dice que estos tres conjuntos tienen la misma cardinalidad. Pero no ocurre así con los números irracionales, su cardinalidad es diferente.

Cuando a los números racionales $\mathbb{Q}$ agregamos los irracionales $\mathbb{Q}'$ se forman los **números reales**:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

y con ellos, con $\mathbb{R}$, se completa la recta numérica sin dejar hueco alguno... como sucedería si sólo considerásemos a los números racionales $\mathbb{Q}$.



En Matemáticas se dice que los números reales $\mathbb{R}$ son un **campo ordenado** y **completo**.

Pero la cardinalidad de los números reales es diferente a la de los números racionales... e inevitablemente esto nos dice que... ¡hay de infinitos... a infinitos!

No cabe duda que el símbolo ∞ representa mucho más que lo que nuestros propios sentidos puedan percibir y nos puedan informar.

PROBLEMA 1

Un tanque de 150 centímetros de altura se comienza a vaciar de tal manera que el comportamiento de la razón de cambio del nivel del líquido con respecto al tiempo queda modelado mediante la función

$$r(t) = \sqrt{x^2 + 1} - 1 \text{ centímetros/minuto.}$$

a) Calcula el cambio acumulado del nivel en los primeros 5 minutos del llenado. Utiliza una hoja de cálculo dividiendo el intervalo $[0, 5]$ en subintervalos de longitud $\Delta t = 0.1$ y realiza los cálculos con 3 decimales.

Respuesta:

Aproximación del cambio de nivel en los primeros 5 minutos: 8.7 centímetros.

b) Calcula el cambio acumulado del nivel en los siguientes 5 minutos del llenado. Utiliza las mismas especificaciones que en el inciso anterior.

Respuesta:

Aproximación del cambio de nivel en los siguientes 5 minutos: 32.597 centímetros.

c) Compara ambas respuestas y argumenta si la diferencia era de esperarse y por qué razón.

Respuesta:

La razón de cambio crece.

PROBLEMA 2

Un coche frena bruscamente de tal forma que de ir a 35 metros/segundo (126 kilómetro/hora) llega a .07 metros/segundo (aproximadamente 1/4 kilómetro/hora) en 7 segundos.

a) Comprueba que la función $v(t) = \dfrac{35}{10t^2 + 1}$ cumple con la información dada y supón que modela el comportamiento de la velocidad del coche.

Respuesta:

$v(0) = 35$, $v(7) \approx .0712$.

b) Calcula un valor aproximado del cambio de la posición (distancia recorrida) del coche en el intervalo de tiempo de los 0 a los 7 segundos. Divide el intervalo $[0, 7]$ en 14 subintervalos de igual longitud. Utiliza la notación matemática adecuada y una hoja de cálculo para realizar las operaciones.

Respuesta:

Aproximación de 26.284 metros.

c) Calcula nuevamente un valor aproximado del cambio acumulado de la posición en $[0, 7]$ pero dividiendo este intervalo en 28 subintervalos de igual longitud. Argumenta por qué ésta es una mejor aproximación que la obtenida en el inciso anterior.

Respuesta: Aproximación de 21.264 metros.

d) Si el coche se dirigía a un letrero ubicado a 20 metros de donde comenzó a frenar.

¿Puedes con la información obtenida en el inciso anterior asegurar que se estrelló con el letrero?

Respuesta: No se puede asegurar.

¡TOMA NOTA!

La palabra
infinito
en el lenguaje cotidiano
se relaciona con algo
que no tiene fin…
es impreciso…
vago…

¿y en Matemáticas?

El **infinito**
en Matemáticas
está presente
desde el origen
de los números…

Si agrego el 1 al 1
llego al 2
y si agrego el 1 al 2,
llego al 3,
y si agrego el 1 al 3,
llego al 4,
y es así que se forman los
números naturales…
un conjunto que se extiende
"al infinito"
…uno muy lejano…

¡TOMA NOTA!

El **infinito**
también se encuentra
en zonas "cercanas"…
…piensa en este proceso sobre el
segmento de longitud 1:

0 1
dividimos a la mitad

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
0 1
dividimos a la mitad

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$
0 1
dividimos a la mitad

¡TOMA NOTA!

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$
0 1
dividimos a la mitad

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$
0 1
dividimos a la mitad

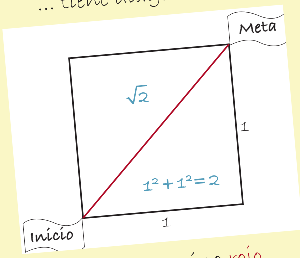
… y así sucesivamente…

Pensando en lo anterior…
ahora suma:
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\,?$
… la respuesta
"salta a la vista":
¡es 1!

¡Toma nota!

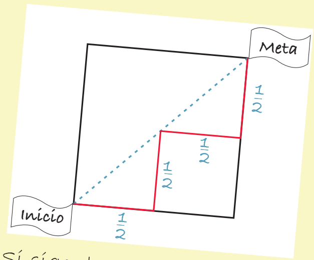
Un cuadrado de lado 1...

... tiene diagonal $\sqrt{2}$



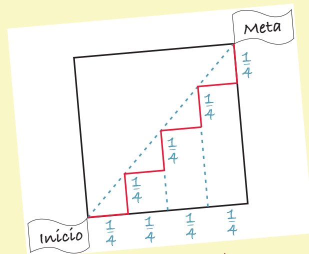
Si sigo el camino rojo...

recorro $\sqrt{2}$



Si sigo el camino rojo...recorro

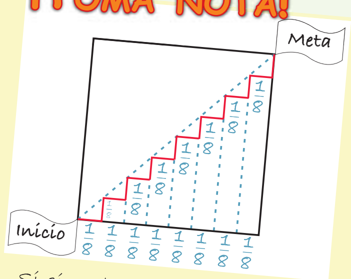
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$$



Si sigo el camino rojo...recorro

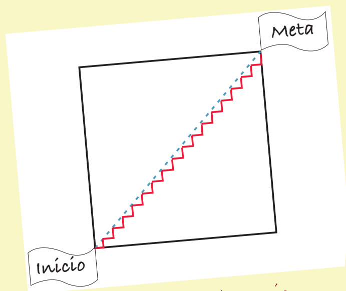
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2$$

¡Toma nota!



Si sigo el camino rojo...recorro

$$\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+....+\frac{1}{8}}_{\text{16 veces}}=2$$



Si sigo el camino rojo...

Parece ser que
los "escalones" se acercan
a la diagonal...
pero su longitud
¡nunca!

Advertencia:
Los procesos infinitos
requieren control...

1.3 Cálculo del Valor exacto del cambio acumulado. Modelo polinomial

En este tema aplicamos el método numérico surgido en el tema anterior para llevarlo a sus últimas consecuencias (cuando el número de subintervalos crece cada vez más) y capturar el valor de la magnitud bajo estudio; esto para el caso en que la razón de cambio está modelada mediante una función potencia natural. El uso del recurso tecnológico de la hoja de cálculo permite realizar conjeturas sobre la función que modela el comportamiento de la magnitud bajo estudio, provocando la transferencia de la información numérica en algebraica. Se infiere la relación algebraica entre razón de cambio y magnitud (modelada por una función potencia natural) de tal modo que, dada una razón de cambio, pueda identificarse automáticamente la magnitud que reconstruye, y a su vez, dada una magnitud, se identifique automáticamente la razón de cambio que le corresponde. Se propone el contexto real de llenado de un tanque para motivar la ampliación del conocimiento de la correspondencia anterior para el caso de funciones polinomiales. Finalmente, se establece el modo de calcular el Valor exacto del cambio acumulado para el caso del Modelo polinomial en un intervalo [a, b] de variación de la variable independiente.

Situación Problema 1.3

En un tanque vacío se introduce agua de tal modo que la razón de cambio del volumen de agua con respecto al tiempo se comporta de acuerdo a la función $r(t)=2t$ litros/minuto (la razón de cambio es proporcional al tiempo). En esta situación, el cambio acumulado del volumen en cada intervalo del tipo $[0, 1]$, $[0, 2]$, $[0, 3]$ y en general $[0, t]$, coincide con el valor del volumen V a los $1, 2, 3,$ y en general, t minutos.

a) Utiliza una hoja de cálculo para aproximar el valor del volumen que se registra en el tanque a medida que pasa el tiempo en los primeros 10 minutos y considerando intervalos de tiempo de $\Delta t = 1$ minuto. El valor de la razón de cambio que mantendrás constante se elige en el extremo izquierdo de cada intervalo. Muestra los valores en la siguiente tabla:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aproximación $V(t)$											

Introducimos en una hoja de cálculo la información como señalamos a continuación:

... aquí se inserta la fórmula $2t$

...aquí se calcula la aproximación del cambio acumulado del volumen en [0,1]

...aquí se teclea el volumen inicial 0

...aquí se declara la longitud de los subintervalos por considerar

t	$r(t)$	$r(t)\Delta t$	aproximación de $V(t)$	Δt
0	0	0	Volumen inicial 0	1
1	2	2	0	
2	4	4	2	
3	6	6	6	
4	8	8	12	
5	10	10	20	
6	12	12	30	
7	14	14	42	
8	16	16	56	
9	18	18	72	
10	20	20	90	

...aquí se aproxima el volumen en $t = 1$ al sumar al volumen inicial el valor aproximado del cambio de volumen en [0, 1]

...aquí se calcula la aproximación del cambio del volumen en [9, 10]

...aquí se aproxima el volumen en $t = 10$ al sumar al volumen en $t = 9$ (que es 72) el valor del cambio del volumen en [9, 10]

Los datos calculados nos permiten aproximar los valores del volumen que expresamos en seguida en la tabla.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aproximación $V(t)$	0	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90

b) Mejora los cálculos del archivo que hemos generado utilizando el intervalo de tiempo $\Delta t = 0.1$ minuto. De este modo, los valores del volumen en los tiempos señalados en la tabla, son el resultado de acumular el cambio del volumen calculado en 10 subintervalos más pequeños comprendidos entre el 0 y el 1, el 1 y 2, el 2 y 3 y así sucesivamente. Registra los valores en la siguiente tabla:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aproximación $V(t)$											

El archivo electrónico modificado con el dato de $\Delta t = 0.1$ debe prolongarse hasta encontrar el valor de $t = 10$; en él hemos señalado los valores para registrar en la tabla.

t	$r(t)$	$r(t)\Delta t$	aproximación de $V(t)$	Δt	
0	0	0.00	Volumen inicial 0	0.1	
0.1	0.2	0.02	0.00		
0.2	0.4	0.04	0.02		
0.3	0.6	0.06	0.06		
0.4	0.8	0.08	0.12		
0.5	1	0.10	0.20		
0.6	1.2	0.12	0.30		
0.7	1.4	0.14	0.42		
0.8	1.6	0.16	0.56		
0.9	1.8	0.18	0.72		
1	2	0.20	0.90		$V(1) \approx 0.9$
1.1	2.2	0.22	1.10		
1.2	2.4	0.24	1.32		
1.3	2.6	0.26	1.56		
1.4	2.8	0.28	1.82		
1.5	3	0.30	2.10		
1.6	3.2	0.32	2.40		
1.7	3.4	0.34	2.72		
1.8	3.6	0.36	3.06		
1.9	3.8	0.38	3.42		
2	4	0.40	3.80		$V(2) \approx 3.8$
2.1	4.2	0.42	4.20		
2.2	4.4	0.44	4.62		
2.3	4.6	0.46	5.06		
2.4	4.8	0.48	5.52		
2.5	5	0.50	6.00		
2.6	5.2	0.52	6.50		
2.7	5.4	0.54	7.02		
2.8	5.6	0.56	7.56		
2.9	5.8	0.58	8.12		
3	6	0.60	8.70		$V(3) \approx 8.7$
3.1	6.2	0.62	9.30		
3.2	6.4	0.64	9.92		
3.3	6.6	0.66	10.56		
3.4	6.8	0.68	11.22		
3.5	7	0.70	11.90		
3.6	7.2	0.72	12.60		
3.7	7.4	0.74	13.32		
3.8	7.6	0.76	14.06		
3.9	7.8	0.78	14.82		
4	8	0.80	15.60		$V(4) \approx 15.6$
4.1	8.2	0.82	16.40		
4.2	8.4	0.84	17.22		
4.3	8.6	0.86	18.06		
4.4	8.8	0.88	18.92		
4.5	9	0.90	19.80		
4.6	9.2	0.92	20.70		
4.7	9.4	0.94	21.62		
4.8	9.6	0.96	22.56		
4.9	9.8	0.98	23.52		
5	10	1.00	24.50		$V(5) \approx 24.50$
5.1	10.2	1.02	25.50		
5.2	10.4	1.04	26.52		
5.3	10.6	1.06	27.56		
5.4	10.8	1.08	28.62		
5.5	11	1.10	29.70		
5.6	11.2	1.12	30.80		
5.7	11.4	1.14	31.92		
5.8	11.6	1.16	33.06		
5.9	11.8	1.18	34.22		
6	12	1.20	35.40		$V(6) \approx 35.4$
6.1	12.2	1.22	36.60		
6.2	12.4	1.24	37.82		
6.3	12.6	1.26	39.06		
6.4	12.8	1.28	40.32		
6.5	13	1.30	41.60		
6.6	13.2	1.32	42.90		
6.7	13.4	1.34	44.22		
6.8	13.6	1.36	45.56		
6.9	13.8	1.38	46.92		
7	14	1.40	48.30		$V(7) \approx 48.3$
7.1	14.2	1.42	49.70		
7.2	14.4	1.44	51.12		
7.3	14.6	1.46	52.56		
7.4	14.8	1.48	54.02		
7.5	15	1.50	55.50		
7.6	15.2	1.52	57.00		
7.7	15.4	1.54	58.52		
7.8	15.6	1.56	60.06		
7.9	15.8	1.58	61.62		
8	16	1.60	63.20		$V(8) \approx 63.2$
8.1	16.2	1.62	64.80		
8.2	16.4	1.64	66.42		
8.3	16.6	1.66	68.06		
8.4	16.8	1.68	69.72		
8.5	17	1.70	71.40		
8.6	17.2	1.72	73.10		
8.7	17.4	1.74	74.82		
8.8	17.6	1.76	76.56		
8.9	17.8	1.78	78.32		
9	18	1.80	80.10		$V(9) \approx 80.1$
9.1	18.2	1.82	81.90		
9.2	18.4	1.84	83.72		
9.3	18.6	1.86	85.56		
9.4	18.8	1.88	87.42		
9.5	19	1.90	89.30		
9.6	19.2	1.92	91.20		
9.7	19.4	1.94	93.12		
9.8	19.6	1.96	95.06		
9.9	19.8	1.98	97.02		
10	20	2.00	99.00		$V(10) \approx 99.0$

En la hoja de cálculo hemos señalado los valores que aproximan al volumen en los primeros 10 *enteros, escribimos en la tabla la nueva información.*

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aproximación $v(t)$	0	0.9	3.8	8.7	15.6	24.5	35.4	48.3	63.2	80.1	99

c) Realiza una última mejora en la hoja de cálculo utilizando un intervalo de tiempo de $\Delta t = 0.01$ y registra los valores en la siguiente tabla:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aproximación $v(t)$											

En la hoja de cálculo sustituimos el valor de $\Delta t = 0.01$ *y prolongamos los cálculos con las fórmulas previamente insertadas hasta alcanzar el valor de* $t = 10$*. Copiamos partes del archivo de las que recuperamos los valores de la aproximación del volumen en los primeros* 10 *enteros.*

t	$r(t)$	$r(t)\Delta t$	aproximación de $v(t)$	Δt
0	0	0.0000	Volumen inicial 0	0.01
0.01	0.02	0.0002	0.0000	

0.99	1.98	0.0198	0.9702	
1	2	0.0200	0.9900	$v(1) \approx 0.99$
1.01	2.02	0.0202	1.0100	

1.99	3.98	0.0398	3.9402	
2	4	0.0400	3.9800	$v(2) \approx 3.98$
2.01	4.02	0.0402	4.0200	

2.99	5.98	0.0598	8.9102	
3	6	0.0600	8.9700	$v(3) \approx 8.97$
3.01	6.02	0.0602	9.0300	

3.99	7.98	0.0798	15.8802	
4	8	0.0800	15.9600	$v(4) \approx 15.96$
4.01	8.02	0.0802	16.0400	

4.99	9.98	0.0998	24.8502	
5	10	0.1000	24.9500	$v(5) \approx 24.95$
5.01	10.02	0.1002	25.0500	

5.99	11.98	0.1198	35.8202	
6	12	0.1200	35.9400	$v(6) \approx 35.94$
6.01	12.02	0.1202	36.0600	

6.99	13.98	0.1398	48.7902	
7	14	0.1400	48.9300	$v(7) \approx 48.93$
7.01	14.02	0.1402	49.0700	

7.99	15.98	0.1598	63.7602	
8	16	0.1600	63.9200	$v(8) \approx 63.92$
8.01	16.02	0.1602	64.0800	

8.99	17.98	0.1798	80.7302	
9	18	0.1800	80.9100	$v(9) \approx 80.91$
9.01	18.02	0.1802	81.0900	

9.99	19.98	0.1998	99.7002	
10	20	0.200	99.900	$v(10) \approx 99.90$

Capturamos los valores aproximados del volumen en la siguiente tabla.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aproximación $V(t)$	0	0.99	3.98	8.97	15.96	24.95	35.94	48.93	63.92	80.9	99.9

d) Utiliza ahora la hoja de cálculo para que canceles los decimales de tal modo que obtengas los valores redondeados a enteros, simulando con ello un proceso de aproximación cada vez mejor, a un grado tal que la tendencia de los valores sea el estabilizarse en esos enteros. Registra los valores en la tabla de abajo y observa su relación con el correspondiente t, tratando de identificar un patrón de comportamiento entre los valores de t y los de $V(t)$.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V(t)$											

Observando la hoja de cálculo en los valores enteros de t y quitando los decimales en el valor aproximado del volumen, se infiere un patrón de comportamiento entre t y $V(t)$, a saber, $V(t)=t^2$ pues los valores de $V(t)$ coinciden con los cuadrados de los valores de t.

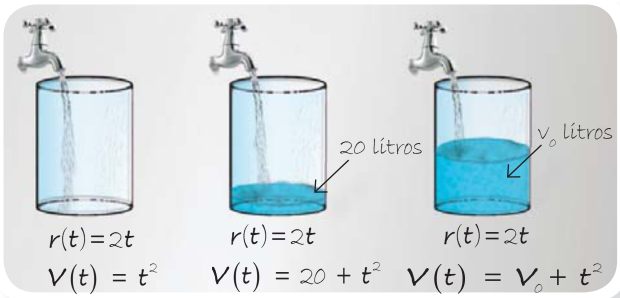
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V(t)$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

e) La función $V(t)$ que hemos reconocido representa la posibilidad de un proceso de mejora llevado a sus últimas consecuencias, de tal modo que puede compactarse en una expresión algebraica.

Hasta ahora, siendo la razón de cambio del volumen modelada por $r(t)=2t$ hemos determinado que el volumen se comporta de acuerdo al modelo $V(t)=t^2$

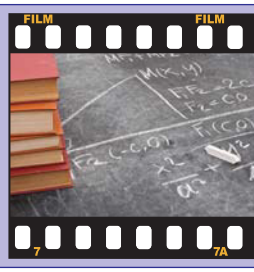
Ahora bien, si suponemos que inicialmente el tanque contaba con 20 litros de agua, ¿qué función representará al volumen a los t minutos? En general, si el volumen inicial en el tanque fuese V_0 litros, ¿qué función modelará el comportamiento del volumen en cualquier tiempo admisible de t?

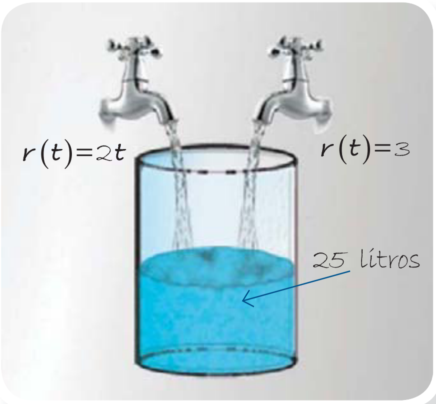
Para cada valor de t, la función $V(t)=t^2$ representa el número de litros acumulado en el intervalo $[0, t]$ pero si inicialmente se tienen 20 litros en el tanque, es de esperarse que el comportamiento del volumen se modele con la función $V(t) = 20 + t^2$ en general, si se denota el volumen inicial como $V(0) = V_0$ podemos proponer la función $V(t) = V_0 + t^2$



¿Sabías que?...

Para el desarrollo de **competencias matemáticas** es recomendable realizar procesos de reflexión donde constantemente estemos forzándonos por integrar información. Esto sugiere una actitud crítica por adelantarse a los hechos y conjeturar, por identificar regularidades o bien, diferencias, por sugerir patrones de comportamiento, por analizar contraejemplos, por sintetizar resultados, por buscar ante todo un sentido en lo que vamos discerniendo. La Matemática es un campo ideal para desarrollar nuestro pensamiento.

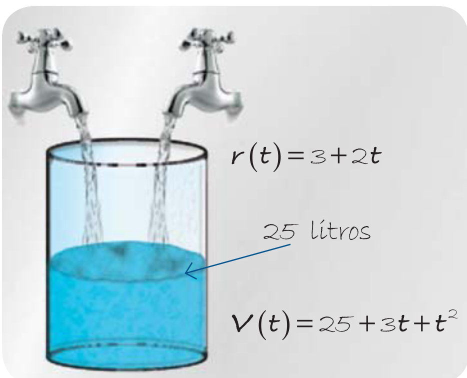




f) Supongamos que en el tanque inicialmente hay 25 litros de agua y que aparte de la llave que aumenta el volumen a razón de $r(t)=2t$ una segunda llave está introduciendo agua también, pero a **razón constante** de 3 litros por minuto. ¿Cuál sería la función que modela el comportamiento del volumen de agua en el tanque a los t minutos?

Si actúa la llave que arroja agua con razón de cambio $r(t)=2t$ litros/minuto e inicialmente hay 25 litros en el tanque, sabemos que el volumen se modela como $V(t)=25+t^2$. La presencia de la otra llave debe afectar esta expresión al aportar un aumento del volumen por su causa. Si esa segunda llave actúa bajo una razón de cambio ***constante****, esto debe provocar un aumento del volumen proporcional al del tiempo, $\Delta V=3\Delta t$ de ahí que su aporte en la expresión del volumen debe ser del tipo que hemos analizado en el tema 1.1, es decir, una expresión lineal, del tipo $3t$. Así, concluimos que tomando en cuenta el efecto de ambas llaves, la función que predice el volumen de agua en el tanque a los t minutos es: $V(t)=25+3t+t^2$.*

Podemos pensar la situación de una forma global de modo que consideremos la presencia de una magnitud (el volumen) cuya razón de cambio con respecto al tiempo es $r(t)=3+2t$. La expresión correspondiente para el volumen, siendo el dato inicial de este 25 litros, es $V(t)=25+3t+t^2$.

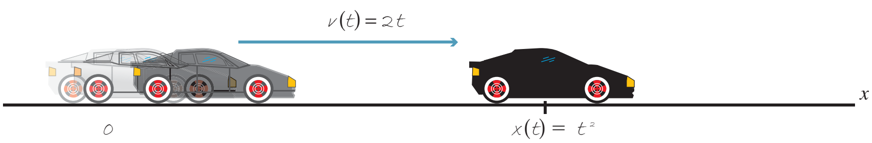


Generalización de la Situación Problema 1.3

En la situación problema que hemos analizado avanzamos en dos direcciones. La primera, es en dar respuesta a la problemática de predicción al construir la función $V(t) = t^2$ en correspondencia con $r(t)=2t$. La segunda, es aumentar al problema la presencia de otra llave que influye en el comportamiento del volumen dada su razón de cambio constante $r(t)=3$. En ambas direcciones vamos a extraer consecuencias importantes para generalizar.

Primera generalización

Vamos a transferir al contexto real del movimiento en línea recta la información obtenida en cuanto al volumen del agua en el tanque. La razón de cambio $r(t)=2t$ es el equivalente de la velocidad $v(t)=2t$; mientras que el volumen $V(t)=t^2$ es el equivalente al cambio de la posición $x(t)=t^2$. En este caso, ese cambio de posición coincide con la distancia recorrida, puesto que la velocidad, comenzando en 0, toma sólo valores positivos.



En esta línea de pensamiento analicemos lo siguiente. Resulta intuitivamente claro pensar que si el objeto en movimiento, en lugar de la velocidad $v(t)=2t$ llevase **la mitad** de esa velocidad en cada instante t, entonces sería de esperarse que recorra **la mitad** de la distancia que había recorrido. Expresado esto con la notación matemática tenemos:

si $v(t)=\frac{2t}{2}=t$ entonces necesariamente $x(t)=\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}t^2$

...la mitad ...la mitad

Por tanto, tenemos nuevas representaciones de la velocidad y posición:

$v(t)=t$ corresponde con $x(t)=\frac{t^2}{2}$ o lo que es lo mismo,

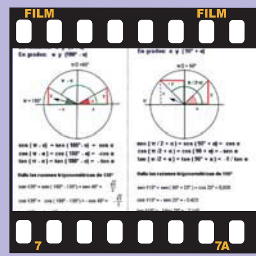
$$v(t)=t \quad \text{corresponde con} \quad x(t)=\frac{1}{2}t^2 .$$

Y ¿qué pasaría si la velocidad fuese **el triple** de la que lleva ahora? Esperaríamos que la posición sea **el triple** de la posición a la que llegaba.

Entonces $v(t)=3t$, corresponde con $x(t)=3\left(\frac{t^2}{2}\right)=\frac{3}{2}t^2$

...el triple ...el triple

¿Sabías que?...



La Matemática cuenta con la peculiaridad de que para interactuar con sus nociones, necesariamente abstractas (no tangibles), requerimos realizar acciones sobre sus representaciones; sea la numérica, la algebraica o bien, la gráfica.

Pero ninguna de estas representaciones, considerada en forma aislada, nos provee de una comprensión cabal de lo que la noción matemática engloba.

Esto plantea una dificultad para su aprendizaje. Es necesario aprender a interactuar con las distintas representaciones y transferir información entre ellas, lo que requiere un proceso cognitivo de un grado superior.

Si a lo anterior agregamos el uso del lenguaje que necesitamos para procesar información, notarás por qué resulta complicado entender qué, cómo, cuándo y dónde aplicar las nociones matemáticas para resolver un problema en un contexto real.

Tener capacidad de aplicar el conocimiento matemático en la solución de problemas en diversos contextos reales exige el desarrollo de una **competencia**; no basta el conocimiento, se requiere más que eso para ser capaz de accionar aquéllos procesos cognitivos que permitan **transferir** información entre las diferentes representaciones matemáticas y el contexto real.

¡TOMA NOTA!

Una razón de cambio constante corresponde con una magnitud representada por el modelo lineal...

Si generalizamos el razonamiento anterior nos preguntamos: ¿qué pasaría si la velocidad fuese "k" veces la que llevaba?

Es de esperarse $\underbrace{v(t)=kt}_{\ldots k \text{ veces}}$ corresponda con $\underbrace{x(t)=k}_{\ldots k \text{ veces}}\left(\frac{t^2}{2}\right)=\frac{k}{2}t^2$

Agregando el dato de la posición inicial tenemos que la velocidad modelada por la función $v(t)=kt$ corresponde con la posición modelada por la función $x(t)=x_0+\frac{k}{2}t^2$.

De manera general, siendo M la magnitud bajo estudio, podemos establecer como un resultado la relación algebraica que existe entre la razón de cambio de una magnitud y la magnitud misma:

La razón de cambio $r(t)=kt$ se corresponde con la magnitud $M(t)=M_0+k\frac{t^2}{2}$,

o lo que es lo mismo $M(t)=M_0+\frac{k}{2}t^2$

Esta relación se agrega a la ya construida en el tema 1.1:

La razón de cambio constante $r(t)=r$ se corresponde con la magnitud $M(t)=M_0+rt$

¡TOMA NOTA!

Una razón de cambio lineal corresponde con una magnitud representada por el modelo cuadrático...

¿Qué sucederá con la razón de cambio... de la razón de cambio... de la magnitud representada por el modelo cuadrático? ¡Será constante!

Una segunda generalización.

Al considerar el contexto real del llenado de un tanque pudimos asociar el efecto de las dos llaves en una sola expresión para $r(t)$ la razón de cambio $r(t)=3+2t$ corresponde con el volumen $V(t)=25+3t+t^2$.
Ahora establecemos de un modo general la relación entre razón de cambio y magnitud de la siguiente manera:

La razón de cambio, modelada por $r(t)=r+kt$ se corresponde con la magnitud modelada por $M(t)=M_0+rt+\frac{k}{2}t^2$.

Se rescata de esta relación un resultado más general:

la suma de razones de cambio (r y kt) se corresponde con una suma de cambios acumulados por cada una de ellas rt y $\frac{k}{2}t^2$ en la representación matemática de la magnitud.

a) Genera una hoja de cálculo en la que desarrolles el procedimiento numérico que hemos realizado para calcular ahora el **Valor aproximado del cambio acumulado** de una magnitud M que depende de la magnitud x y cuya razón de cambio está modelada mediante la función $r(x)=3x^2$. Observa que, nuevamente en este caso, siendo la razón de cambio positiva, el Cambio acumulado de la magnitud en el intervalo $[0, x]$ coincide con el valor de la magnitud en x.

En el archivo debes considerar el valor inicial cero y abarcar los valores de x desde 0 hasta 10 y considerar la longitud del intervalo $\Delta x = 0.01$ de tal modo que puedas identificar un comportamiento de los valores de la magnitud M relacionado con los valores de x. Completa la siguiente tabla y conjetura cuál función modela el comportamiento de la magnitud.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M(x)$											

Una ventaja adicional del recurso de la hoja de cálculo es que nos permite aprovechar el documento que ya hemos armado para la Situación Problema anterior, de modo que basta que en él modifiquemos la fórmula que se inserta en la razón de cambio para que los cálculos se realicen de forma automática. Copiamos en seguida algunas partes de ese archivo que incluyen el cálculo del valor aproximado de la magnitud M en los primeros 10 enteros.

x	$r(x)$	$r(x)\Delta x$	aproximación de $M(x)$	Δx
0	0	0.0000	0.000000	0.01
0.01	0.0003	0.0000	0.000000	
0.99	2.9403	0.0294	0.955647	
1	3.0000	0.0300	0.985050	
1.01	3.0603	0.0306	1.015050	
1.99	11.8803	0.1188	7.821297	
2	12.0000	0.1200	7.940100	
2.01	12.1203	0.1212	8.060100	
2.99	26.8203	0.2682	26.596947	
3	27.0000	0.2700	26.865150	
3.01	27.1803	0.2718	27.135150	
3.99	47.7603	0.4776	63.282597	
4	48.0000	0.4800	63.760200	
4.01	48.2403	0.4824	64.240200	

4.99	74.7003	0.7470	123.878247
5	75.0000	0.7500	124.625250
5.01	75.3003	0.7530	125.375250

5.99	107.6403	1.0764	214.383897
6	108.0000	1.0800	215.460300
6.01	108.3603	1.0836	216.540300

6.99	146.5803	1.4658	340.799547
7	147.0000	1.4700	342.265350
7.01	147.4203	1.4742	343.735350

7.99	191.5203	1.9152	509.125197
8	192.0000	1.9200	511.040400
8.01	192.4803	1.9248	512.960400

8.99	242.4603	2.4246	725.360847
9	243.0000	2.4300	727.785450
9.01	243.5403	2.4354	730.215450

9.99	299.4003	2.9940	995.506497
10	300.0000	3.000	998.500500

Capturamos ahora los cálculos obtenidos en la tabla:

x	0	1	2	3	4	5
Aprox. $M(x)$	0	0.98505	7.9401	26.86515	63.76020	124.62525
x		6	7	8	9	10
Aprox. $M(x)$		215.46030	342.26535	511.0404	727.78545	998.5005

Al observar la tendencia de estos valores, y pensando que se acercan más a un valor entero mayor, cada vez que se refinan los cálculos al considerar un Δx más pequeño, podemos visualizar en la tabla anterior los valores:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M(x)$	0	1	8	27	64	125	216	343	512	728	999

*También podemos observar que, salvo el caso de $x=9$ y $x=10$, los valores de $M(x)$ coinciden con **el cubo** (potencia 3) del valor correspondiente de x, de hecho en estos dos casos la coincidencia no se da por la diferencia de una unidad.*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M(x)$	0	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3 $=729$	10^3 $=1000$

Si pensamos en la posibilidad de mejorar aún más los cálculos aproximados tomando un Δx menor a 0.01, podemos conjeturar que la función que modela el comportamiento de la magnitud es $M(x)=x^3$ en correspondencia con la razón de cambio $r(x)=3x^2$.

b) Modifica el archivo que has generado en el inciso anterior para considerar ahora la razón de cambio de la magnitud como $r(x)=4x^3$. Completa la siguiente tabla e identifica mediante una función el comportamiento de la magnitud.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M(x)$											

Modificamos en el archivo anterior la fórmula de la razón de cambio como $r(x)=4x^3$ y obtenemos los siguientes renglones que entresacamos del archivo:

x	$r(x)$	$r(x)\Delta x$	Aproximación de $M(x)$	Δx
0	0	0	0	0.01
1	4	0.04	0.9801	
2	32	0.32	15.8404	
3	108	1.08	80.4609	
4	256	2.56	254.7216	
5	500	5	622.5025	
6	864	8.64	1291.6836	
7	1372	13.72	2394.1449	
8	2048	20.48	4085.7664	
9	2916	29.16	6546.4281	
10	4000	40	9980.01	

En el afán de encontrar una relación entre los valores aproximados de $M(x)$ y x decidimos utilizar un valor de Δx menor a 0.01, modificamos el archivo tomando $\Delta x = 0.005$ y de ese archivo obtenemos los valores que reportamos en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5
Aprox. $M(x)$	0	0.990025	15.9201	80.730225	255.3604	623.750625
x		6	7	8	9	10
Aprox. $M(x)$		1293.8409	2397.571225	4090.8816	6553.712025	9990.0025

Cuando utilizamos $\Delta x = 0.001$ observamos aún mejor la tendencia de estos valores; capturamos los datos de la hoja de cálculo en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5
Aprox. $M(x)$	0	0.998001	15.984004	80.946009	255.872016	624.750025
x		6	7	8	9	10
Aprox. $M(x)$		1295.568036	2400.314049	4094.976064	6559.542081	9998.0001

Vale la pena hacer una comparación con la siguiente tabla donde hemos colocado los valores de la potencia cuarta de los primeros 10 enteros:

x	0	1	2	3	4	5
$M(x)$	0	$1^4 = 1$	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 265$
x		6	7	8	9	10
$M(x)$		$6^4 = 1296$	$7^4 = 2401$	$8^4 = 4096$	$9^4 = 6561$	$10^4 = 10000$

Es clara la tendencia a estos valores en los primeros diez enteros cuando aplicamos el procedimiento numérico a la razón de cambio $r(x) = 4x^3$ y considerando Δx cada vez más y más pequeño en la hoja de cálculo.

c) A partir de los resultados en los incisos anteriores conjetura cuál función modelará el comportamiento de la magnitud si la razón de cambio fuese $r(x)=5x^4$.

Si $r(x)=2x$ *corresponde con* $M(x)=x^2$ ...

y $r(x)=3x^2$ *corresponde con* $M(x)=x^3$ ...

y $r(x)=4x^3$ *corresponde con* $M(x)=x^4$ ...

es de esperarse que

$r(x)=5x^4$ *corresponda con* $M(x)=x^5$ ...

d) Reconsidera el modelo lineal discutido en el tema 1.1 para integrar el caso en que la razón de cambio sea constante con el tipo de correspondencia que estamos identificando en los nuevos modelos.

Sabemos que la razón de cambio constante $r(x)=r$ *se corresponde con la magnitud* $M(x)=M_0+rx$.

En el caso en que el valor inicial sea $0=M_0$ *tenemos que* $r(x)=r$ *se corresponde con la magnitud* $M(x)=rx$ *Y si además de esto se tuviese que* $r=1$ *entonces tenemos que* $r(x)=1$ *se corresponde con* $M(x)=x$.

Finalmente nos resta considerar el caso más particular en que $r=0$.

Este resulta ser un caso intuitivamente claro en el siguiente sentido: si la razón de cambio de una magnitud fuese 0, *esto estaría expresando que* ***no hay cambio*** *en la magnitud y si no lo hay quiere decir que la magnitud conserva siempre un mismo valor.*

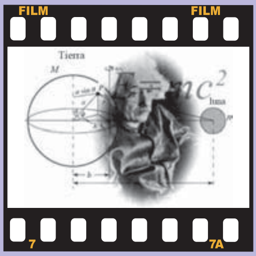
Matemáticamente podemos representarlo como $M(x)=M_0$ *o bien,* $M(x)=c$ *donde la letra* c *recuerda que estamos ante una magnitud que se mantiene constante, y en este caso* $r(x)=0$.

Hemos agregado a nuestro conocimiento que

$r(x)=1$ *corresponde con* $M(x)=x$

$r(x)=0$ *corresponde con* $M(x)=c$ *(constante)*

¿Sabías que?...



La historia de las Matemáticas nos muestra un "ir y venir" entre diferentes tipos de periodos.

En unos de ellos nos interesa descubrir y proponer nociones y procedimientos que, al aplicarse en la realidad problemática que les inspira y obtener buenos resultados, adquieren validez y permanecen.

Otros periodos, en cambio, están marcados por una actitud de reflexión en los fundamentos teóricos de las nociones y procesos que justifiquen su existencia en la teoría matemática.

Ha sido de este modo que la convivencia entre *intuición* y *rigor*, *particularidad* y *generalidad*, *conjetura* y *teorema*, juega un papel determinante para la construcción del conocimiento matemático.

Comprender el Cálculo exige tener conciencia de esto e interactuar con él usando la intuición, pero no dejando de lado el análisis y la reflexión teórica.

Desde los mismos griegos la problemática de lo infinito, lo continuo, lo medible, ha estado presente en la humanidad... y es necesario que nuestro intelecto tenga que debatirse con estas ideas al comprender el Cálculo y sus alcances.

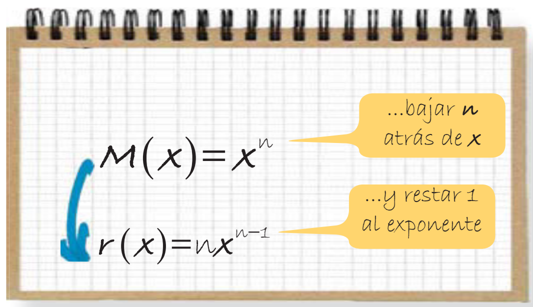
Generalización: procedimientos algorítmicos

Una nueva generalización surge del problema complementario que acabamos de discutir si observamos con detenimiento los exponentes y coeficientes en las expresiones matemáticas recientes.

Cuando la función que representa a la magnitud tiene la forma del tipo “variable x elevada a potencia natural”, escrito en lenguaje algebraico, $M(x)=x^n$ donde $n=1,2,3,\ldots$ se tiene que su razón de cambio tiene la forma $r(x)=n\,x^{n-1}$.

Si lo visualizamos de esta manera, podemos inducir un procedimiento algorítmico para encontrar la razón de cambio cuando la magnitud está modelada como la potencia de x (la magnitud de la que depende).

Con un procedimiento algorítmico nos referimos a un conjunto ordenado y finito de acciones algebraicas aplicadas a la función que modela a la magnitud y que permiten llegar a expresar la fórmula de la razón de cambio. En seguida lo proponemos.



Este procedimiento algorítmico relaciona algebraicamente a la razón de cambio con la magnitud, de modo que podemos “derivar” rápidamente la razón de cambio conociendo que la magnitud se modela con la función potencia de x. Entrecomillamos la palabra derivar porque lo que queremos con ella ahora es hacer alusión a cierto significado coloquial de “conducir algo de una parte a otra”. La expresión matemática de la razón de cambio se “deriva” de la expresión matemática de la magnitud.

Posteriormente habrá la ocasión de revisar la noción de derivada desde el punto de vista de concepto matemático formal; sin embargo, la fluidez del manejo del procedimiento algorítmico de “derivar” nos permitirá en este momento avanzar en el estudio de la problemática de predicción y en el manejo de un lenguaje simbólico accesible.

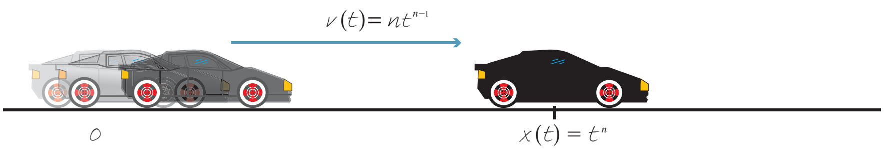
Proponemos transferir a la simbología matemática formal una síntesis de la información que hemos obtenido a partir de interactuar con el contexto real de una magnitud y su razón de cambio:

Dada la función potencia natural $f(x)=x^n$ con $n=1,2,3,\ldots$ $n\in\mathbb{N}$

la función derivada de ella es $f'(x)=n\,x^{n-1}$

Por otra parte, conviene que nos traslademos nuevamente al contexto real del movimiento en línea recta, donde nuestras expresiones matemáticas evocan las magnitudes de posición y velocidad del objeto en movimiento, en este contexto reconoceremos un nuevo resultado.

Pensemos que la magnitud $M(x)=x^n$ se está refiriendo a la posición del objeto en la recta en que se mueve, entonces debemos escribir $x(t)=t^n$. Por su parte $r(x)=nx^{n-1}$ se está refiriendo a la velocidad variable que lleva el objeto; esto lo escribimos como $v(t)=nt^{n-1}$.



Recordemos nuestro primer resultado surgido de haber utilizado la hoja de cálculo:

Cuando la velocidad se modela con $v(t)=2t$
el comportamiento de la posición se modela con $x(t)=t^2$.

En ese momento planteamos que:
si la velocidad del objeto fuese **la mitad** de la que llevaba,

esto es, si $v(t)=\dfrac{2t}{2}=t$,

entonces la posición que alcanzaría sería también **la mitad** de la que alcanzaba antes,

esto es, $x(t)=\dfrac{t^2}{2}$.

Siguiendo con este mismo pensamiento trabajemos con el caso en que $v(t)=3t^2$:

Sabemos que $v(t)=3t^2$	**corresponde con** $x(t)=t^2$
Pero si pensamos que la velocidad fuese la **tercera parte** de lo que llevaba antes...	...entonces la posición que alcanzaría el objeto sería también la **tercera parte** de la que alcanzaba antes...
Esto es, si $v(t)=\dfrac{3t^2}{3}=t^2$	entonces $x(t)=\dfrac{t^3}{3}$

Y en el caso en que $v(t) = 4t^3$

Sabemos que $v(t)=4t^3$	**corresponde con** $x(t)=t^4$
Pero si la velocidad fuese la **cuarta parte** de lo que llevaba antes...	...entonces la posición que alcanzaría el objeto sería también la **cuarta parte** de la que alcanzaba antes...
Esto es, si $v(t)=\dfrac{4t^3}{4}=t^3$	entonces $x(t)=\dfrac{t^4}{4}$

Puedes ser que ya esperes el siguiente recuadro ...

Sabemos que $v(t)=5t^4$	**corresponde con** $x(t)=t^5$
Pero si la velocidad fuese la **quinta parte** de lo que llevaba antes...	... entonces la posición que alcanzaría sería también la **quinta parte** de la que alcanzaba antes...
Esto es $v(t)=\dfrac{5t^4}{5}=t^4$	Esto es $x(t)=\dfrac{t^5}{5}$

Y ahora podemos identificar un patrón de comportamiento y reconocer una expresión en general:

Cuando la velocidad se modela con:

$$v(t) = t^n$$

el comportamiento de la posición se modela con:

$$x(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Por otra parte, el mismo razonamiento que hemos hecho sobre afectar la velocidad por un factor que le multiplica $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ puede realizarse en general; de hecho, si la velocidad $v(t)=t^n$ la multiplicamos por un factor k (piensa en el doble, el triple…), esto es $v(t)=kt^n$ entonces, la posición deberá verse afectada por ese mismo factor (será el doble, el triple…), es decir, $x(t)= k\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$.

Esta última expresión, transferida al contexto real de una magnitud y su razón de cambio se ve así:

$r(x) = k x^n$ corresponde con $M(x) = k\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Al observar el recuadro anterior podemos identificar un segundo procedimiento algorítmico, pero ahora para encontrar a la magnitud a partir de su razón de cambio. Se trata de identificar las acciones algebraicas por realizar en la función matemática que modela a la razón de cambio y que permitan expresar la fórmula de la magnitud. En seguida lo proponemos, observa que el proceso parte de la razón de cambio de abajo y culmina arriba, en la magnitud.

...y se divide entre el nuevo exponente

$$M(x) = k\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$r(x) = k\,x^{n}$$

...al exponente se le suma 1

...el factor constante se conserva en su lugar

Una nota importante: Este procedimiento algorítmico que relaciona algebraicamente a la magnitud a partir de su razón de cambio, es el mismo procedimiento que antes llamamos "derivar", sólo que está revertido, esto es, su aplicación está hecha de tal forma que, al derivar la magnitud obtenida se regrese a la razón de cambio original.

Comprobemos que así es: vamos a derivar

$$M(x) = k\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

...esto es un factor constante $\frac{k}{n+1}$

...multiplicado por una función potencia natural

$$M(x) = k\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{k}{n+1}\,x^{n+1}$$

...la constante se conserva como factor

...al exponente se le resta 1

derivamos

$$r(x) = \frac{k}{n+1}(n+1)\,x^{(n+1)-1}$$

...se baja el exponente

$$= \frac{k}{\cancel{n+1}}(\cancel{n+1})\,x^{n}$$

...se cancelan los factores

$$= kx^{n}$$

...y ya recuperamos la razón de cambio

Este hecho motiva que llamemos al procedimiento algorítmico (de razón de cambio a magnitud) **antiderivar**, en el sentido de que la expresión que se obtiene,

$$M(x)=k\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

es tal que su **derivada** es justamente

$$r(x)=k\,x^{n}.$$

Estamos visualizando a $r(x)$ como la derivada de otra expresión matemática y al aplicar el procedimiento encontramos aquella expresión cuya derivada es $r(x)$. . .

. . . por eso se dice que estamos encontrando la "antiderivada" de $r(x)$.

Transferimos nuevamente esta nueva información proveniente del contexto real donde consideramos una magnitud y su razón de cambio, hasta arribar a la simbología matemática formal:

Dada la función potencia natural

$$f(x)=kx^{n} \text{ con } n=1,2,3,\ldots, \text{ esto es } n\in\mathbb{N}$$

la función **antiderivada** de ella es

$$F(x)=k\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Podemos finalmente englobar en el siguiente recuadro ambos **procesos algorítmicos**: derivar y antiderivar.

Al centro se tiene la función potencia natural que es el modelo matemático que puede ser utilizado como representación de una cierta magnitud, pero también puede ser utilizado como la representación de la razón de cambio de cierta magnitud.

$$F(x)=k\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

antiderivada

$$f(x)=kx^{n}$$

derivada

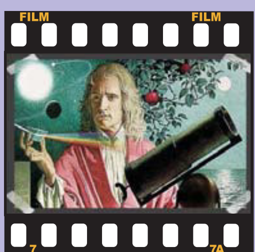
$$f'(x)=kn\,x^{n-1}$$

Ejemplificamos el uso de estos procesos algorítmicos con una función particular. Observa la función al centro y aplica a ella los dos procedimientos algorítmicos:

¿Sabías que?...

Las nociones de *derivada* y *antiderivada* forman el núcleo del Cálculo. Es a partir del ingenio de Newton (1642-1727) que la problemática de predecir valores de magnitudes se ve resuelta desde la perspectiva de concebir que la acumulación de una cantidad y la razón de cambio de su acumulación están íntimamente relacionadas.

Newton, sin definir formalmente estas nociones, en su Método de las fluxiones (y fluentes), abordó el problema de calcular la velocidad a partir de la posición e inversamente, calcular la posición a partir de la velocidad. Los procesos algorítmicos de derivar y antiderivar la función potencia natural eran practicados por él con su propia simbología.



antiderivamos

derivamos

$$F(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{x^8}{8}\right)=\frac{1}{24}x^8$$

$$f(x)=\frac{x^7}{3}=\frac{1}{3}x^7$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(7x^6\right)=\frac{7}{3}x^6$$

Aprovechamos la ocasión de este ejercicio para observar que cuando antiderivamos pudimos haber agregado una constante sumando a la expresión de $F(x)$, por ejemplo si $F(x)=\frac{x^8}{24}+5$ también se obtiene que su derivada es la misma $f(x)=\frac{x^7}{3}$ ya que la derivada de la constante 5 es 0 Esto nos advierte de la necesidad de agregar la suma de una constante al procedimiento algorítmico de antiderivación. Esta constante juega aquí el papel del valor inicial de la magnitud que se está reconstruyendo al antiderivar.

Ejemplifiquemos nuevamente los procesos con el agregado de la constante en la antiderivada, por lo cual es común referirse a una "familia" de antiderivadas para una misma función $f(x)$:

antiderivar

derivar

$$F(x)=\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{x^{11}}{11}\right)+c=\frac{3}{110}x^{11}+c,$$

c constante

$$f(x)=\frac{3x^{10}}{10}=\frac{3}{10}x^{10}$$

$$f'(x)=\left(\frac{3}{10}\right)\left(10x^9\right)=3x^9$$

¡Toma nota!

El lenguaje simbólico admite formas de expresión que "a simple vista" parecen diferentes... pero en realidad representan lo mismo...

Observa:

$$x=x^1$$

$$1=x^0\quad(x\neq 0)$$

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x$$

Observa:

$$(x+1)(x-1)=x^2-1$$

$$\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$$

$$k\frac{x}{2}=\frac{k}{2}x=\frac{kx}{2}$$

Observa:

$$-\frac{x}{2}=\frac{-x}{2}=\frac{x}{-2}$$

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{x}=x^{-1}$$

Observa:

$$(x+1)^2=x^2+2x+1$$

$$x^5x^3=x^8$$

$$\frac{x^5}{x^2}=x^3$$

$$(x^5)^2=x^{10}$$

Modelo matemático polinomial

Hemos definido la función potencia natural como $f(x)=kx^n$, expresión que contempla el producto del factor k por el término x^n. Es común representar esta función simplemente como $y=kx^n$, lo que expresa la relación de proporcionalidad directa entre la variable y y x^n.

Hemos reconocido además que cuando una razón de cambio involucra la suma de dos términos, la representación matemática para la magnitud se ve afectada por la suma de dos términos, uno proveniente de cada uno de los términos en la razón de cambio.

Este resultado lo apoyamos de un modo intuitivo por la interacción con el contexto real del llenado de un tanque, donde la acción de dos llaves se "suma" y aparece en ambas representaciones, en la de la razón de cambio y en la de la magnitud. Tal fue el caso cuando relacionamos

$$r(t)=3+2t \quad \text{con} \quad V(t)=25+3t+t^2.$$

Estas observaciones nos permiten definir en el contexto formal a la **función polinomial** como el modelo matemático que se forma con la suma de términos de tipo potencia natural.

La función $y=p(x)$ se conoce como función polinomial si es la suma de términos del tipo kx^n con k número real, $k \in \mathbb{R}$ y n número natural, $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, $$y=p(x)=\frac{3}{7}x^5+6x^4-\frac{x^3}{2}-x+12$$

Se entiende por el **grado** de la función polinomial al mayor exponente que aparece en los términos que forman a la función. En el ejemplo, el grado es 5.

¡TOMA NOTA!

En la expresión formal de la **función** matemática se acostumbra usar la letra f recordando la palabra función.

En los contextos reales es común utilizar alguna letra apropiada para asociar con un significado real a las variables.

Por ejemplo $y=T(x)$ para evocar temperatura en un punto de una barra, o $y=C(t)$ para evocar costo en función del tiempo, o bien $y=\theta(x)$ para evocar un ángulo en términos de cierta longitud x.

Es común encontrar también que no se ponga la variable y y se refiera a la función como: $T=T(x)$, $C=C(t)$, $\theta=\theta(x)$.

En este tema hemos establecido resultados sobre la derivada y antiderivada de la función polinomial; para eso tomamos como sustento el significado asociado a un contexto real y el uso del recurso tecnológico de la hoja de cálculo. De esta forma reconocimos que la derivada de la función polinomial es también una función polinomial de un grado menor, y que la antiderivada es también función polinomial pero de un grado mayor. En el ejemplo propuesto se tiene:

antiderivar

$$P(x)=\frac{3}{42}x^6+\frac{6}{5}x^5-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^2+12x+C$$

$$y=p(x)=\frac{3}{7}x^5+6x^4-\frac{x^3}{2}-x+12$$

derivar

$$p'(x)=\frac{15}{7}x^4+24x^3-\frac{3}{2}x^2-1$$

En general, se acostumbra expresar la **función polinomial** así:

$$y=p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$$

donde las constantes denotadas por a_i se conocen como coeficientes de cada término de la función.

Los resultados de este tema se resumen en la siguiente imagen que muestra los **procesos algorítmicos de derivación y antiderivación de la función polinomial.**

antiderivar

$$F(x)=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+a_3\frac{x^4}{4}+\ldots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$$

derivar

$$f(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1}$$

¡TOMA NOTA!

La notación formal de una función, como $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ involucra varias letras que representan números, además de la letra x que representa a la **variable** de la que depende la función.

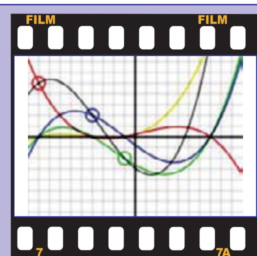
La **variable** de la que depende la función es justo la que se declara dentro del paréntesis en la notación $f(x)$.

Los números a_i que aparecen en cada uno de los términos de la función $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ suelen representar información importante del fenómeno que la función modela, se les conoce como **parámetros**.

¿Sabías que?...

La interpolación polinómica es un método que se utiliza para conocer valores aproximados de una función matemática de la cual se conoce solamente un número finito de puntos. Estos puntos representan datos $(x,\ y)$ que han sido obtenidos al medir la variación de una magnitud representada por y.

El polinomio interpolador puede construirse con diferentes métodos que buscan que al evaluarle en los datos de x se obtengan los correspondientes valores de y.



Encuentra la derivada y la antiderivada de las siguientes funciones. Observa que en ocasiones deberás realizar algunas operaciones algebraicas en la función dada hasta llevarla a la forma $f(x)$ que aparece en el centro del resultado anterior.

Podrás comprobar tus tespuestas comparando con las dadas al final de este tema.

1.

Antiderivada	
Función	$f(x) = -\frac{7}{2}x + 2$
Derivada	

2.

Antiderivada	
Función	$f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + x + 1$
Derivada	

3.

Antiderivada	
Función	$f(x) = 10 + 100x + 1\,000x^2$
Derivada	

4.

Antiderivada	
Función	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$
Derivada	

5.

Antiderivada	
Función	$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$
Derivada	

6.

Antiderivada	
Función	$f(x) = \frac{2x^5}{5} + 10x^{10} - 1$
Derivada	

7.

Antiderivada	
Función	$f(x) = x^5\left(3x^3 + 5x^8 + 7x^7\right)$
Derivada	

8.

Antiderivada	
Función	$f(x) = \frac{x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2}{x}$
Derivada	

9.

Antiderivada	
Función	$f(x)=a+bx+cx^2$
Derivada	

10.

Antiderivada	
Función	$f(x)=a+bx+\frac{1}{c}x^2+\frac{a}{b}x^3+a_nx^n$
Derivada	

11.

Antiderivada	
Función	$y=\left(a+bx+cx^2\right)\left(x^3+d\right)$
Derivada	

12.

Antiderivada	
Función	$y=ax+a^2x^2+a^3x^3+a^4x^4$
Derivada	

13.

Antiderivada	
Función	$y = \dfrac{a_2x^2 + a_3x^3 + a_6x^6}{x^2}$
Derivada	

14.

Antiderivada	
Función	$y = a\left(x + x^2 + x^3\right) + b\left(x + x^2\right) + c$
Derivada	

15.

Antiderivada	
Función	$y = \dfrac{1}{k} + \dfrac{x}{k^2} + \dfrac{x^2}{k^3} + \dfrac{x^3}{k^4}$
Derivada	

16.

Antiderivada	
Función	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots + a_nx^n$
Derivada	

Volvamos al problema original: predecir el cambio

Una vez que hemos ganado familiaridad con los procesos de derivación y antiderivación, conviene regresar a nuestro problema original y utilizar el lenguaje simbólico y técnico que hemos generado para predecir el cambio.

Las generalizaciones que hemos hecho provienen todas de haber considerado como conocida la razón de cambio $r(x)$ de una magnitud $M(x)$ que interesa estudiar.

¿Cómo procedimos para determinar el modelo matemático que representa a esta magnitud?

Para eso consideramos los valores aproximados de $M(x)$ calculados con el procedimiento numérico implementado en la hoja de cálculo para los primeros 10 enteros, pero sobre todo, razonamos en la eficacia de un procedimiento de mejora en dichas aproximaciones a través de hacer Δx cada vez más pequeño (tendiente a 0). De este modo fue como pudimos relacionar la expresión matemática de la razón de cambio con la expresión matemática de la magnitud.

El **Cambio Acumulado** por la magnitud en un intervalo dado de variación de x, digamos, en el intervalo $[a, b]$, se expresa como $\Delta M\,[a, b]$.

Hemos calculado valores aproximados a ese Cambio Acumulado subdividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos y suponiendo que la razón de cambio se mantiene constante en cada uno de esos subintervalos.

Esto se representa mediante la sumatoria

$$\Delta M\left[a, b\right] \approx \sum_{i=1}^{n} r\left(x_{i-1}\right)\Delta x$$

La certeza de llegar al valor exacto de ese Cambio Acumulado ha sido a través del recurso tecnológico (hoja de cálculo) que nos permitió la identificación de la expresión matemática que se construye al llevar esa sumatoria a sus “últimas consecuencias”. De este modo hemos generado la función **antiderivada**.

El **Cambio Acumulado** de la magnitud puede entonces calcularse como la resta de valores en esa función **antiderivada**, función que queda completamente determinada salvo por el valor de la constante C que se suma en la expresión obtenida.

Ejemplifiquemos:

Si la magnitud bajo estudio es tal que su razón de cambio es proporcional al cuadrado de la magnitud de la que depende, por ejemplo, que sea

$$r(x) = 4\pi x^2$$

calculemos el cambio que acumula la magnitud M en el intervalo de $x=2$ a $x=3$ esto es, $\Delta M\left[2, 3\right]$.

A partir de $r(x) = 4\pi x^2$ ya sabemos construir la antiderivada, que está dada por

$$R(x) = 4\pi\frac{x^3}{3} + C$$

donde la constante C es arbitraria.

¿Sabías que?...

Las **funciones polinomiales** son **continuas**.

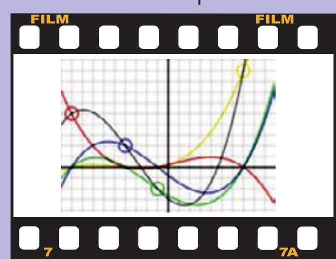
Este resultado teórico establece que cuando se tienen valores cercanos de $\boldsymbol{x}$, los valores $\boldsymbol{y}$ de la función evaluada en ellos, también son valores cercanos entre sí... y mientras más cercanos estén los valores de $\boldsymbol{x}$, más cercanos estarán los correspondientes de $\boldsymbol{y}$.

Esta propiedad de continuidad resulta natural cuando pensamos en que la noción de la función está reflejando lo que el hombre estudia de la naturaleza.

Si la problemática es predecir valores de magnitudes que están cambiando, la observación sugiere que si la magnitud $\boldsymbol{y}$ depende de $\boldsymbol{x}$, valores de $\boldsymbol{x}$ cercanos provocan valores cercanos en la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$, es así como esperamos que se comporte la temperatura, la distancia o el volumen.

Una vez que hemos aceptado que la derivada de una función polinomial es otra función polinomial (de un grado menor), podemos utilizar la propiedad de continuidad de la derivada de la función y con ello apoyar la suposición que hemos estado haciendo sobre la razón de cambio (*derivada*) de una magnitud (*función*).

Nos estamos refiriendo a que en el procedimiento numérico que hemos implementado para aproximar el cambio que experimenta una magnitud, hemos supuesto que la razón de cambio se mantuviese **constante** en intervalos pequeños de variación de la magnitud de la que depende... ciertamente, la continuidad de la razón de cambio (siendo función polinomial) garantiza teóricamente esta suposición.



¿Sabías que?...

El volumen de una esfera se calcula con la fórmula

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

mientras que el área superficial con la fórmula

$$A=4\pi r^2 .$$

De cierta manera podemos visualizar a la razón de cambio del volumen de la esfera como el área superficial de la esfera… intenta imaginar un proceso de "engrosar" la esfera con capas de área superficial a modo de cascarones delgados que se van conteniendo entre sí.

Imaginándolo así, al antiderivar

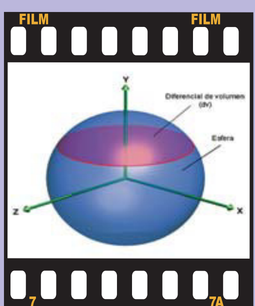
$A=4\pi r^2$ obtenemos $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ como la "acumulación del cambio de volumen" y a su vez, al derivar $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ obtenemos $A=4\pi r^2$ como la "razón de cambio del volumen".

Si piensas ahora en que la razón de cambio del área de un círculo es su perímetro,

$$P=2\pi r ,$$

puedes llegar a la fórmula del área del círculo antiderivando el perímetro:

$$A=2\pi\frac{r^2}{2}=\pi r^2 .$$



El cambio de la magnitud en $[0, 3]$ está representado por $R(3)$ y el cambio de la magnitud en $[0, 2]$ está representado por $R(2)$, por tanto

$$\Delta M[2, 3]=R(3)-R(2)$$

$$=\left[\frac{4\pi}{3}(3)^3+C\right]-\left[\frac{4\pi}{3}(2)^3+C\right]$$

$$=\frac{4\pi}{3}(27)+\cancel{C}-\frac{4\pi}{3}(8)-\cancel{C}$$

$$=\frac{4\pi}{3}(27-8)=\frac{4\pi}{3}(19)=\frac{76}{3}\pi$$

Observamos que haber colocado un valor particular a la constante C no hubiera afectado la respuesta; es por eso que la práctica común para calcular el Cambio Acumulado de la magnitud en el intervalo $[a, b]$ consiste en encontrar una antiderivada de la razón de cambio $r(x)$ y restar los valores en b y en a calculados mediante esa antiderivada $R(x)$

$$\Delta M[a,b]=R(b)-R(a)$$

Una observación importante en la notación

En el momento en que la magnitud M se representa con la variable y, siendo $y=f(x)$, resulta que la razón de cambio de ella se denota por $f'(x)$. En esa situación, la expresión $\Delta M[a,b]=R(b)-R(a)$ se vería de esta manera:

$$\Delta f[a,b]=f(b)-f(a)$$

donde $f(x)$ estaría representando a la antiderivada de $f'(x)$.

Tenemos entonces el detalle de que, usando esta notación, estamos denotando con $f(b)$ y $f(a)$ a la evaluación de **cualquier antiderivada** de $f'(x)$ y no necesariamente a la función que modele de manera precisa a la magnitud, aquélla que cumple con la condición inicial representada por el valor de la constante C en el caso polinominal.

Terminamos este tema resolviendo problemas en el contexto formal, utilizando los resultados y simbología aprendidos.

Problema 1.

Dada la razón de cambio de la función $f(x)$: $f'(x) = 1 + x + x^2$, realiza los siguientes incisos.

a) Construye la función $y = f(x)$ sabiendo que $f(0) = 2$.

Conociendo la razón de cambio $f'(x) = 1 + x + x^2$ *vamos a antiderivar para construir* $y = f(x)$

$$y = f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$$

Falta conocer el valor de c, *lo que obtendremos del dato* $f(0) = 2$ *al sustituir* $x = 0$ *en* $y = f(x)$

$$2 = f(0) = 0 + \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3} + c$$

por tanto $c = 2$ *y así*

$$y = f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 2$$

b) Calcula el cambio acumulado de la función en el intervalo $[0, 1]$ y también en el intervalo $[1, 2]$.

Calculamos

$$\begin{aligned}\Delta f[0,\ 1] &= f(1) - f(0)\\ &= \left(1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} + 2\right) - (2)\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6}\end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}\Delta f[1,\ 2] &= f(2) - f(1)\\ &= \left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + 2\right) - \left(1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} + 2\right)\\ &= \left(6 + \frac{8}{3}\right) - \left(3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\\ &= \left(\frac{18+8}{3}\right) - \left(\frac{18+3+2}{6}\right)\\ &= \frac{26}{3} - \frac{23}{6} = \frac{52-23}{6} = \frac{29}{6}\end{aligned}$$

Se observa un cambio mayor en el intervalo $[1, 2]$ *comparado con el obtenido en* $[0, 1]$.

c) Verifica la siguiente igualdad que expresa un hecho sobre la suma de cambios acumulados. Este hecho resulta natural en el contexto del Cambio Acumulado:

$$\Delta f[0,\ 2] = \Delta f[0,\ 1] + \Delta f[1,\ 2]$$

Calculamos por un lado que:

$$\begin{aligned}\Delta f[0,2] &= f(2) - f(0)\\ &= \left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + 2\right) - (2)\\ &= 4 + \frac{8}{3} = \frac{12+8}{3} = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

Por otro lado, sumamos los cambios:

$$\Delta f[0,1] + \Delta f[1,2] = \frac{11}{6} + \frac{29}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

Como ambos cálculos dan el mismo valor, queda verificado que:

El cambio que acumula una magnitud $y = f(x)$ en un intervalo $[a,\ b]$ de variación de x, puede calcularse a través de la suma de los cambios acumulados en dos subintervalos que conforman $[a,\ b]$.

Expresamos matemáticamente este resultado:

siendo $c \in [a, b]$ se tiene que

$$\Delta M[a,\ b] = \Delta M[a,\ c] + \Delta M[c,\ b].$$

Problema 2.

Calcula $\Delta f[-1, 1]$ *siendo* $f'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}$

Debemos encontrar la antiderivada de $f'(x)$ *aplicando el procedimiento algorítmico:*

Como $f'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3$

entonces $F(x) = -\frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C$

$$= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + C$$

Independientemente del valor de C, *calculamos el Cambio Acumulado:*

$$\Delta f[-1, 1] = f(1) - f(-1)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}(1)^2 + \frac{1}{9}(1)^3 - \frac{1}{16}(1)^4 + C\right) - \left(-\frac{1}{4}(-1)^2 + \frac{1}{9}(-1)^3 - \frac{1}{16}(-1)^4 + C\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) = \frac{2}{9}$$

por tanto, $\Delta f[-1, 1] = \frac{2}{9}$

Problema 3.

La razón de cambio de y con respecto a x es directamente proporcional a la cuarta potencia de x. La constante de proporcionalidad es 5. Si el valor de y cuando $x = 2$ es 100, ¿cuánto vale y en $x = 6$?

Para predecir el valor de y *en* $x = 6$ *haremos uso de la expresión*

$$y(6) = y(2) + \text{Cambio Acumulado en}[2, 6]$$

$$y(6) = y(2) + \Delta y[2, 6]$$

$$= 100 + \Delta y[2, 6]$$

Por su parte, el cambio acumulado de y *lo calcularemos a partir de su razón de cambio.*

Por la información dada, $y'(x) = 5x^4$ *al ser proporcional a la cuarta potencia de* x.

Por tanto, antiderivando $y(x) = 5\dfrac{x^5}{5} + c = x^5 + c$

de donde, independientemente del valor de c*:*

$$\Delta y[2,\ 6] = y(6) - y(2) = 6^5 - 2^5 = 7\,776 - 32 = 7\,744$$

y por tanto:

$$y(6) = y(2) + \Delta y[2,\ 6] = 100 + 7\,744 = 7\,844$$

Problema 4.

Dada la razón de cambio de $f(x)$: $f'(x) = x^3 - x$

a) Construye a la función $y = f(x)$ sabiendo que $f(0) = -2$

Respuesta: $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} - 2$

b) Calcula $\Delta f\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$

Respuesta: $-\dfrac{7}{64}$

c) Calcula $\Delta f[-2,\ 2]$

Respuesta: 0

d) ¿Qué se puede afirmar de $f(2)$ y $f(-2)$ a partir del inciso anterior?

Respuesta: Son iguales.

¿Sabías que?...

El proyecto PISA (*Programme for International Student Assessment*) trata sobre la realización de un extenso estudio de evaluación internacional comparada.

Esta iniciativa de la OECD (*Organisation for Economic Co-operation and Development*) identifica a la **competencia matemática** como una de varias competencias básicas que se integran a un **saber hacer**.

Con ello se enfatiza una integración de conocimientos, habilidades prácticas y actitudes para el logro de una acción eficaz en la vida.

En este marco se destaca la importancia de competencias matemáticas como: pensar y razonar, argumentar, comunicar, construir modelos, plantear y resolver problemas, representar, utilizar un lenguaje simbólico, formal y técnico y además utilizar herramientas de apoyo, como por ejemplo los recursos tecnológicos.

1.

Antiderivada	$F(x) = -\frac{7}{2}\frac{x^2}{2} + 2x + C = -\frac{7}{4}x^2 + 2x + C$
Función	$f(x) = -\frac{7}{2}x + 2$
Derivada	$f'(x) = -\frac{7}{2}$

2.

Antiderivada	$F(x) = -\frac{3}{5}\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$ $= -\frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$
Función	$f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + x + 1$
Derivada	$f'(x) = -\frac{3}{5}(2x) + 1 = -\frac{6}{5}x + 1$

3.

Antiderivada	$F(x) = 10x + 100\frac{x^2}{2} + 1\,000\frac{x^3}{3} + C$ $= 10x + 50x^2 + \frac{1\,000}{3}x^3 + C$
Función	$f(x) = 10 + 100x + 1\,000x^2$
Derivada	$f'(x) = 100 + 1000(2x) = 100 + 2\,000x$

4.

Antiderivada	$F(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}\frac{x^5}{5} + C = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{20}x^5 + C$
Función	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$
Derivada	$f'(x) = \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{4}\left(4x^3\right) = x + x^3$

5.

Antiderivada	$F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$ $= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$
Función	$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$
Derivada	$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2$

6.

Antiderivada	$F(x) = \frac{2}{5}\frac{x^6}{6} + 10\frac{x^{11}}{11} - x + C$ $= \frac{x^6}{15} + \frac{10}{11}x^{11} - x + C$
Función	$f(x) = \frac{2x^5}{5} + 10x^{10} - 1 = \frac{2}{5}x^5 + 10x^{10} - 1$
Derivada	$f'(x) = \frac{2}{5}\left(5x^4\right) + 10\left(10x^9\right)$ $= 2x^4 + 100x^9$

7.

Antiderivada	$F(x)=3\frac{x^9}{9}+5\frac{x^{14}}{14}+7\frac{x^{13}}{13}+C$ $=\frac{1}{3}x^9+\frac{5}{14}x^{14}+\frac{7}{13}x^{13}+C$
Función	$f(x)=x^5\left(3x^3+5x^8+7x^7\right)=3x^8+5x^{13}+7x^{12}$
Derivada	$f'(x)=3(8x^7)+5(13x^{12})+7(12x^{11})$ $=24x^7+65x^{12}+84x^{11}$

8.

Antiderivada	$F(x)=\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^8}{8}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C$ $=\frac{1}{10}x^{10}+\frac{1}{8}x^8+\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$
Función	$f(x)=\frac{x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2}{x}$ $=\frac{x^{10}}{x}+\frac{x^8}{x}+\frac{x^6}{x}+\frac{x^4}{x}+\frac{x^2}{x}$ $=x^9+x^7+x^5+x^3+x$
Derivada	$f'(x)=9x^8+7x^6+5x^4+3x^2+1$

9.

Antiderivada	$F(x)=ax+b\frac{x^2}{2}+c\frac{x^3}{3}+C$ $=ax+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{3}x^3+C$
Función	$f(x)=a+bx+cx^2$
Derivada	$f'(x)=b+c(2x)=b+2cx$

10.

Antiderivada	$F(x) = ax + b\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{c}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{a}{b}\dfrac{x^4}{4} + a_n\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $= ax + \dfrac{b}{2}x^2 + \dfrac{1}{3c}x^3 + \dfrac{a}{4b}x^4 + \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C$
Función	$f(x) = a + bx + \dfrac{1}{c}x^2 + \dfrac{a}{b}x^3 + a_n x^n$
Derivada	$f'(x) = b + \dfrac{1}{c}(2x) + \dfrac{a}{b}\left(3x^2\right) + a_n\left(n\,x^{n-1}\right)$ $= b + \dfrac{2}{c}x + \dfrac{3a}{b}x^2 + n\,a_n x^{n-1}$

11.

Antiderivada	$Y = ad\,x + bd\dfrac{x^2}{2} + cd\dfrac{x^3}{3} + a\dfrac{x^4}{4} + b\dfrac{x^5}{5} + c\dfrac{x^6}{6} + C$ $= ad\,x + \dfrac{bd}{2}x^2 + \dfrac{cd}{3}x^3 + \dfrac{a}{4}x^4 + \dfrac{b}{5}x^5 + \dfrac{c}{6}x^6 + C$
Función	$y = \left(a + bx + cx^2\right)\left(x^3 + d\right)$ $= ax^3 + ad + bx^4 + bdx + cx^5 + cdx^2$ $= ad + bdx + cdx^2 + ax^3 + bx^4 + cx^5$
Derivada	$y' = bd + cd(2x) + a\left(3x^2\right) + b\left(4x^3\right) + c\left(5x^4\right)$ $= bd + 2cdx + 3ax^2 + 4bx^3 + 5cx^4$

12.

Antiderivada	$Y = a\dfrac{x^2}{2} + a^2\dfrac{x^3}{3} + a^3\dfrac{x^4}{4} + a^4\dfrac{x^5}{5} + C$ $= \dfrac{a}{2}x^2 + \dfrac{a^2}{3}x^3 + \dfrac{a^3}{4}x^4 + \dfrac{a^4}{5}x^5 + C$
Función	$y = ax + a^2x^2 + a^3x^3 + a^4x^4$
Derivada	$y' = a + a^2(2x) + a^3\left(3x^2\right) + a^4\left(4x^3\right)$ $= a + 2a^2x + 3a^3x^2 + 4a^4x^3$

13.

Antiderivada	$Y = a_2 x + a_3 \frac{x^2}{2} + a_6 \frac{x^5}{5} + C$ $= a_2 x + \frac{a_3}{2} x^2 + \frac{a_6}{5} x^5 + C$
Función	$y = \frac{a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_6 x^6}{x^2}$ $= \frac{a_2 x^2}{x^2} + \frac{a_3 x^3}{x^2} + \frac{a_6 x^6}{x^2}$ $= a_2 + a_3 x + a_6 x^4$
Derivada	$y' = a_3 + a_6 (4x^3)$ $= a_3 + 4a_6 x^3$

14.

Antiderivada	$Y = cx + (a+b)\frac{x^2}{2} + (a+b)\frac{x^3}{3} + a\frac{x^4}{4} + C$ $= cx + \frac{a+b}{2}x^2 + \frac{a+b}{3}x^3 + \frac{a}{4}x^4 + C$
Función	$y = a(x + x^2 + x^3) + b(x + x^2) + c$ $= ax + ax^2 + ax^3 + bx + bx^2 + c$ $= c + ax + bx + ax^2 + bx^2 + ax^3$ $= c + (a+b)x + (a+b)x^2 + ax^3$
Derivada	$y' = a + b + (a+b)(2x) + a(3x^2)$ $= a + b + 2(a+b)x + 3ax^2$

15.

Antiderivada	$Y = \frac{1}{k}x + \frac{1}{k^2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{k^3}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{k^4}\frac{x^4}{4} + C$ $= \frac{1}{k}x + \frac{1}{2k^2}x^2 + \frac{1}{3k^3}x^3 + \frac{1}{4k^4}x^4 + C$
Función	$y = \frac{1}{k} + \frac{x}{k^2} + \frac{x^2}{k^3} + \frac{x^3}{k^4}$ $= \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}x + \frac{1}{k^3}x^2 + \frac{1}{k^4}x^3$
Derivada	$y' = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3}(2x) + \frac{1}{k^4}(3x^2)$ $= \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^3}x + \frac{3}{k^4}x^2$

16.

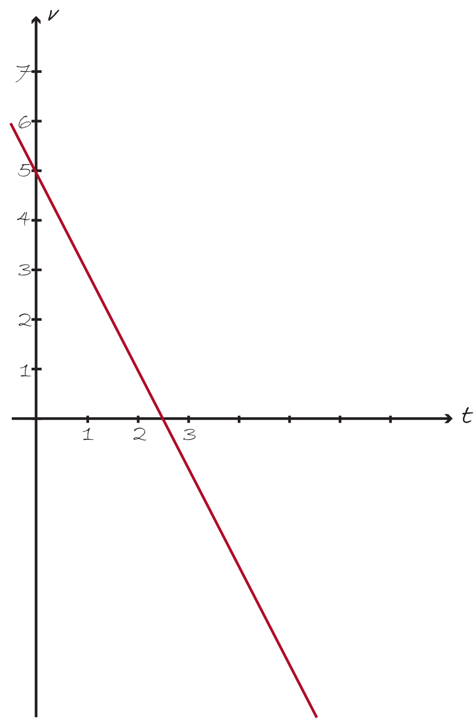
Antiderivada	$Y = a_0\,x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + a_3\frac{x^4}{4}\ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $= a_0\,x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_3}{4}x^4\ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C$
Función	$y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots + a_n\,,$
Derivada	$y' = a_1 + a_2\,(2x) + a_3\,(3x^2) + \ldots + a_n\,(n\,x^{n-1})$ $= a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots + n\,a_n\,x^{n-1}$

1.4 Estudio Cualitativo del Cambio NO Uniforme: Modelo Cuadrático

En este tema se realiza un análisis de tipo cualitativo para predecir el comportamiento de la magnitud en estudio, con la idea de tomar decisiones respecto a si la magnitud está creciendo o decreciendo, además de precisar cómo se realiza esa acción. Todo esto se discute a través del análisis de la razón de cambio de la magnitud. Como producto de un acercamiento visual a las gráficas de razón de cambio y magnitud se establecen relaciones entre ambas gráficas que se traducirá en la información nombrada. Las nociones de punto máximo y mínimo surgen de este análisis para enriquecer la interpretación del comportamiento de la magnitud modelada mediante la función. Los resultados en este tema son válidos en cualquier función cuyas propiedades matemáticas coinciden con las de funciones polinomiales. Sin embargo, será en el marco particular de la función cuadrática donde se verán apoyadas las inferencias que se establecen en dichos resultados. Este tema incluye un estudio exhaustivo del Modelo cuadrático y su aplicación en problemas reales.

Situación Problema 1.4

Una partícula se está desplazando horizontalmente sobre un eje x con una velocidad (en metros/segundo) que cambia con el tiempo t del modo en que lo expresa la siguiente gráfica:

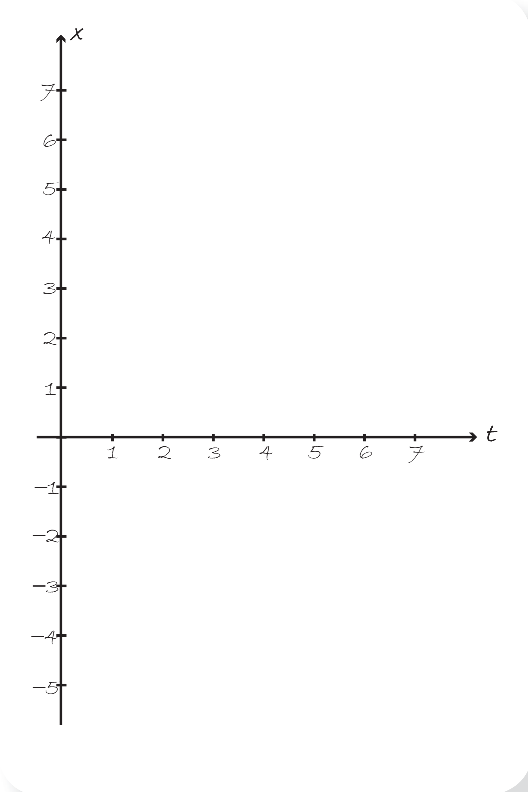


¡TOMA NOTA!

En el lenguaje coloquial las palabras **velocidad y rapidez** se toman como sinónimos... Pero en el lenguaje matemático tienen importantes **diferencias**.

Cuando comenzamos a observarla (cuando $t = 0$), la posición de la partícula era de $x = 1$ metro.

a) En el siguiente sistema coordenado, dibuja la gráfica de la función de posición $x = x(t)$ de tal manera que, a partir de ella, puedas describir el comportamiento del movimiento que realiza la partícula y que se modela con esa función.



La gráfica de la velocidad nos dice que ésta es variable y tiene un signo positivo en el intervalo de tiempo de los 0 a los 2.5 segundos. Durante ese tiempo la partícula debe estarse moviendo hacia la derecha, de modo que el gráfico de la posición debe notarse creciente en ese intervalo.

Por otra parte, la velocidad es negativa en el intervalo de tiempo de los 2.5 segundos en adelante; en ese intervalo la partícula debe estarse moviendo hacia la izquierda, de modo que el gráfico de la posición debe notarse decreciente en esa zona. El dibujo que realicemos para la función de posición, debe mostrar un gráfico que crece y luego decrece; y ese cambio del comportamiento se realiza justo cuando $t = 2.5$ segundos.

Observando la gráfica de velocidad en el intervalo $[0, 2.5]$, interpretamos que la partícula, que se mueve hacia la derecha, lo hace cada vez más lentamente pues los datos de velocidad son positivos y se están acercando a 0. Para interpretar los datos de la velocidad como lo hemos hecho requerimos visualizar segmentos verticales que "se levantan" del eje horizontal del tiempo y "topan" con la gráfica de velocidad. A medida que el tiempo aumenta y se acerca a $t = 2.5$, las alturas positivas de estos segmentos disminuyen y se acercan a 0 hasta llegar a ese valor cuando $t = 2.5$.

¡TOMA NOTA!

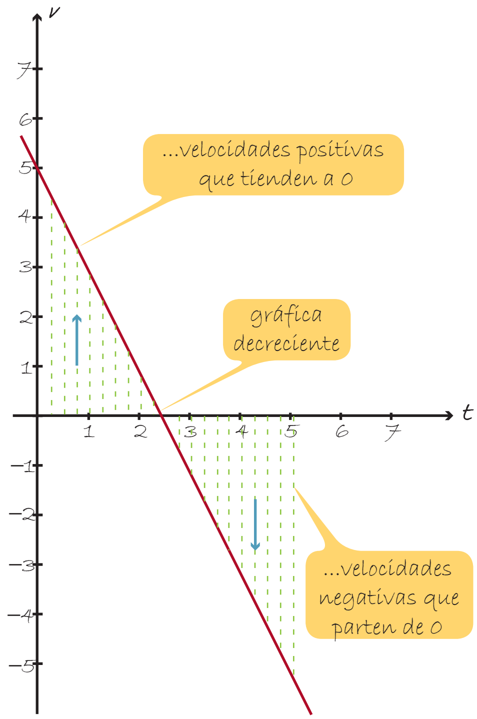
En el movimiento rectilíneo la **rapidez** es un número siempre positivo. En cambio, la **velocidad** puede ser **positiva o negativa**.

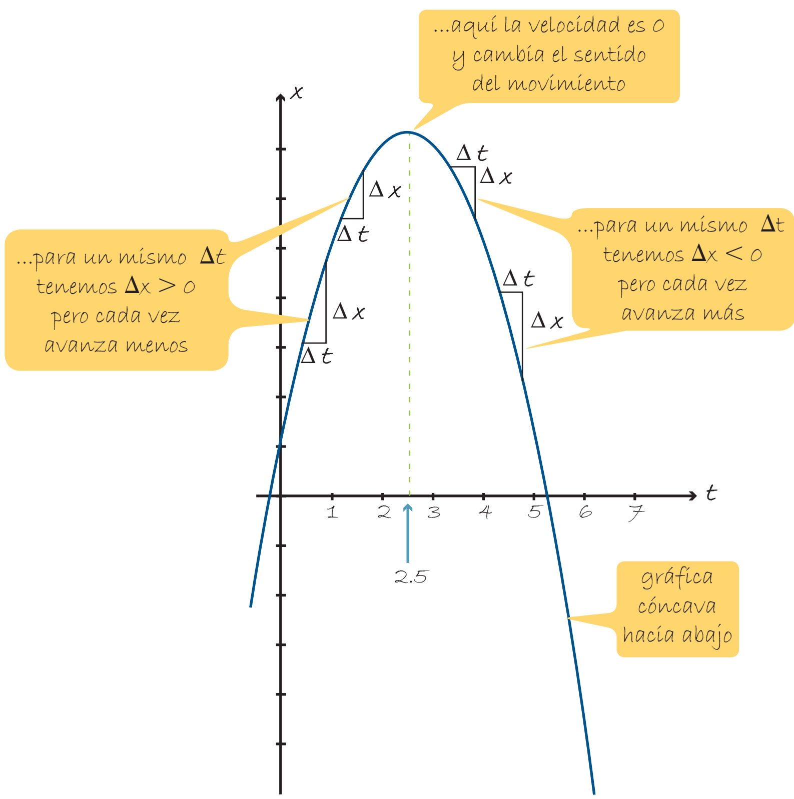
A su vez, a partir de $t = 2.5$ *la gráfica de la velocidad nos hace interpretar que la partícula, que se mueve hacia la izquierda, lo está haciendo cada vez más rápido, pues los datos de la velocidad son negativos y se están alejando de* 0.

Con el dato inicial de la posición de 1 *metro podemos hacer un trazado cualitativo de la gráfica, que muestre lo dicho en el párrafo anterior aunque no se precisen los valores numéricos de la posición.*

Decimos que la gráfica de la posición crece con ***concavidad hacia abajo*** *hasta el tiempo* $t = 2.5$ *y luego decrece manteniendo la concavidad hacia abajo.*

Esta concavidad hacia abajo es una característica de la curva que se obtiene como una consecuencia de cumplir con lo que la gráfica de la velocidad muestra, pues los sucesivos cambios de posición (Δx) *deben evidenciar un movimiento hacia la derecha cada vez más lento que llega a pararse en un instante para proseguir con el movimiento hacia la izquierda cada vez más rápido. Para expresar esto, la curva se "dobla" de la manera que lo manifiesta la concavidad hacia abajo. La siguiente figura (abajo) permite visualizar lo anterior; se observan iguales intervalos de tiempo* Δt *a quienes corresponden diferentes longitudes de* Δx.





¡TOMA NOTA!

El **signo** de la velocidad expresa el **sentido** del movimiento en la línea recta, y la recta marca la **dirección**:

sentido ← → sentido

dirección

Saber hasta dónde llega el gráfico a los $t = 2.5$ *segundos exige que conozcamos la función de posición para evaluar en ella ese tiempo. Podemos construir esa función si contamos con la función de velocidad; pues bastaría antiderivarla. Pero, ¿cómo construir la función de velocidad? Deberemos hacerlo con la información visual que nos ofrece su gráfica. Se trata de una recta (a partir de* $t = 0$*) que inicia en el valor* 5 *y que cruza el eje horizontal en* 2.5*. Por lo que hemos estudiado en el Tema 1.1 sobre el Modelo lineal, podemos plantear la función velocidad en la forma*

$$v(t) = 5 + a\,t$$

donde el valor de "a*" representa la razón de cambio de* v *con respecto a* t*, lo que se conoce como la aceleración, que en este caso es constante.*

cambio de velocidad

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

razón

cambio de tiempo

Podemos obtener el valor de "a*" al sustituir* $t = 2.5$ *en* $v(t)$ *y obtener su correspondiente valor* 0*:*

$$v(2.5) = 0$$

$$0 = v(2.5) = 5 + a(2.5)$$

$$2.5\,a = -5$$

$$a = -\frac{5}{2.5} = -2$$

Por tanto, la función de velocidad es

$$v(t) = 5 - 2t$$

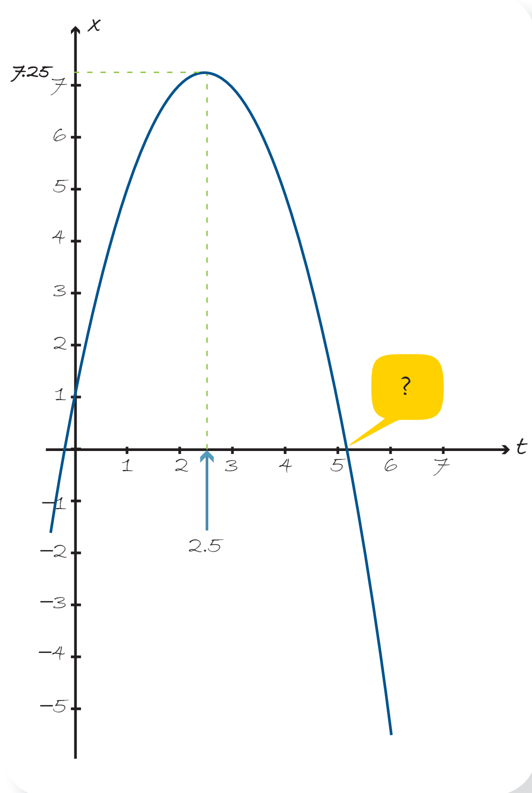
Retomando el problema, procedemos ahora a identificar la expresión de la función de posición con la antiderivada de $v(t)$*, donde el valor inicial* $(x(0) = 1)$ *lo colocaremos como el primer término:*

$$x(t) = 1 + 5t - t^2$$

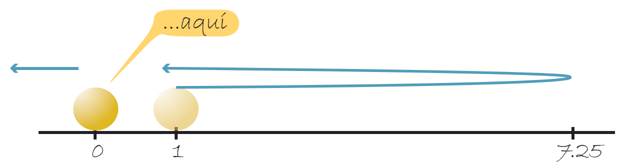
De esta expresión podemos calcular el valor de la posición en $t = 2.5$

$$x(2.5) = 1 + 5(2.5) - (2.5)^2$$
$$= 1 + 12.5 - 6.25 = 7.25$$

y con este valor, agregado al aspecto cualitativo que hemos discutido anteriormente, dibujamos la siguiente gráfica:



En la gráfica hemos señalado con un signo de interrogación nuestro interés por determinar en qué instante cruza la curva el eje del tiempo. Llegar a contestar esto es equivalente a encontrar la intersección de la curva de posición $x(t)$ *con el eje* t*, o sea donde* $x(t) = 0$*. Interpretando en el contexto del movimiento, estaríamos encontrando el instante en que la partícula pasa por el origen de la recta en que se mueve.*



Para encontrar ese instante, igualamos la función de posición a 0 *y despejamos* t*:*

$$0 = x(t) = 1 + 5t - t^2$$

Pasando a la izquierda los términos y ordenando de esta forma

$$t^2 - 5t - 1 = 0$$

podemos evocar a la conocida ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuya solución se obtiene con la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

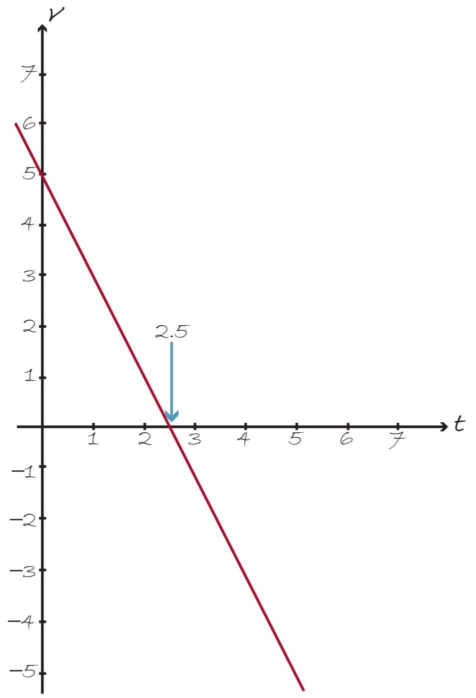
En nuestro caso, la variable x *es* t *y los valores de los coeficientes son* $a = 1, b = -5$ *y* $c = -1$ *por tanto:*

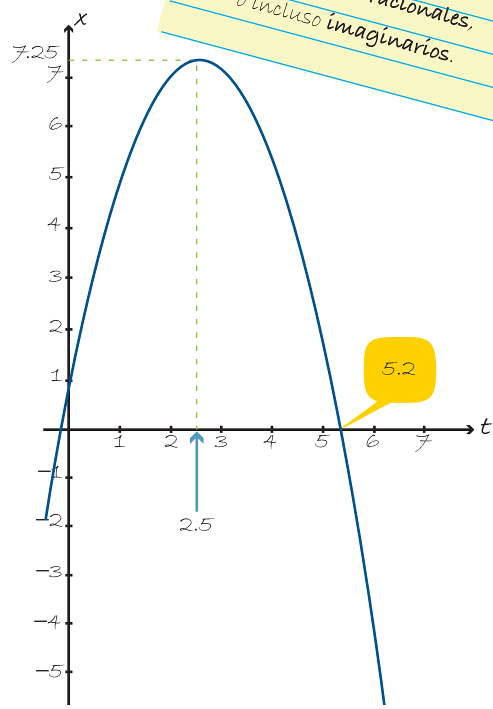
$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25+4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Obtengamos aproximaciones de estos dos valores para ubicarlos fácilmente en la recta numérica:

$$t = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \approx 5.19; \qquad t = \frac{5-\sqrt{29}}{2} \approx -0.19258$$

Observamos que uno de los valores es negativo, el cual descartaremos por estar trabajando en el contexto real del movimiento, donde se tiene significado asociado sólo cuando el tiempo es positivo. Acabamos la gráfica de posición señalando el instante en el que cruza el eje horizontal del tiempo.





Visualizando simultáneamente las gráficas podemos rescatar un hecho:
***el decrecimiento** en gráfica de **velocidad** corresponde con la **concavidad hacia abajo** en gráfica de **posición**.*

¡TOMA NOTA!

Las soluciones de una **ecuación cuadrática** $ax^2+bx+c=0$ también se conocen como las **raíces** o los **ceros** de la ecuación, y son los dos números x que, al sustituirse en ax^2+bx+c se obtiene el número 0.

¡TOMA NOTA!

Para obtener las soluciones de la **ecuación cuadrática** se utiliza la **fórmula general**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

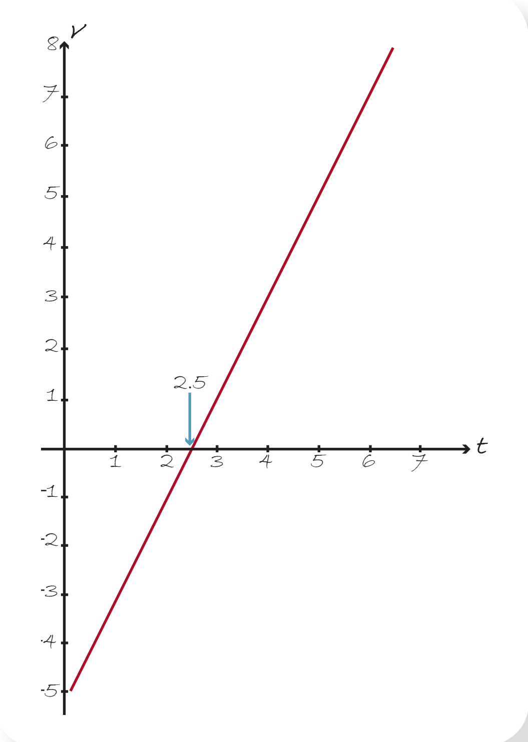
¡TOMA NOTA!

Con el signo ± de la fórmula general se encuentran las 2 soluciones de la ecuación cuadrática que pueden ser números **enteros**, **racionales**, **irracionales**, o incluso **imaginarios**.

Finalmente, observando ambas gráficas interpretamos el movimiento que éstas describen y que versa así:

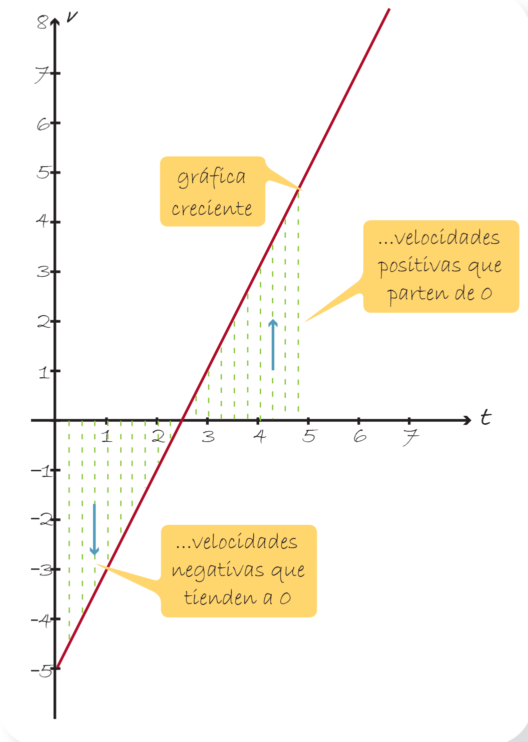
"Comenzamos a observar el movimiento cuando la partícula se encontraba en la posición 1 dirigiéndose hacia la derecha cada vez más lento. Se detiene en el instante 2.5 segundos justo en la posición 7.25 metros y es en ese instante cuando cambia el sentido del movimiento hacia la izquierda haciéndolo de un modo cada vez más rápido. Aproximadamente a los 5.2 segundos pasa por el origen de la recta en que se mueve en su trayecto hacia la izquierda que continúa… ¿eternamente?"

b) Considera ahora la misma situación que el inciso anterior pero tomando en cuenta la información que se interpreta de la grafica de velocidad siguiente:

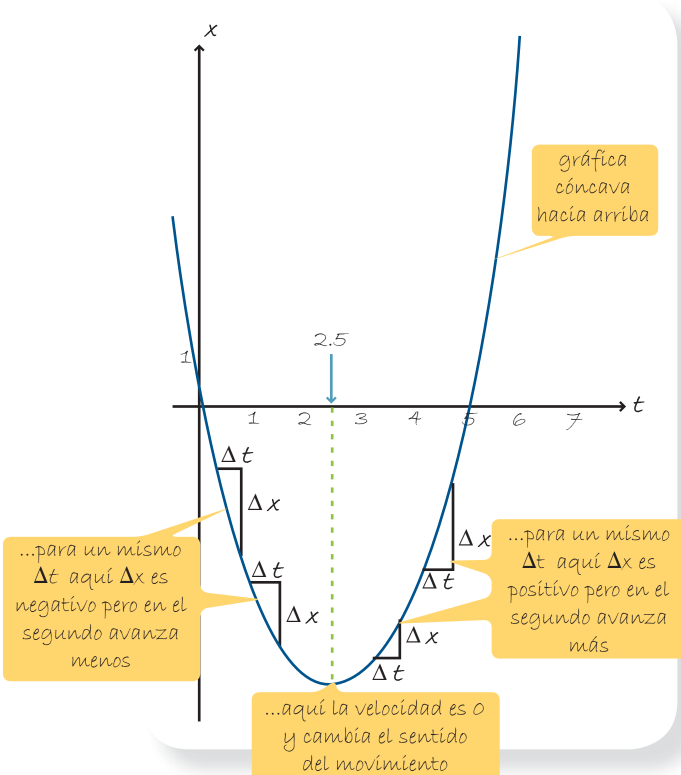


Observamos que en este caso la velocidad primero es negativa y después positiva justo a los $t = 2.5$ segundos. Esto nos hace interpretar que el movimiento de la partícula originalmente es hacia la izquierda ($v < 0$) y después cambia de sentido hacia la derecha ($v > 0$); además de mostrar una ***concavidad hacia arriba*** *en todo su trayecto.*

Esto último lo aseguramos interpretando de la gráfica de velocidad las verticales que "se levantan" del eje horizontal y "topan" con dicha gráfica.



La partícula, inicialmente va hacia la izquierda cada vez más lento (las velocidades negativas tienden a 0) se detiene en el instante $t = 2.5$ y sigue su movimiento ahora hacia la derecha cada vez más rápido. Los sucesivos Δx se comportan de forma tal que podemos realizar cualitativamente el gráfico de la posición de la partícula tomando el dato inicial de $x(0) = 1$:



Llegar a conocer el valor de la posición donde cambia el sentido del movimiento (a los $t = 2.5$ *segundos) nos exige ir más allá de este análisis cualitativo porque necesitamos construir la función de posición para evaluarla en* $t = 2.5$. *Podemos realizar esto aplicando lo aprendido en el Tema 1.1 y 1.3; a saber, antiderivando la función de velocidad. Si bien desconocemos en este momento cuál es esta función, sabemos al menos que se representa mediante un Modelo Lineal.*

Obtenemos la función lineal para la velocidad observando que

$$v(t) = -5 + at$$

y que $v(2.5) = 0$,

luego, sustituyendo $t = 2.5$ *tenemos:*

$$0 = v(2.5) = -5 + a(2.5)$$

$$0 + 5 = a(2.5)$$

$$a = \frac{5}{2.5} = 2$$

Por tanto, la función de velocidad es

$$v(t) = -5 + 2t$$

y ahora la antiderivamos para obtener la función de posición, donde el valor de c *coincide con el valor* inicial 1:

$$x(t) = 1 - 5t + t^2$$

Evaluamos esta función en $t = 2.5$

$$x(2.5) = 1 - 5(2.5) + (2.5)^2$$

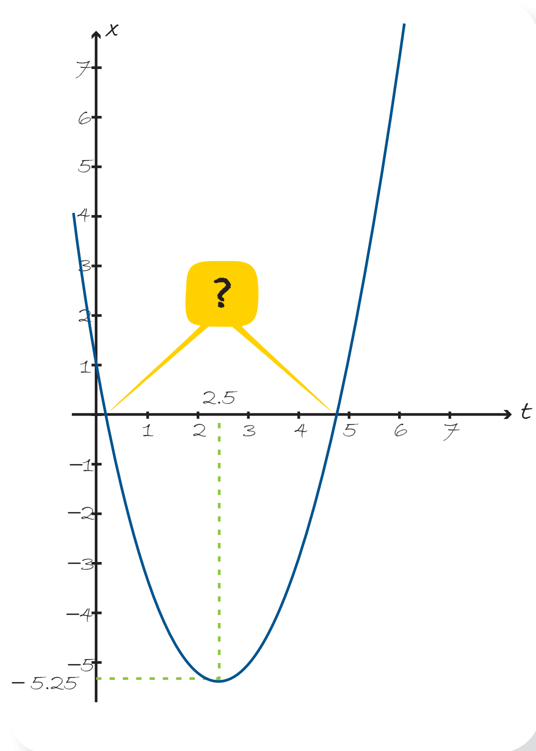
$$= 1 - 12.5 + 6.25$$

$$= 1 - 6.25$$

$$= -5.25$$

Con este dato realizamos el gráfico de la posición sabiendo que el punto $(2.5, -5.25)$ *es parte de él.*

Pero al hacer ese trazado observamos que necesitamos encontrar aún otra información para tener mayor precisión en el trazado. Sí observas, hemos colocado en la figura siguiente los signos de interrogación señalando los dos puntos en el eje horizontal del tiempo por donde la gráfica de posición cruza el eje x.



Los puntos representan los instantes en que la posición es 0 *y para encontrar los cortes de la curva de posición con el eje del tiempo, igualamos a cero la posición y despejamos el tiempo:*

$$0 = x(t) = 1 - 5t + t^2$$

$$t^2 - 5t + 1 = 0$$

Despejar t *equivale a utilizar la fórmula general para resolver la ecuación que se ha construido, con* $a = c = 1$ *y* $b = -5$:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

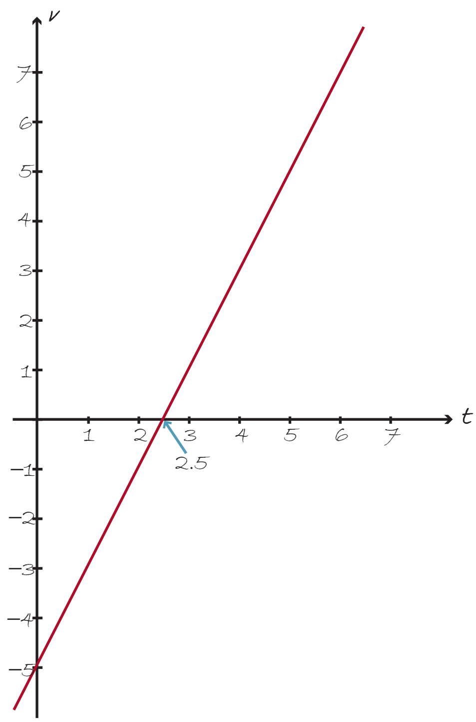
$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

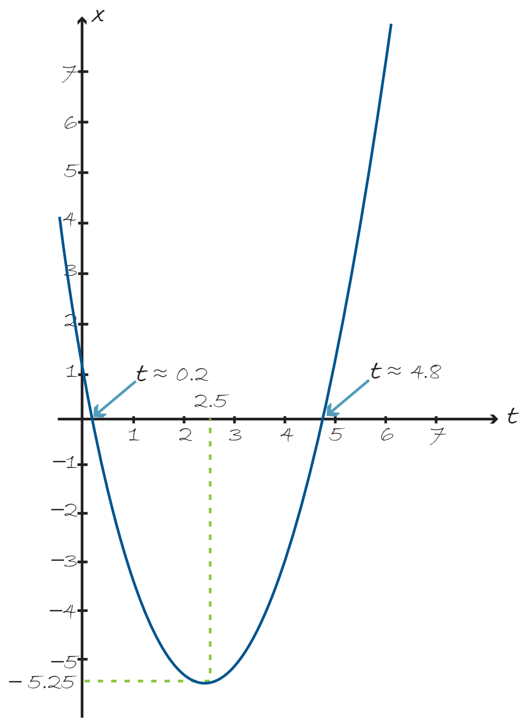
$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Aproximamos estas soluciones

$$t = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \approx 4.7913 \qquad\qquad t = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \approx 0.2087$$

y así completamos la gráfica en seguida:





Cabe nuevamente visualizar un hecho a partir de la imagen anterior:
***el crecimiento** en gráfica de **velocidad** corresponde con la **concavidad hacia arriba** en gráfica de **posición**.*

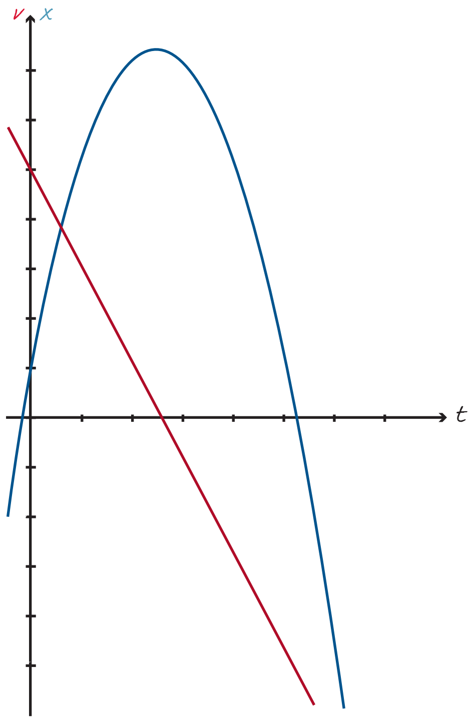
Por su parte, la descripción del movimiento cambia con respecto a la hecha anteriormente, la hacemos en seguida:

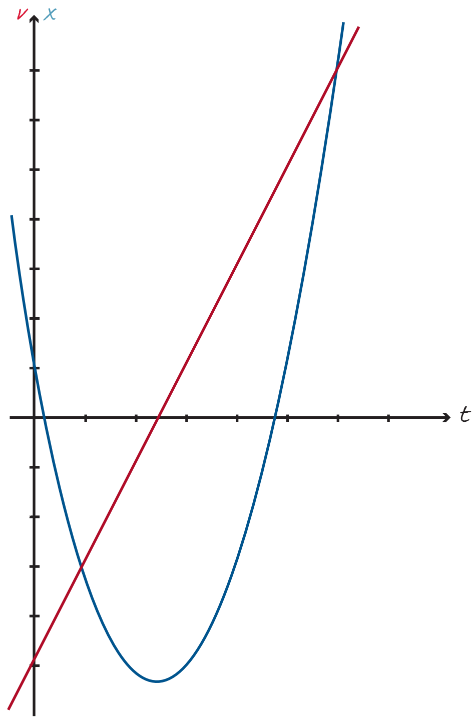
> *"Comenzamos a ver la partícula cuando estaba en la posición* 1 *metro dirigiéndose hacia la izquierda cada vez más lento. Aproximadamente a los* $t \approx 0.21$ *(una quinta parte de segundo) pasó por el origen de la recta en que se mueve, continuando hacia la izquierda hasta pararse a los* $t = 2.5$ *segundos en la posición* $x(2.5) = -5.25$ *metros. En ese instante cambia el sentido del movimiento ahora hacia la derecha y lo hará cada vez más rápido. En ese transcurso pasa nuevamente por el origen de la recta en que se mueve aproximadamente a los* $t = 4.8$ *segundos y sigue su camino. . . ¿interminable?... hacia la derecha...."*

Generalizaciones a partir de la situación problema 1.4

Primer resultado: máximos y mínimos

Consecuencias importantes se desprenden de analizar la situación problema anterior realizando una visualización gráfica. Traemos en seguida las gráficas obtenidas en los dos incisos discutidos pero con la idea adicional de incluir en el mismo sistema coordenado tanto la gráfica de velocidad como la de posición, distinguiéndolas por el color correspondiente.

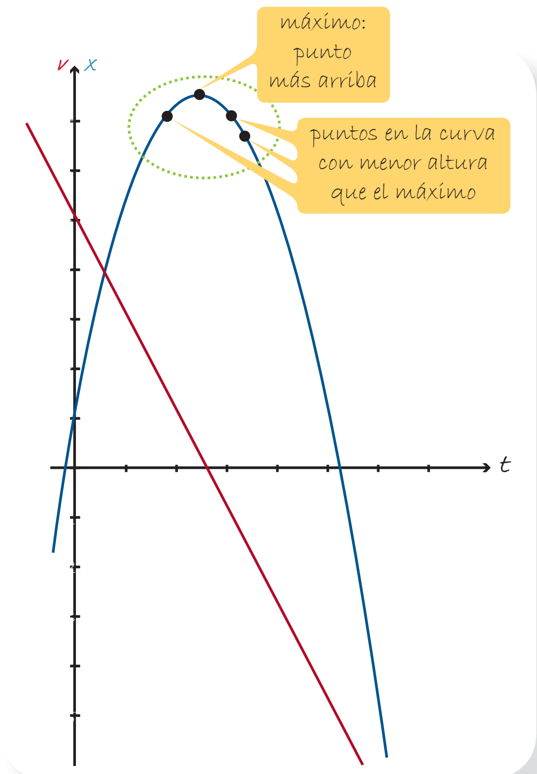




En el primer caso, observando la gráfica de posición se tiene lo que suele llamarse un punto **máximo** en la curva, mientras que en el segundo caso se presenta un punto **mínimo**.

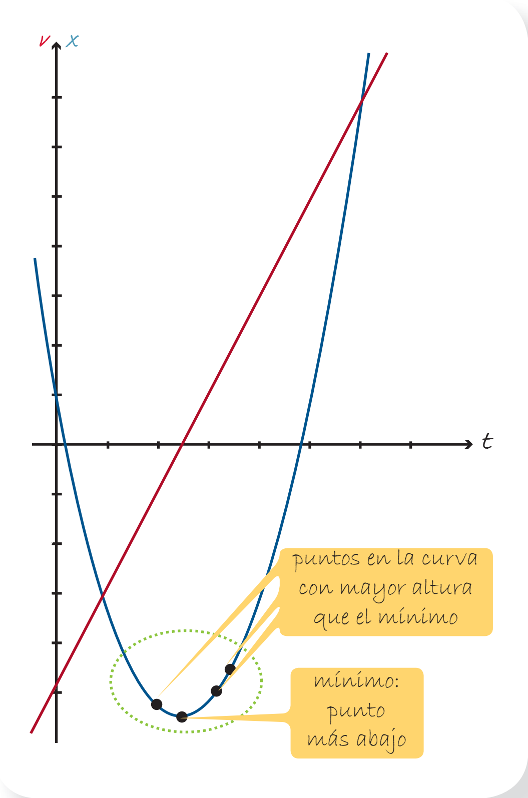
La noción de punto máximo (o mínimo) se refiere a que en una zona, el punto señalado es el que se encuentra más arriba (o más abajo) comparando con todos los puntos de la gráfica en esa misma zona. Lo expresamos en la imagen en seguida, donde la zona está representada por el interior del disco punteado.

Es claro que en este caso la zona señalada puede ser todo el plano coordenado porque realmente es el punto más alto en toda la gráfica. En este caso se le llama **máximo absoluto**, sin embargo, el hablar de zonas permitirá considerar la existencia de varios **máximos relativos** (en relación a una zona) para otro tipo de funciones, no para la cuadrática.



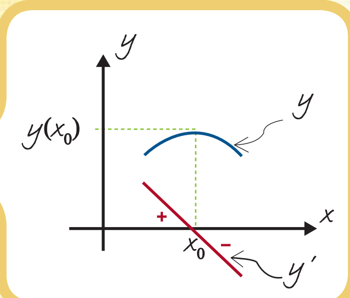
Si observamos el punto máximo y trasladamos nuestra vista hacia el gráfico de la velocidad, nos percatamos que esta gráfica ahí cruza el eje horizontal (ahí $v = 0$) y pasa de tomar valores positivos (antes del cruce), a tomar valores negativos (después del cruce). Este hecho se encuentra en correspondencia con el crecimiento de la gráfica de posición antes de llegar al máximo, su llegada al punto máximo, y el decrecimiento de la gráfica de posición después del punto máximo.

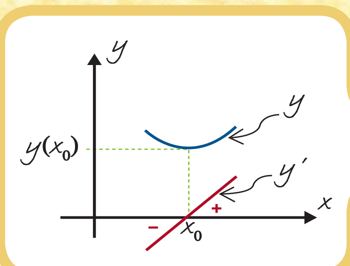
Análogamente en el punto mínimo si trasladamos nuestra vista hacia el gráfico de la velocidad, observamos que ésta cruza el eje horizontal $(v = 0)$ y pasa de tomar valores negativos (antes del cruce), a tomar valores positivos (después del cruce). La correspondencia se da ahora con el decrecimiento de la gráfica de posición antes de llegar al punto mínimo, su llegada al punto mínimo, y el crecimiento de la gráfica de posición después del mínimo.



Esta visualización de las gráficas simultáneas permite inducir un resultado matemático importante en la problemática de predicción que estamos tratando. Lo haremos explícito en seguida, pero lo establecemos ya transferido al contexto formal, donde la función $y = f(x)$ se asocia con la función de posición, y su función derivada, $f'(x)$, se asocia con la función de velocidad.

La gráfica de la función $y = f(x)$ tiene un punto **máximo** en $(x_0, f(x_0))$ cuando la gráfica de su derivada $f'(x)$ cruza el eje horizontal en x_0 cambiando de valores positivos antes de x_0 a valores negativos después de x_0.

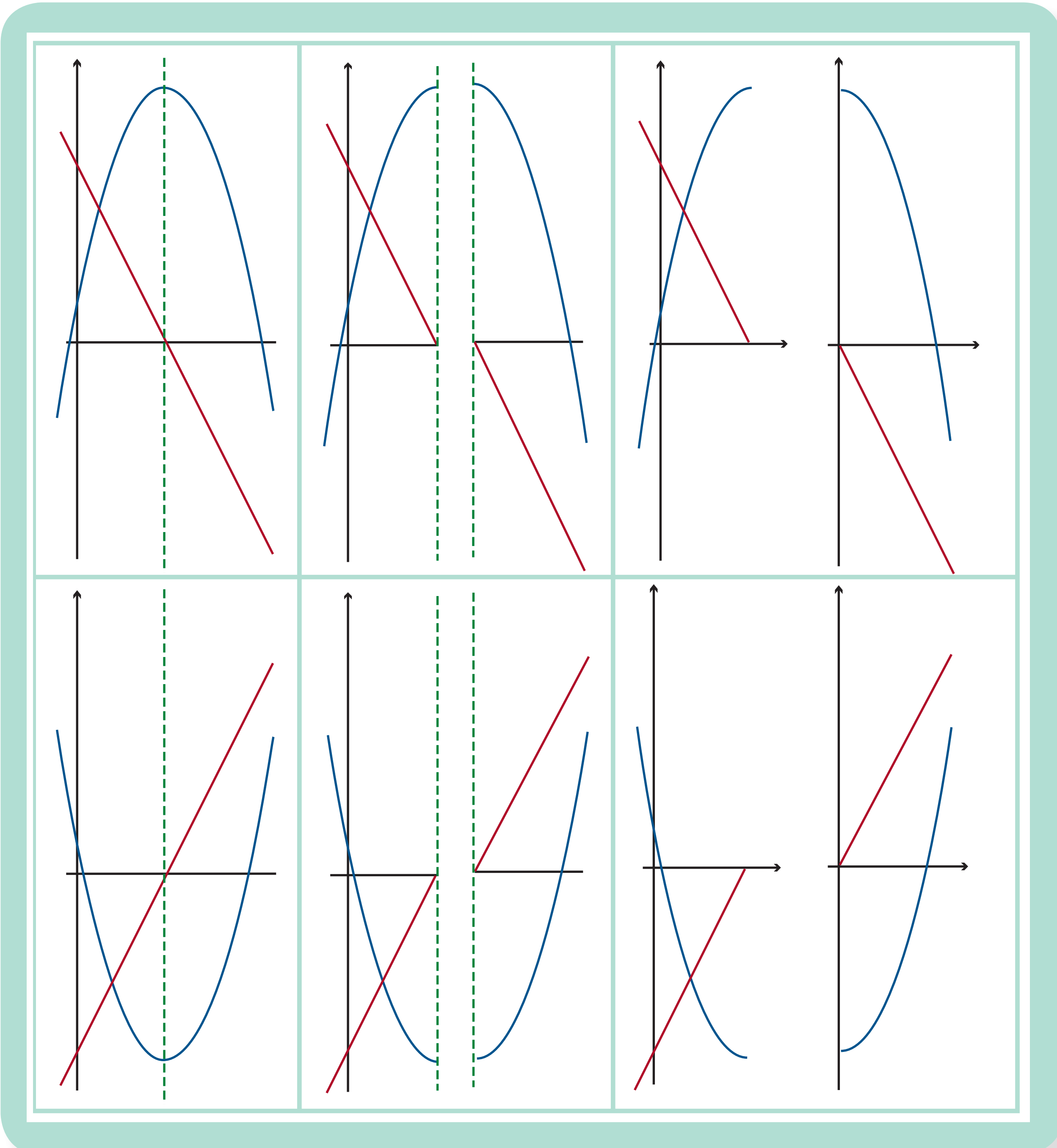




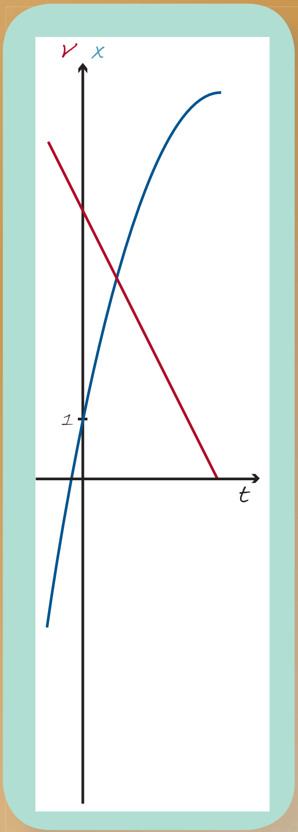
La gráfica de la función $y = f(x)$ tiene un punto **mínimo** en $(x_0, f(x_0))$ cuando la gráfica de su derivada $f'(x)$ cruza el eje horizontal en x_0 cambiando de valores negativos antes de x_0 a valores positivos después de x_0.

Segundo resultado: cuatro tipos de comportamiento

Una vez más retomamos las imágenes de función cuadrática y su función derivada (lineal) en el mismo sistema coordenado para de ellas visualizar los cuatro comportamientos diferentes que podemos encontrar en las curvas que representan a la función. Para esto, vamos a "partir" estas gráficas en dos, haciendo un corte justo en el lugar donde se tiene el valor máximo o mínimo. La siguiente figura ilustra lo dicho.

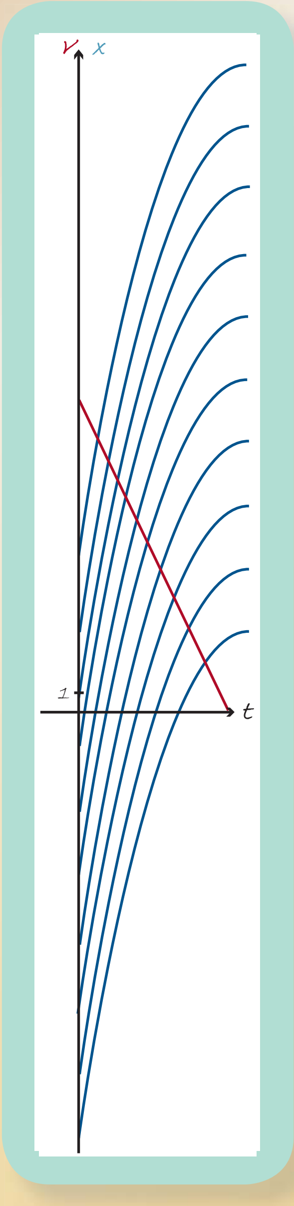


Analizaremos cada uno de los cuatro comportamientos.



Comportamiento tipo I

- La gráfica de velocidad es positiva.
- La gráfica de velocidad es decreciente.
- La gráfica de posición es creciente.
- La gráfica de posición es cóncava hacia abajo.

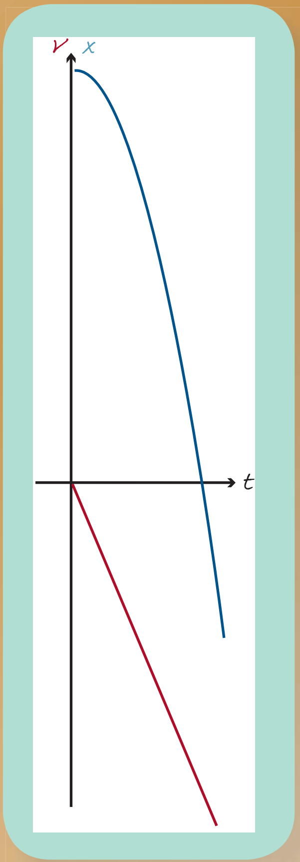


Observa que en el caso de la gráfica de posición que está dibujada, donde $x_0 = 1$, se tiene que esta gráfica es positiva, pues se mantiene en la zona "arriba" del eje horizontal; sin embargo, esta característica no es una consecuencia del comportamiento de la velocidad sino más bien del valor inicial de la posición.

Si cambiamos el dato de la posición inicial tenemos que se genera una "familia" de funciones, todas "paralelas" entre sí, como lo mostramos en la figura a la derecha.

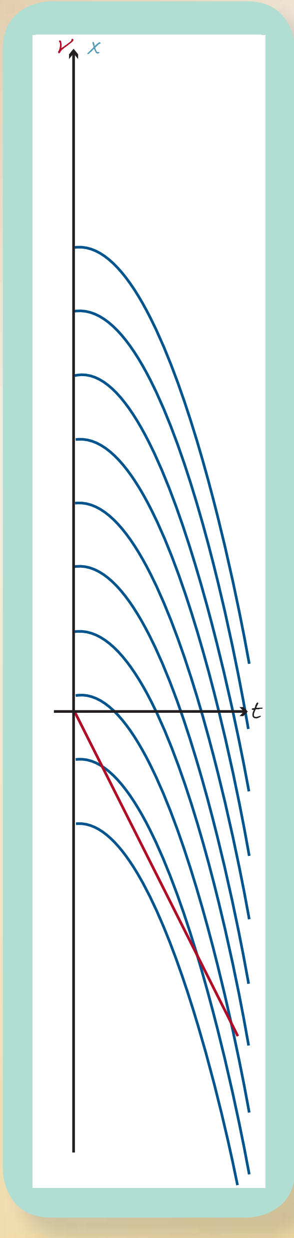
Con todas estas posibilidades de curvas es entendible que cuando antiderivamos la función velocidad, aparezca la constante aditiva c en la función de posición. Para las funciones que estamos considerando, la constante c coincide con el valor inicial de la posición pues es el valor que se obtiene al sustituir $x = 0$.

Independientemente de cuál sea el valor de c, podemos visualizar en estas gráficas de posición que las características del movimiento son las mismas: la partícula se mueve hacia la derecha cada vez más lento.



Comportamiento tipo II

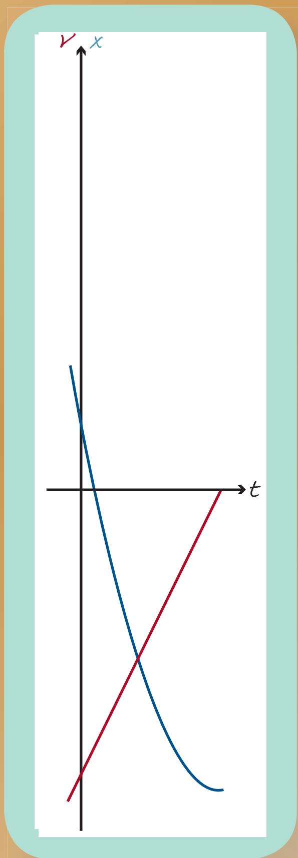
- La gráfica de velocidad es negativa.
- La gráfica de velocidad es decreciente.
- La gráfica de posición es decreciente.
- La gráfica de posición es cóncava hacia abajo.



Nuevamente en este caso, es importante observar que la zona (positiva o negativa) para la gráfica de posición es algo que depende sólo de la posición inicial y no del comportamiento de la velocidad.

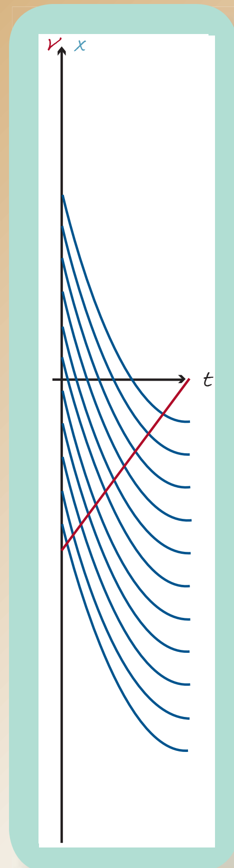
Cambiando el dato de la posición inicial, para una misma gráfica de velocidad podemos relacionar una familia de gráficas de posición, como ilustramos en la figura a la derecha.

Cualquiera de estas curvas de posición nos informa que la partícula se mueve hacia la izquierda cada vez más rápido.



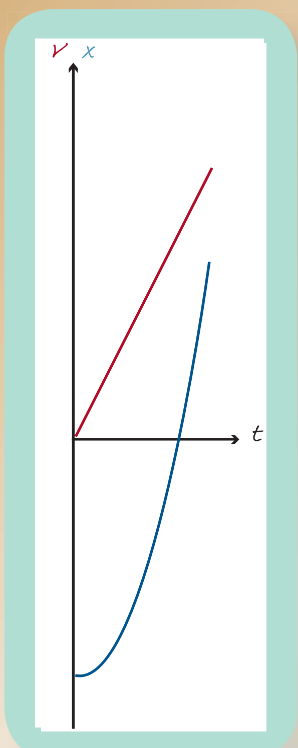
Comportamiento tipo III

- La gráfica de velocidad es negativa.
- La gráfica de velocidad es creciente.
- La gráfica de posición es decreciente.
- La gráfica de posición es cóncava hacia arriba.



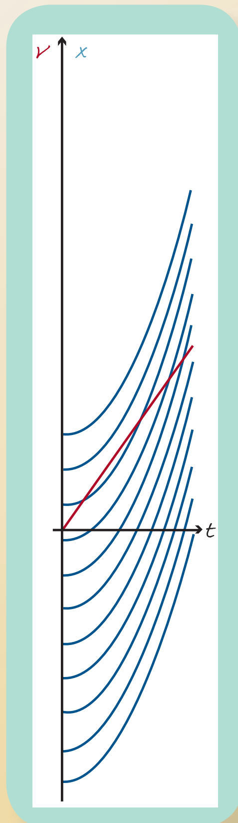
La ubicación de la gráfica de posición puede variar según sea el dato de la posición inicial. La variación del dato inicial de la posición genera una familia de curvas, todas correspondientes a la misma velocidad como se observa en la figura a la derecha.

Este tipo de curva permite interpretar el movimiento correspondiente al comportamiento de la velocidad: la partícula se mueve hacia la izquierda cada vez más lento.



Comportamiento tipo IV

- La gráfica de velocidad es positiva.
- La gráfica de velocidad es creciente.
- La gráfica de posición es creciente.
- La gráfica de posición es cóncava hacia arriba.

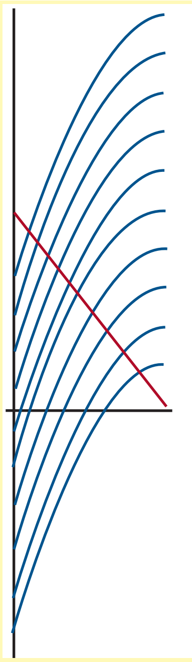
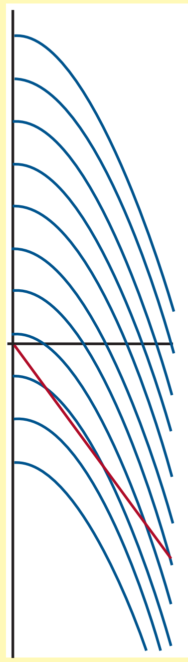
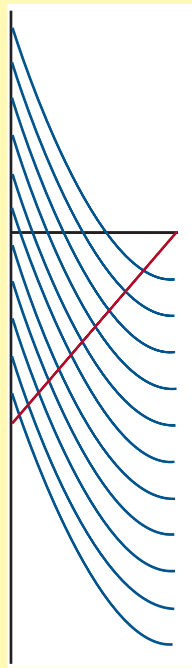
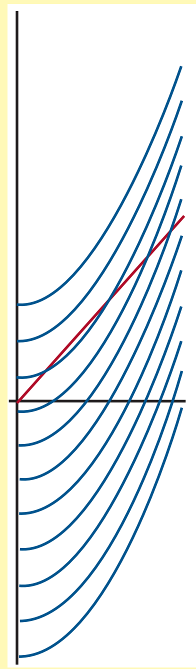


Y los diferentes datos del valor inicial de la posición generan una imagen como la de la derecha con la familia de antiderivadas de la velocidad.

Cualquiera que sea la curva, nos expresa que la partícula se mueve hacia la derecha cada vez más rápido.

Colocando estas cuatro piezas de comportamiento juntas tendremos la oportunidad de visualizar dos resultados que sintetizan la forma de analizar de manera cualitativa el comportamiento de la magnitud (que está interesando estudiar) a través del comportamiento de su razón de cambio.

Trasladamos estos cuatro tipos de comportamientos gráficos en la simbología matemática formal, donde la función es el modelo matemático que representa a la magnitud que interesa estudiar y su derivada representa la razón de cambio.

Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Interpretación: la magnitud crece cada vez más lento	**Interpretación:** la magnitud decrece cada vez más rápido	**Interpretación:** la magnitud decrece cada vez más lento	**Interpretación:** la magnitud crece cada vez más rápido
			

Observando el Tipo I y Tipo IV se tiene que:

- Cuando la gráfica de la razón de cambio es positiva, la gráfica de la magnitud es creciente. . . y viceversa.

Observando el Tipo II y Tipo III se tiene que:

- Cuando la gráfica de la razón de cambio es negativa, la gráfica de la magnitud es decreciente. . . y viceversa.

Observando el Tipo III y Tipo IV se tiene que:

- Cuando la gráfica de la razón de cambio es creciente, la gráfica de la magnitud es cóncava hacia arriba. . . y viceversa.

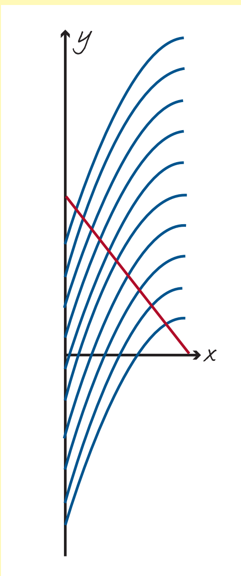
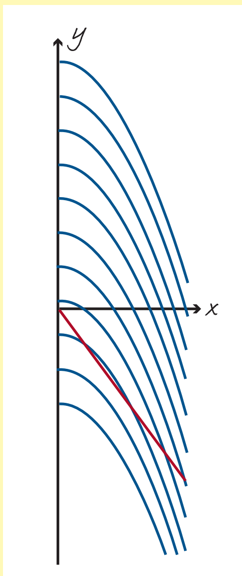
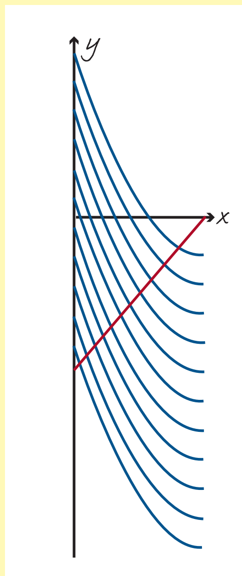
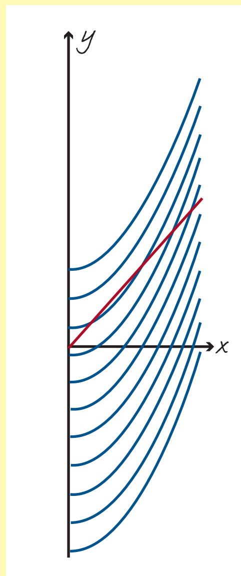
Observando el Tipo I y Tipo II se tiene que:

- Cuando la gráfica de la razón de cambio es decreciente, la gráfica de la magnitud es cóncava hacia abajo. . . y viceversa.

Expresando lo anterior en el lenguaje simbólico formal se tienen los dos resultados siguientes:

- La función $y = f(x)$ es creciente (decreciente) si y sólo si su derivada $y' = f'(x)$ es positiva (negativa).
- La gráfica de la función $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba (abajo) si y sólo si su derivada $y' = f'(x)$ es creciente (decreciente).

Es importante observar que cada uno de los cuatro tipos de comportamiento de la magnitud combina dos condiciones sobre su razón de cambio: la primera es el signo positivo/negativo y la segunda es el crecimiento/decrecimiento. Sintetizamos en el siguiente arreglo las combinaciones para los diferentes tipos de comportamiento.

Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Interpretación: la magnitud crece cada vez más lento	**Interpretación:** la magnitud decrece cada vez más rápido	**Interpretación:** la magnitud decrece cada vez más lento	**Interpretación:** la magnitud crece cada vez más rápido
Derivada positiva y decreciente	Derivada negativa y decreciente	Derivada negativa y creciente	Derivada positiva y creciente
			
Función creciente y cóncava hacia abajo	Función decreciente y cóncava hacia abajo	Función decreciente y cóncava hacia arriba	Función creciente y cóncava hacia arriba

Nos conviene expresar estos resultados en una forma compacta que sea de fácil evocación. La tabla que presentaremos en seguida intenta ofrecer una síntesis de la relación entre el comportamiento de una función y el de su derivada.

En la primera columna aparece la derivada de la función que representa a la razón de cambio de la magnitud bajo estudio o la velocidad en el caso del contexto real del movimiento en línea recta.

En la segunda columna aparece la función que representa a la magnitud bajo estudio, a la posición del objeto en el contexto real del movimiento rectilíneo.

Esta organización de las columnas responde a la estructura del discurso del cálculo que estamos introduciendo con este libro, en el sentido de que es justamente la razón de cambio de la magnitud la que nos permite la construcción de la función matemática que modela a la magnitud bajo estudio.

Relación entre el comportamiento de las graficas de una función y de su función derivada

Derivada $y' = f'(x)$ (razón de cambio, velocidad)		Función $y = f(x)$ (magnitud, posición)
positiva	↔	creciente
negativa	↔	decreciente
creciente	↔	cóncava hacia arriba
decreciente	↔	cóncava hacia abajo

La combinación de uno de los dos primeros renglones con uno de los dos últimos renglones genera cada uno de los tipos de comportamientos que hemos estudiado. Por ejemplo, en la tabla abajo tenemos señalado con resaltador amarillo las características que generan el comportamiento Tipo I y con resaltador verde las que generan el comportamiento Tipo III. A su vez, repetimos la tabla para señalar con resaltador azul las características que generan el comportamiento Tipo IV y con resaltador lila las que generan el comportamiento Tipo II

Derivada $y' = f'(x)$ (razón de cambio, velocidad)		Función $y = f(x)$ (magnitud, posición)
positiva	↔	creciente
negativa	↔	decreciente
creciente	↔	cóncava hacia arriba
decreciente	↔	cóncava hacia abajo

Derivada $y' = f'(x)$ (razón de cambio, velocidad)		Función $y = f(x)$ (magnitud, posición)
positiva	↔	creciente
negativa	↔	decreciente
creciente	↔	cóncava hacia arriba
decreciente	↔	cóncava hacia abajo

Tercer resultado: función cuadrática y sus gráficas

Queremos aprovechar este momento para dejar establecido formalmente un tercer resultado que es producto también de visualizar el comportamiento gráfico de la función cuadrática y su derivada.

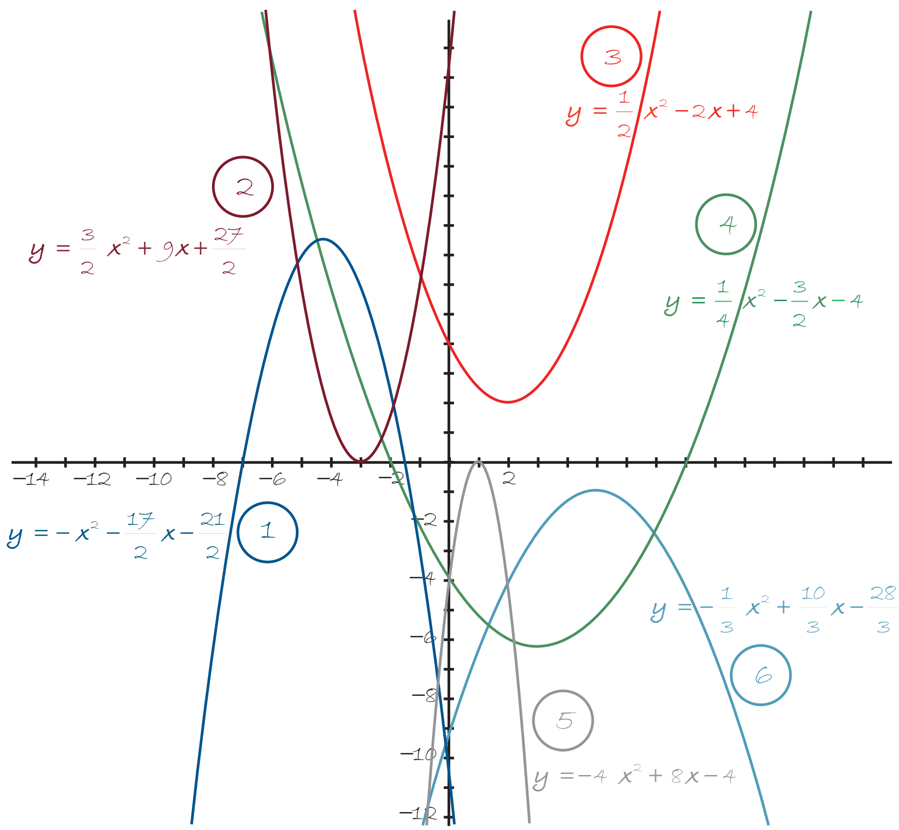
La gráfica de la función cuadrática es una parábola vertical; curva que entre sus propiedades cuenta con la de ser una curva simétrica con respecto a su eje vertical, eje en el cual se encuentra su vértice.

El vértice y la abertura que tiene la curva son rasgos característicos de cada parábola los cuales se ven reflejados de algún modo en los coeficientes a_0, a_1 y a_2 de su expresión formal:

$$y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

Observa la siguiente imagen donde graficamos seis parábolas con diferentes características. Estas fueron realizadas con un software de graficación al que se introdujeron las expresiones cuadráticas siguientes:

1	$y=y(x)=-x^2-\frac{17}{2}x-\frac{21}{2}$	2	$y=y(x)=\frac{3}{2}x^2+9x+\frac{27}{2}$
3	$y=y(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+4$	4	$y=y(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4$
5	$y=y(x)=-4x^2+8x-4$	6	$y=y(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{10}{3}x-\frac{28}{3}$



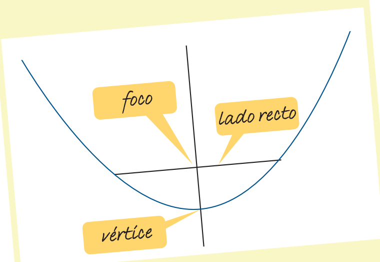
¡Toma nota!

Cuando estudiaste la **parábola vertical** en Geometría Analítica la conociste en la **forma canónica** de su ecuación $y-k=4p(x-h)^2$

¡Toma nota!

Las coordenadas del **vértice** $V(h, k)$ se observan en ella. El número $4p$ representa la longitud del **lado recto**, siendo p la distancia entre vértice y foco.

¡Toma nota!



El resultado que deseamos resaltar se refiere a la obtención de la gráfica de la parábola a partir de conocer la gráfica de su derivada, que es una función lineal, por tanto, una recta.

Ejemplifiquemos considerando tres de las parábolas dibujadas.

¡TOMA NOTA!

Para aplicar lo aprendido de Cálculo hasta este momento, deberemos desarrollar el **binomio al cuadrado** y obtener la función cuadrática $y=y(x)=ax^2+bx+c$

¡TOMA NOTA!

Recuerda de Álgebra el **binomio al cuadrado**:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

que aplicado a la forma canónica se ve así:

$$(x-h)^2=x^2-2xh+h^2$$

Ejemplo 1

Consideremos que queremos graficar la primera parábola

$$y=y(x)=-x^2-\frac{17}{2}x-\frac{21}{2}$$

utilizando la información gráfica de su derivada:

$$y'=-2x-\frac{17}{2}$$

Esta última es una recta que graficaremos como lo hemos propuesto en el Tema 1.1 del Modelo lineal, esto es, simplemente conociendo sus cortes con los ejes coordenados.

El corte con el eje y (vertical) es justo el coeficiente $-\frac{17}{2}$ que se obtiene al sustituir $x=0$ en la función derivada:

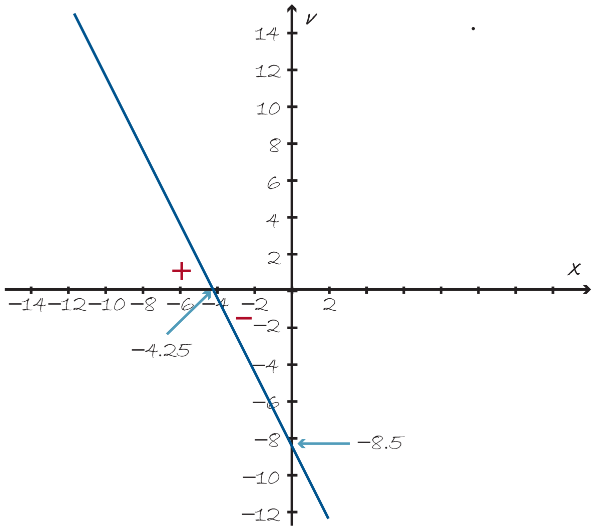
$$y'(0)=-2(0)-\frac{17}{2}=-\frac{17}{2}=-8.5$$

El corte con el eje x (horizontal) lo obtenemos igualando a 0 la función derivada y despejando x:

$$y'=-2x-\frac{17}{2}=0 \qquad -2x=\frac{17}{2} \qquad x=-\frac{17}{4}=-4.25$$

Por tanto, con los puntos $(-4.25,\ 0)$ y $(0,\ -8.5)$ dibujamos la derivada de la función cuadrática

$$y=y(x)=-x^2-\frac{17}{2}x-\frac{21}{2}$$



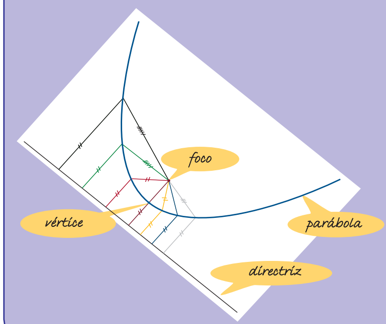
Esta imagen de la derivada de la función nos informa que la parábola correspondiente tiene en $x=-4.25$ un valor máximo, pues ahí los valores de la derivada pasan de ser positivos antes de $x=-4.25$ a ser negativos después de este valor, lo que significa que la gráfica de la función $y(x)$ es creciente antes de $x=-4.25$ y es decreciente después de él.

¿Sabías que?...

La parábola es una curva muy especial; pues tiene la siguiente propiedad:

todos sus puntos están a la misma distancia de un punto fijo (que se llama **foco**) y de una recta fija (que se llama **directriz**).

Por su parte, el punto medio de la distancia entre el foco y la directriz está en la parábola y se conoce como su **vértice**.



Este punto máximo coincide con el vértice de la parábola y encontramos sus coordenadas al sustituir $x=-4.25$ en la función $y(x)$, esto es, al evaluar la función ahí:

$$y=y(-4.25)=-(-4.25)^2-\frac{17}{2}(-4.25)-\frac{21}{2}=7.5625$$

Por tanto, el vértice, que es el punto máximo de la gráfica, tiene coordenadas $\left(-4.25,\ 7.5625\right)$.

Si ubicas mentalmente este punto máximo en la imagen anterior (de la recta derivada) observarás que nos resta conocer información importante de la parábola que se relaciona con su grado de "abertura"; nos referimos al corte de la parábola con el eje vertical y con el eje horizontal.

Para encontrar el corte en el eje vertical basta observar el coeficiente $-\frac{21}{2}$ en la función, ya que este valor se obtiene al sustituir $x=0$ y evaluar la función ahí:

$$y(0)=-(0)^2-\frac{17}{2}(0)-\frac{21}{2}=-\frac{21}{2}=-10.5$$

Por tanto, la parábola pasa por el punto $\left(0,\ -10.5\right)$ en el eje vertical y.

Para encontrar ahora el corte con el eje horizontal, igualamos a 0 la función, porque buscamos él o los valores de x donde $y=0$. Por tanto proponemos:

$$y(x)=-x^2-\frac{17}{2}x-\frac{21}{2}=0$$

o lo que es lo mismo:

$$x^2+\frac{17}{2}x+\frac{21}{2}=0$$

que reconocemos como una ecuación cuadrática cuyas soluciones encontramos utilizando la formula general.

Vale la pena que antes de proceder a utilizar esta fórmula simplifiquemos la expresión anterior multiplicando por 2 todos sus términos y aprovechando que a la derecha de la igualdad hay un 0 que multiplicado por 2 quedará nuevamente igual a 0:

$$2\left(x^2+\frac{17}{2}x+\frac{21}{2}\right)=2(0)$$

$$2x^2+17x+21=0$$

Aplicamos la fórmula general $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ sustituyendo los valores $a=2$, $b=17$ y $c=21$ en seguida:

$$x=\frac{-17\pm\sqrt{(17)^2-4(2)(21)}}{2(2)}=\frac{-17\pm\sqrt{289-168}}{4}$$

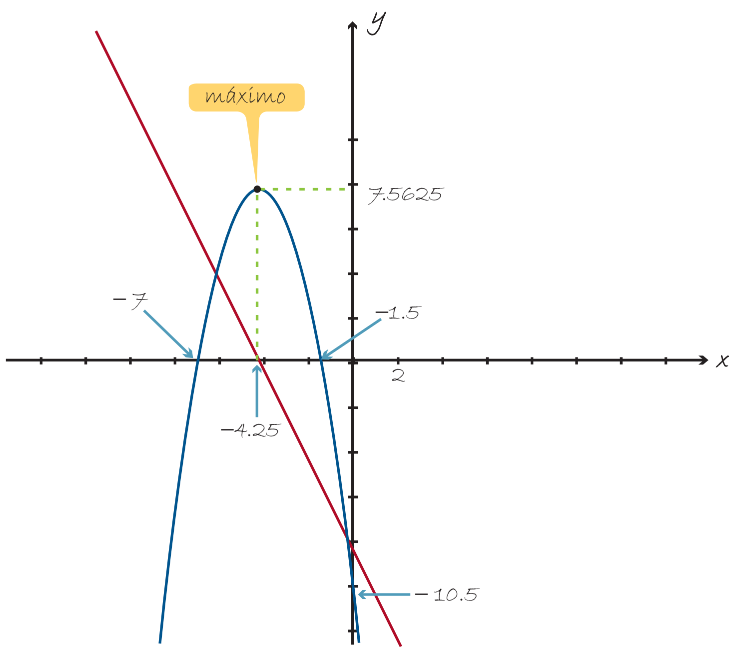
$$=\frac{-17\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{-17\pm 11}{4}=\begin{cases}-\frac{3}{2}\\ -7\end{cases}$$

Vale la pena observar que en este caso la expresión dentro del radical en la fórmula general resultó ser un número positivo; afortunadamente también es el cuadrado de un entero. Pero más que esto último, lo que deseamos resaltar es que siendo la cantidad b^2-4ac positiva, aparecieron dos soluciones de la ecuación cuadrática, una por cada uno de los signos $\pm$ que se utilizan en la fórmula general.

Se conoce como **discriminante** a la expresión b^2-4ac que aparece dentro del radical en la fórmula general y el hecho de que el discriminante sea positivo podemos relacionarlo con la existencia de dos raíces reales distintas para la ecuación cuadrática correspondiente.

En nuestro objetivo de graficar la parábola interpretamos esta información adicionalmente para la precisión en el trazado de la curva pues las dos raíces reales distintas de la ecuación cuadrática implican dos puntos en el eje x horizontal donde la parábola cruza este eje, a saber, los puntos con coordenadas $(-1.5,\ 0)$ y $(-7,\ 0)$.

Con ellos completamos el trazado de la gráfica de la parábola que hemos realizado de manera relacionada con la gráfica de su derivada (que es una recta).



¡TOMA NOTA!

Pocas, muy pocas ecuaciones cuadráticas tienen una **factorización** simple; como por ejemplo

$x^2-5x+6=0$

que se **factoriza** "por ensayo y error" así:

$(x-3)(x-2)=0$

o también

$2x^2+7x-15=0$

se **factoriza** "por tanteo":

$(2x-3)(x+5)=0$

¡TOMA NOTA!

Si las soluciones de la **ecuación cuadrática**

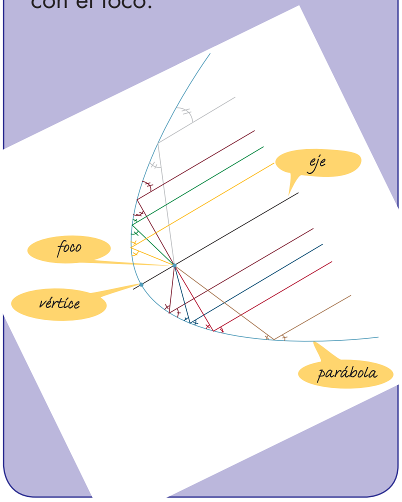
$ax^2+bx+c=0$

son irracionales o imaginarias nunca podrás dar con la **factorización** "por ensayo y error".

De hecho, aún y cuando las soluciones sean racionales, muchas veces es difícil dar con la **factorización** "por tanteo".

¿Sabías que?...

La propiedad que satisface la parábola de que sus puntos son **equidistantes** del **foco** y de la **directriz**, provoca que toda recta que sea paralela al eje de la parábola y que llega a ella en uno de sus puntos, va a formar el **mismo ángulo** con ella que el que forma el segmento que une ese punto con el foco.



Ejemplo 2

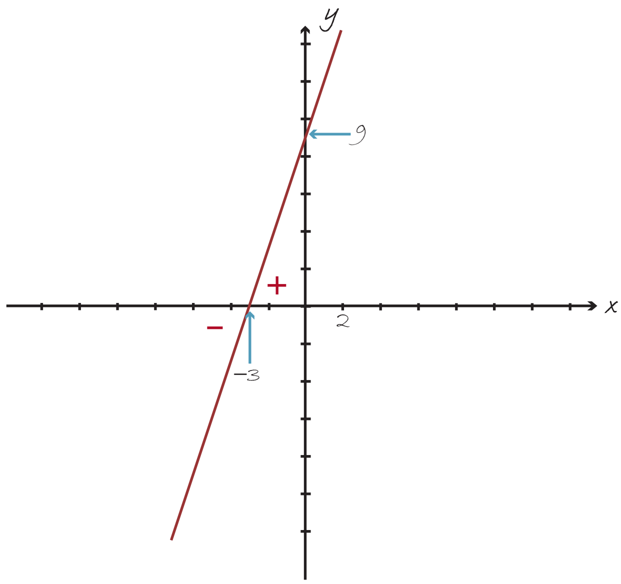
Ahora consideremos que buscamos conocer la gráfica de la segunda parábola

$$y = y(x) = \frac{3}{2}x^2 + 9x + \frac{27}{2}$$

a través de conocer la gráfica de su derivada, la recta

$$y'(x) = 3x + 9$$

Dibujamos esta recta conociendo sus cortes con los ejes coordenados.



Para encontrar el corte con el eje y vertical basta observar el coeficiente 9 que corresponde al sustituir $x = 0$ en la expresión $y' = 3x + 9$

Para encontrar el corte con el eje horizontal x debemos igualar la expresión y' a 0 y despejar x:

$$3x + 9 = 0 \text{ de donde } x = -3$$

Con los puntos obtenidos

$$(0, 9) \text{ y } (-3, 0)$$

graficamos la recta.

Esta imagen nos indica que en $x = -3$ la parábola que buscamos tendrá el punto mínimo, que coincide con su vértice. Las coordenadas del vértice son $(-3, \; y(-3))$ donde

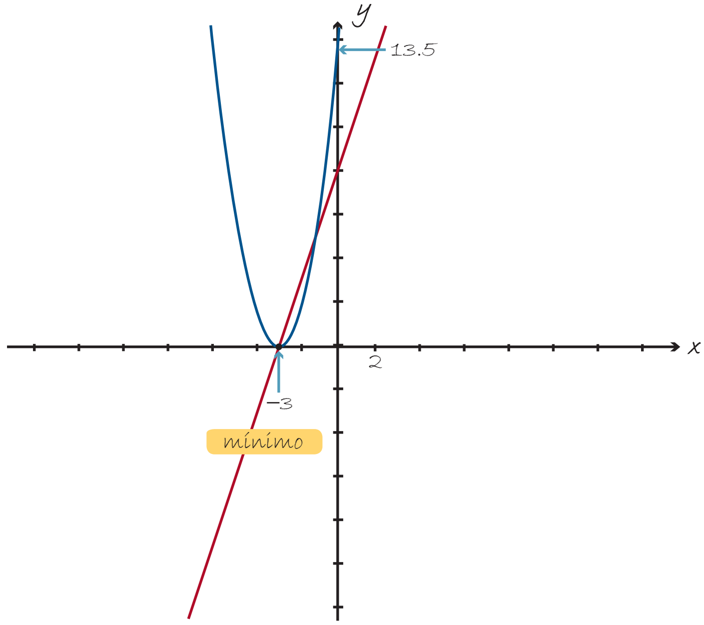
$$y(-3) = \frac{3}{2}(-3)^2 + 9(-3) + \frac{27}{2} = 0$$

Hemos encontrado que el vértice se encuentra sobre el eje x, en $(-3, 0)$ donde se tiene el punto mínimo de la gráfica. Para precisar más el trazado de la parábola $y(x)$ señalamos su corte con el eje y, el cual coincide con el coeficiente $\frac{27}{2}$. Este valor se obtiene cuando se sustituye $x = 0$ en la función o dicho en el lenguaje matemático, se evalúa la función en 0:

$$y(0) = \frac{3}{2}(0)^2 + 9(0) + \frac{27}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

Podemos ahora trazar la gráfica de la parábola $y = \frac{3}{2}x^2 + 9x + \frac{27}{2}$ relacionando ésta con la gráfica de su derivada, $y' = 3x + 9$.

Es notorio que el corte de la parábola con el eje x en este caso es sólo el punto $(-3,0)$ y es notorio también que la palabra "corte" no ilustra bien la situación en el sentido de que no se da un "cruce" de la parábola con el eje horizontal.



Pensemos sin embargo que con decir "corte con el eje x" estamos considerando puntos de la curva que se encuentran sobre el eje x. Encontrar estos puntos equivale a igualar a 0 la función:

$$y=f(x)=0$$

que en este caso nos lleva a la ecuación cuadrática

$$\frac{3}{2}x^2+9x+\frac{27}{2}=0$$

la cual, multiplicada por 2, se ve más simple:

$$3x^2+18x+27=0$$

Y dividida entre 3 se simplifica aún más:

$$x^2+6x+9=0$$

Si recuerdas el producto notable conocido como **binomio al cuadrado**, reconocerás que

$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$

que al igualarse a 0 genera la solución -3:

$$(x+3)^2=0 \qquad x+3=0 \qquad x=-3$$

Pero si acaso no recuerdas la expresión del binomio al cuadrado, siempre podrás resolver la ecuación cuadrática con la fórmula general

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(1)(9)}}{2(1)}=\frac{-6\pm\sqrt{0}}{2}=-3$$

Observa que en este caso la expresión dentro del radical b^2-4ac resultó ser igual a 0 al sustituir $a=1$, $b=6$ y $c=9$. El hecho de que en esta ocasión el discriminante b^2-4ac fuese igual a 0, obliga a que las dos soluciones de la ecuación cuadrática se reduzcan a una sola "que se repite" cuando se utiliza la disyuntiva del signo $\pm$ que aparece en la fórmula general (consecuencia de que $+0=-0=0$). Por tanto, $x=-3$ es una raíz doble (o repetida) de la ecuación cuadrática.

Tenemos entonces el caso de una ecuación cuadrática $x^2+6x+9=0$ que tiene una solución real repetida (o doble), $x=-3$ y observamos el comportamiento de la parábola correspondiente, a saber, que la curva llega al eje x en $x=-3$ pero no cruza a la zona negativa de y, y se regresa manteniéndose en la zona positiva de y.

¡TOMA NOTA!

La **única** manera de que el producto de 2 números (a y b) sea igual a 0, es que alguno de ellos (o ambos) sea 0.

¡TOMA NOTA!

Cuando resolvemos $(x-3)(x-2)=0$ se iguala a 0 cada factor: $x-3=0$ y $x-2=0$ y por tanto $x=3$ y $x=2$

¡TOMA NOTA!

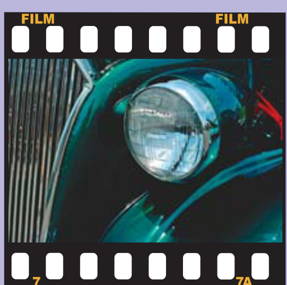
El argumento de igualar a 0 **no es válido** si el producto de los números es otro número diferente de 0... No porque $(x-3)(x-2)=1$ puedes igualar $x-3=1$ y $x-2=1$

¿Sabías que?...

Las antenas parabólicas son superficies en el espacio que se forman por la rotación de una parábola sobre su eje. De esta manera, las antenas usan la propiedad de la parábola para concentrar las ondas electromagnéticas que llegan a esta superficie de forma paralela a su eje. Las señales se concentran en un receptor colocado en el foco de la parábola y de este modo se hace posible la transmisión que disfrutamos en los televisores.

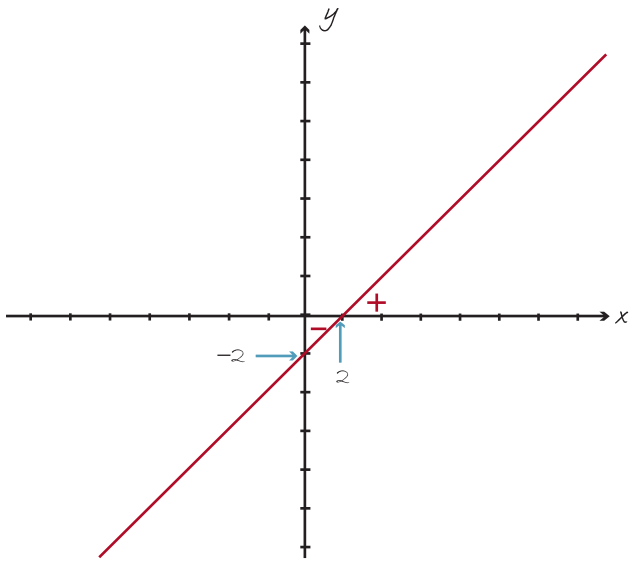
¿Sabías que?...

La misma propiedad de la parábola puede ser aprovechada de manera diferente. En su foco puede colocarse un emisor en vez de un receptor, por ejemplo en los faros de algunos coches, la forma parabólica permite que la luz emitida por una bombilla colocada en el foco de la parábola proyecte haces de luz paralelas y horizontales, alumbrando el camino.



Ejemplo 3

Por último, ejemplifiquemos el trazado de la gráfica de la parábola $y = y(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$ a través del trazado de su derivada $y' = x - 2$.



Primero dibujamos la derivada, que es una recta cuyo corte con el eje y es -2, ya que este valor se obtiene al sustituir $x = 0$ en la derivada. También, el corte con el eje x lo obtenemos fácilmente al igualar a 0 la derivada y despejar la variable x:

$$y' = x - 2 = 0$$

Luego, $x = 2$

Con estos puntos $(0, -2)$ y $(2, 0)$, dibujamos la recta.

Esta imagen nos informa de la existencia de un mínimo para la gráfica de la función $y = y(x)$ en $x = 2$

Encontramos ese punto al evaluar la función en $x = 2$:

$$y = y(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 4 = 2$$

y reconocemos en el punto mínimo $(2, 2)$ el vértice de la parábola.

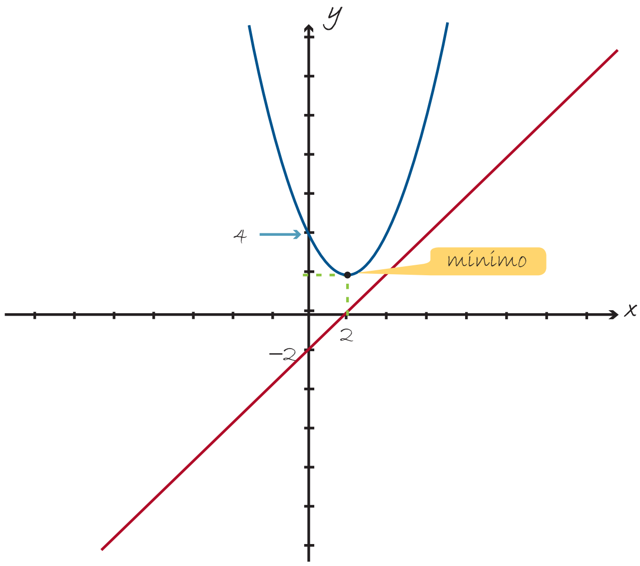
Siendo $(2, 2)$ un mínimo, al intentar trazar la parábola se observa que ésta no cortará al eje horizontal, sin embargo al vertical sí, pues toda parábola lo hace necesariamente. Se encuentra con sólo sustituir $x = 0$ en la función, esto es, evaluando

$$y(0) = \frac{1}{2}(0)^2 + 2(0) + 4$$

resultando ser el coeficiente 4 en la función

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$$

Con este punto trazamos la función cuadrática en relación con su derivada.



El hecho de que esta gráfica no corte el eje x, manteniéndose en la zona positiva del plano (cuando $y>0$ se puede reconocer al resolver la ecuación cuadrática que resulta de la igualación a 0 de la función, como hicimos en los ejemplos pasados

$$y(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+4=0$$

$$\frac{1}{2}x^2-2x+4=0$$

multiplicamos por 2 para simplificar esta ecuación:

$$2\left(\frac{1}{2}x^2-2x+4\right)=2(0), \quad \text{esto es,} \quad x^2-4x+8=0$$

Aplicamos la fórmula general con $a=1$ $b=-4$ y $c=8$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(8)}}{2(1)}=\frac{4\pm\sqrt{16-32}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-16}}{2}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{(16)(-1)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{(16)(-1)}}{2}=\frac{4\pm 4i}{2}$$

En el procedimiento anterior hemos debido aceptar la expresión $\sqrt{-1}$ como la unidad imaginaria, que es denotada por la letra i y nos interesa observar que el discriminante de la ecuación $b^2-4ac=-16$ resultó ser negativo en esta ocasión, lo que no arroja soluciones reales para la ecuación. Las soluciones son números complejos o imaginarios que no tienen una representación en el sistema coordenado real donde dibujamos la función y su derivada. La interpretación de obtener un discriminante negativo en la solución de la ecuación cuadrática consiste en que la parábola no corta al eje x, como habíamos detectado correctamente antes, al trazar la gráfica de la parábola obtenida a partir de la de su derivada.

¡TOMA NOTA!

En Geometría Analítica, **la parábola vertical** de vértice en el punto $V(3,-1)$ y lado recto 8 tiene ecuación:

$$y-(-1)=8(x-3)^2$$

$$y+1=8(x-3)^2$$

¡TOMA NOTA!

Para "ver" esta ecuación como **función cuadrática**, debemos despejar la variable y además de desarrollar el binomio al cuadrado:

$$y=8(x-3)^2-1$$

$$y=8(x^2-6x+9)-1$$

$$y=8x^2-48x+71$$

¡TOMA NOTA!

Encontramos su vértice si derivamos e igualamos a 0:

$$y'=16x-48=0$$

luego $x=3$

y sustituimos para obtener la coordenada y:

$$y=8(3)^2-48(3)+71=-1$$

El vértice es

$$V(3,-1)$$

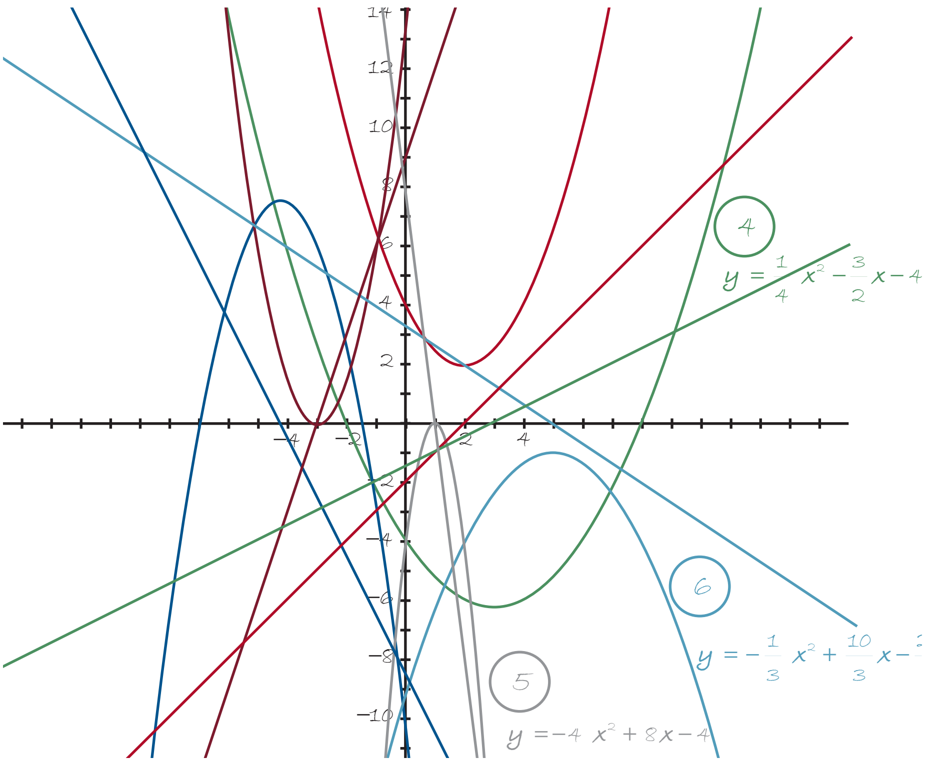
...como debía suceder.

Sintetizamos los resultados que hemos tratado a este momento para tener una referencia práctica en su aplicación.

Graficando la función cuadrática

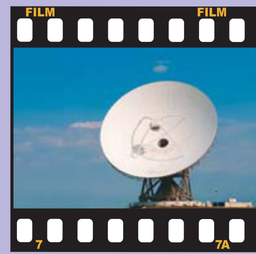
- La función $y = y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ representa una parábola vertical.
- Su derivada $y'(x) = a_1 + 2a_2 x$ es una recta cuyo corte con el eje x señala la coordenada x donde la parábola tiene su vértice, el cual juega el papel de punto máximo, o bien, mínimo de la gráfica.
- La coordenada y del vértice se calcula al evaluar la función $y(x)$ en ese x previamente identificado.
- La decisión de si la parábola es cóncava hacia arriba o hacia abajo se implica directamente de la decisión de punto máximo o mínimo para las coordenadas del vértice.
- El corte de la gráfica de la parábola con el eje y coincide con el coeficiente a_0 en la función, pues éste corresponde con evaluar $y(0) = a_0$.
- La ecuación cuadrática que se genera al igualar a 0 la función, $y(x) = 0$ determina los cortes con el eje x de la función.
- Calculando el discriminante D de la ecuación $y(x) = 0$ se decide si la parábola corta o no al eje x según que ocurra lo siguiente:
  - ✓ $D > 0$, 2 cortes eje x, 2 raíces reales distintas.
  - ✓ $D = 0$, 1 corte eje x, una raíz real repetida.
  - ✓ $D < 0$, no hay cortes eje x, la parábola completamente arriba del eje x, o bien, completamente abajo del eje x.

Te mostramos finalmente la gráfica de las 6 parábolas con sus correspondientes derivadas y, aunque pareciera una imagen confusa, esperamos que puedas visualizar lo que está ofreciendo y que hayas ganado la habilidad de transitar de gráficas a expresiones algebraicas y cálculos numéricos. Para comprobarlo, te proponemos que realices el análisis de las 3 parábolas restantes, tal como ya lo hemos realizado en los 3 ejemplos anteriores.



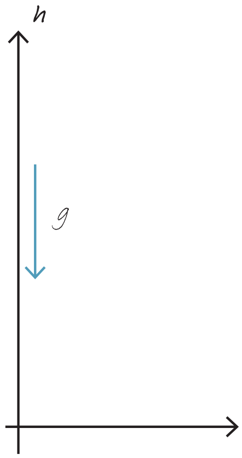
¿Sabías que?...

Entre las aplicaciones más importantes de la parábola se encuentra su uso en antenas de radares para detección a larga distancia. Su funcionamiento se basa en producir una especie de "eco" utilizando ondas electromagnéticas. Se emite un impulso de radio que al reflejarse en el objetivo que se rastrea, regresa al radar en la misma posición del emisor. Así es posible captar información como distancia, altitudes, velocidades de objetos estáticos e incluso en movimiento, como aeronaves o barcos.



Cuarto resultado: caída libre y parábolas

El resultado que queremos explotar ahora es en referencia al contexto real del movimiento rectilíneo para el caso en que la velocidad está modelada mediante una función lineal.



En nuestro análisis de la situación problema, por una parte construimos la antiderivada de la velocidad, que es una función polinomial de grado 2, y por otra parte, verificamos que la derivada de la velocidad es constante.

Estamos ante lo que en la Física se conoce como un Movimiento Uniformemente Acelerado. Es en relación con este contexto real que deseamos destacar la aportación del Cálculo.

Supongamos la actuación de la fuerza de gravedad que afecta la velocidad con la que cae un cuerpo enmarcado en el evento de caída libre.

Si fijamos un sistema de referencia como la figura, donde la altura del cuerpo se mide a partir del suelo, entonces, la fuerza de gravedad actúa en el sentido contrario, y por tanto, indicamos la aceleración constante como

$$a(t) = g = -9.8 \text{ metros/segundo cuadrado,}$$

esto en nuestro sistema métrico decimal.

Pero sabemos que esta función (que es una función constante) representa la razón de cambio de la velocidad, esto es, si antiderivamos la aceleración obtendremos la función de velocidad.

$$v(t) = -9.8t + c$$

antiderivamos

$$a(t) = -9.8$$

donde la constante c cumple con

$$v(0) = -9.8(0) + c = c$$

luego, c representa la velocidad inicial del cuerpo; escribamos

$$v(t) = -9.8t + v_0 \quad \text{o bien,} \quad v(t) = v_0 - 9.8t$$

¡TOMA NOTA!

Llamemos **parábola base** a la parábola vertical más "simple" de todas:

$y = x^2$

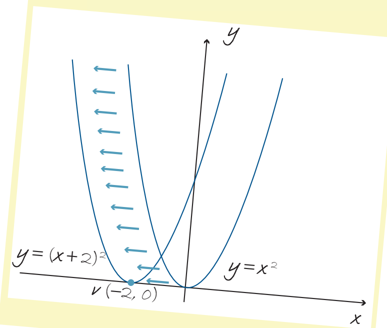
Si en la parábola base sustituimos la variable x por $x+2$ obtenemos la nueva expresión

$y = (x+2)^2$

¡TOMA NOTA!

En $y = (x+2)^2$ el **efecto gráfico** que se obtiene es una **traslación horizontal** de 2 unidades hacia la **izquierda**. Ahora el vértice se encuentra en: $v(-2, 0)$

¡TOMA NOTA!



¡TOMA NOTA!

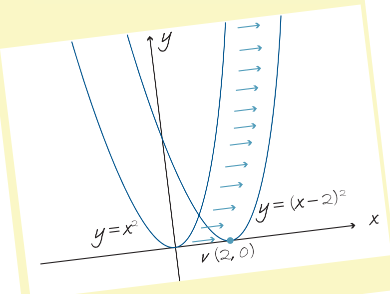
Llamemos
parábola base
a la parábola vertical
más "simple" de todas:
$y=x^2$

Si en la parábola base
sustituimos la variable
x por $x-2$
tenemos la nueva expresión
$y=(x-2)^2$

¡TOMA NOTA!

En $y=(x-2)^2$
el **efecto gráfico**
que se obtiene es una
traslación horizontal
de 2 unidades
hacia la **derecha**.
Ahora el vértice se
encuentra en
$V(2,0)$

¡TOMA NOTA!



Nuevamente, sabemos que esta función (que es lineal) representa la razón de cambio de la posición del cuerpo, en este caso, la altura a la que éste se encuentra con respecto al suelo. Denotando esa altura como se hace tradicionalmente, con $h(t)$ podemos construir la función altura si antiderivamos la velocidad.

v_0 es una constante

antiderivamos

$$h(t) = v_0 t - 9.8\frac{t^2}{2} + C = v_0 t - 4.9t^2 + C$$

$$v(t) = v_0 - 9.8t$$

donde la constante C sabemos que cumple con

$$h(0) = v_0(0) - 4.9(0)^2 + C$$

$$h(0) = C$$

luego, C representa la altura inicial del cuerpo; escribamos por tanto

$$h(t) = v_0 t - 4.9t^2 + h_0$$

o lo que es lo mismo,

$$h(t) = h_0 + v_0 t - 4.9t^2$$

Las expresiones que hemos construido a través de accionar el proceso algorítmico de antiderivación podemos representarlas también en términos del proceso de derivación como ilustramos en seguida:

derivamos

$$h(t) = h_0 + v_0 t - 4.9t^2$$

derivamos

$$h'(t) = v(t) = v_0 - 9.8t$$

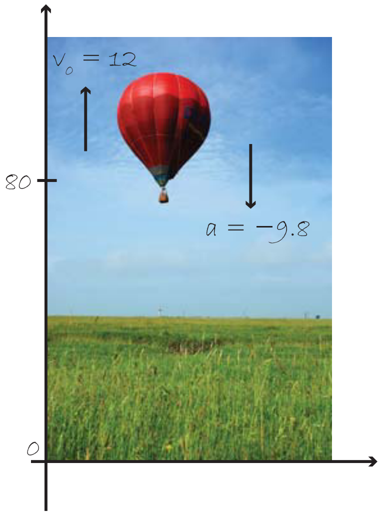
$$v'(t) = a(t) = -9.8$$

y esta información es suficiente para resolver el problema de predicción que nos ocupa en este contexto real, como lo ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Un globo se encuentra a una altura de 80 metros sobre el suelo y va subiendo a razón de 12 metros/segundo. En ese momento preciso se suelta un paquete. . .

a) ¿Cuáles son las funciones que modelan este evento?



De acuerdo al sistema coordenado mostrado en la figura, podemos precisar tres datos: que la altura inicial del paquete es 80 metros, que en el momento en que se suelta el paquete, éste lleva una velocidad inicial positiva (como la del globo) de 12 metros/segundo y finalmente, que en el evento está actuando la aceleración debida a la fuerza de gravedad, con -9.8 metros/segundo² empujando hacia abajo al paquete.

De lo anterior, construimos las funciones que modelan la situación activando el proceso de antiderivación:

valor inicial

$$a(t) = -9.8 \xrightarrow{\text{antiderivamos}} v(t) = 12 - 9.8t \xrightarrow{\text{antiderivamos}} h(t) = 80 + 12t - 4.9t^2$$

Con ellas debemos poder predecir distintas cuestiones en este evento, entre ellas las siguientes:

b) ¿Cuánto tiempo tardará el paquete en llegar al suelo?

Para que el paquete llegue al suelo requerimos que la posición x sea 0, de ahí que se construya la ecuación cuadrática:

$$0 = 80 + 12t - 4.9t^2$$

$$4.9t^2 - 12t - 80 = 0$$

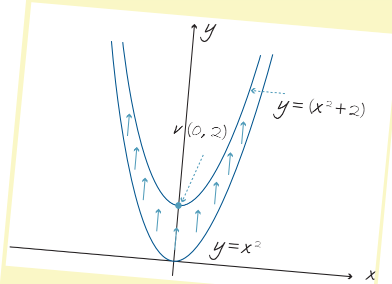
¡Toma nota!

Si en la **parábola base**, $y = x^2$
sumamos la cantidad 2
a la expresión,
tenemos la nueva expresión
$y = x^2 + 2$

¡Toma nota!

En $y = x^2 + 2$
el efecto gráfico
que se obtiene es una
traslación vertical
de 2 unidades
hacia **arriba**.
Ahora el vértice se
encuentra en
$v(0, 2)$

¡Toma nota!



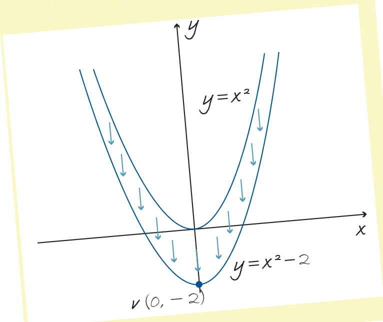
¡Toma nota!

Si en la **parábola base,** $y=x^2$ restamos la cantidad 2 a la expresión, tenemos la nueva expresión $y=x^2-2$

¡Toma nota!

En $y=x^2-2$ el **efecto gráfico** que se obtiene es una **traslación vertical** hacia **abajo** de 2 unidades. Ahora el vértice se encuentra en $v(0,-2)$

¡Toma nota!



la cual resolvemos utilizando la fórmula general:

$$t=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(4.9)(-80)}}{2(4.9)}$$

$$t=\frac{12\pm\sqrt{144+1568}}{9.8}\approx\frac{12\pm41.3763}{9.8}$$

Obtenemos las soluciones aproximadas:

$$t\approx\frac{12+41.3763}{9.8}\approx 5.4465 \quad y \quad t\approx\frac{12-41.3763}{9.8}\approx-2.9975$$

de las cuales descartamos la negativa porque no tiene sentido en el contexto del problema.

Concluimos que el paquete tarda prácticamente 5.4465 segundos en llegar al suelo.

c) ¿Con qué velocidad llega al suelo el paquete?

Para responder, basta evaluar la función de velocidad en el tiempo en que llega al suelo:

$$v(5.4465)=12-9.8(5.4465)=-41.3757$$

Por tanto, el paquete golpea el suelo con una velocidad de prácticamente -41 metros/segundo; el signo negativo indica la oposición con el sentido que señala el eje de la altura.

d) ¿Qué altura máxima alcanzó el paquete antes de comenzar su descenso?

El paquete sigue subiendo mientras la gravedad actúa hasta hacer que se detenga en un cierto instante y comience a bajar. Ese instante es aquél donde la velocidad es igual a 0.

Lo obtenemos igualando a 0 la función de velocidad:

$$v(t)=12-9.8t=0$$

de donde $12=9.8t$ *y así se obtiene* $t=\dfrac{12}{9.8}\approx1.2245$

En ese valor del tiempo el paquete llega a su altura máxima, la cual obtenemos evaluando la función de altura:

$$\begin{aligned}h(1.2245)&=80+12(1.2245)-4.9(1.2245)^2\\&=87.3469\end{aligned}$$

El paquete subió prácticamente 7.3469 metros al soltarse el globo desde a la altura de 80 metros antes de comenzar a bajar.

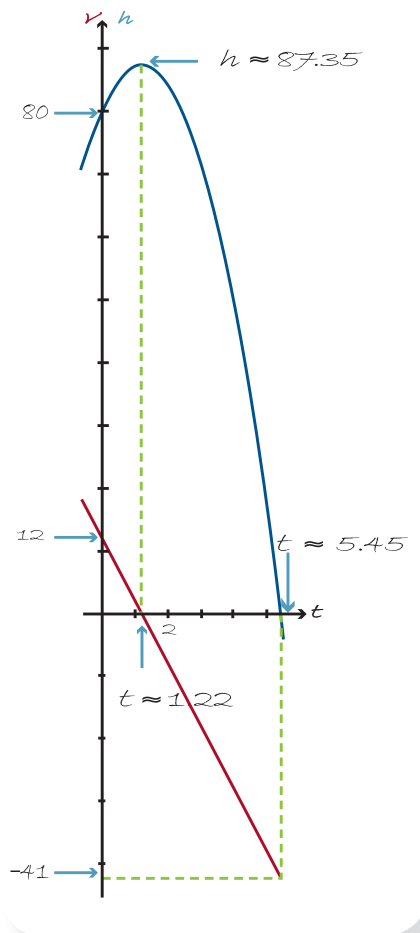
e) Realiza las gráficas de velocidad y posición para describir el movimiento que experimenta el paquete desde que es soltado hasta llegar al suelo.

En la siguiente imagen se representa la situación variando en el eje del tiempo.

Las gráficas de velocidad y de altura del paquete manifiestan que el paquete sube y baja en la vertical en correspondencia con el signo positivo y luego negativo de la velocidad.

La altura máxima del paquete se alcanza cuando la velocidad es 0, *ocasionando que en un instante el sentido del movimiento cambie de ir hacia arriba a ir hacia abajo.*

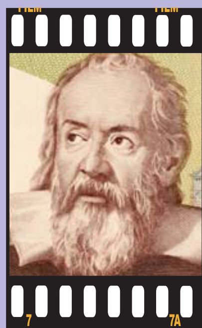
El instante en que cae el suelo se manifiesta por el corte con el eje horizontal de la función de altura y el dato de la velocidad de caída se representa con un punto en la gráfica de velocidad en la zona negativa de la misma.



¿Sabías que?...

Galileo (1564 –1642) propuso la forma en que varía la velocidad en la caída libre de los cuerpos argumentando sobre la simplicidad con que se comporta la naturaleza.

No hay forma más simple de volar que la de las aves, ni de nadar que la de los peces, así, no hay forma más simple de caer que con una variación de la velocidad tan simple como aquélla donde a intervalos iguales de tiempo (cualesquiera que éstos sean) correspondan aumentos iguales de la velocidad.



La velocidad cambia de manera uniforme…

Una pregunta simple… ¿cómo varía la velocidad en la caída libre de los cuerpos?… recibió una respuesta simple del científico representativo de su época.

¿Cuál hubiera sido la respuesta de Galileo a las nuevas preguntas que surgen y se enredan en la evolución del conocimiento científico actual?

¿Dónde ha quedado la simplicidad en nuestro entorno?

Síntesis

El lenguaje simbólico en Matemáticas: Modelo cuadrático

Hemos explicitado cuatro resultados relacionados con la función cuadrática y su derivada. Es momento de establecer formalmente este modelo y proceder a la aplicación del mismo explotando su representación algebraica, gráfica y numérica.

Utilizando la simbología matemática desprendemos el significado que el contexto real del movimiento rectilíneo nos ha proveído en las situaciones analizadas y ahora reconocemos las típicas variables x y y.

Podemos llamar $y = f(x)$ a la función cuadrática que modela matemáticamente a la magnitud de interés y, la cual depende de la magnitud de referencia x, la posición y el tiempo, como lo manejamos anteriormente.

De este modo, la razón de cambio de y con respecto a x se modela matemáticamente con la derivada $f'(x)$ la cual es una función lineal que en cada valor de x calcula la razón de cambio instantánea (en un instante) de y respecto a x.

A su vez esta última (la derivada), como función que es en sí misma, admite que obtengamos su correspondiente razón de cambio, la cual se obtiene aplicando nuevamente el procedimiento algorítmico de derivación. Estamos entonces hablando de derivar la derivada, aplicación repetida que se denota como lo ilustramos en seguida:

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x$$

$$f''(x) = 2a_2$$

Observa que hemos utilizado la notación $f'(x)$ que se lee "efe prima" de x para la derivada y la notación $f''(x)$ que se lee "efe biprima" de x para la segunda derivada, es decir, para la derivada de la derivada de $f(x)$.

Podemos reconocer en el conjunto de funciones anterior al **Modelo Cuadrático**:

"Modelo matemático que representa la situación de una magnitud cuya razón de cambio está representada por el Modelo lineal."

¿Sabías que?...

Richardson (1881–1953) publica en 1967 su artículo ¿Qué tan larga es la costa de Gran Bretaña? Este matemático, físico, meteorólogo y psicólogo inglés, además de ser un reconocido **pacifista**, fue pionero en el estudio de las causas para la guerra con el fin de prevenirlas. Fue en ese contexto que se dio su interés científico por investigar una relación entre la probabilidad de que dos países fueran a la guerra y la longitud de su frontera común.

Mientras hacía su estudio, los datos le hicieron percatarse que había una variación muy considerable en las longitudes reportadas de las fronteras internacionales. Investigó entonces sobre la dependencia de la longitud de una frontera con respecto a la unidad de medida.

Uno puede imaginarse que, suponiendo una unidad de medida se tenga asignada la longitud de la costa de Gran Bretaña; luego, si esa unidad de medida se parte en 2 y se vuelve a medir la costa, uno esperaría un valor mayor que el primero. Si se repite la acción, partiendo en 2 la unidad y volviendo a medir, uno esperaría un número mayor aún que el anterior…

Mientras más pequeña sea la unidad… mayor el resultado de la medición. Richardson concluye que la longitud de la costa no está bien definida, crece sin restricción a medida que la unidad de medida es menor.

Aplicación: La función cuadrática en contextos reales.

Aplicamos el aprendizaje de la relación entre la gráfica de una función cuadrática y la de su derivada, función lineal, en contextos reales para reafirmar su utilidad en la predicción de diversos eventos.

Caso 1. El ingreso total y marginal en Economía

En los estudios económicos se describe la variación de una cantidad y con respecto a otra cantidad x en términos de varios conceptos, entre ellos, el de **valor marginal**, el cual se puede entender como la variación de y "en el margen", esto es, para pequeñas variaciones de x a partir de un valor dado. El concepto matemático correspondiente es la **derivada**, la razón de cambio "instantánea" de y con respecto a x.

Una **función de demanda** $y=f(x)$ es una función positiva que establece el precio unitario de cierto producto del cual se demandan x unidades.

Al multiplicar el precio de cada unidad por el número de unidades que se demandan se construye la función **ingreso total:** $R(x)=xf(x)$.

Es útil pensar en la razón de cambio del ingreso total con respecto al cambio en la cantidad demandada x; pues por ejemplo, valores positivos de ésta sugieren aumentar x. El **ingreso marginal** es la derivada $R'(x)$ del ingreso total con respecto a x.

Considera la función lineal $y=f(x)=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x$ como función de demanda y grafica tanto la función de ingreso total como la función de ingreso marginal para establecer relaciones entre ellas.

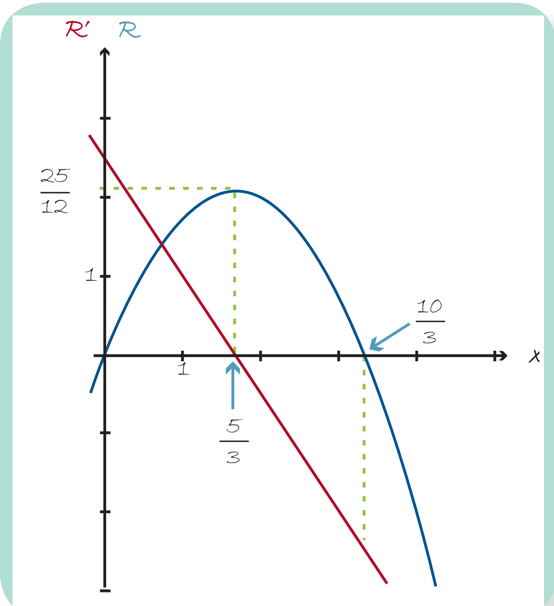
La función de ingreso total se obtiene multiplicando por x la función de demanda:

$$R(x)=xf(x)=x\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x\right)=\frac{5}{2}x-\frac{3}{4}x^2$$

Por su parte, la función de ingreso marginal es su derivada:

$$R'(x)=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x$$

Graficamos ambas funciones en el mismo sistema coordenado en seguida.



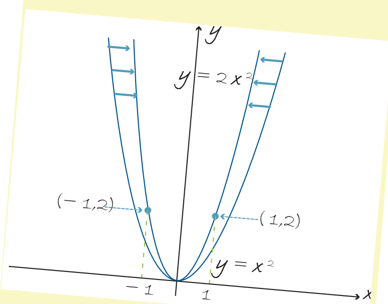
¡Toma nota!

Si en la **parábola base**, $y=x^2$ multiplicamos el término x^2 por una cantidad **positiva** y **mayor** a 1, digamos por ejemplo 2, tenemos la nueva expresión $y=2x^2$

¡Toma nota!

En $y=2x^2$ el **efecto gráfico** que se obtiene es una **reducción** en la abertura de la parábola base. En $x=\pm1$ se tiene ahora $y=2$ (y no $y=1$ como antes).

¡Toma nota!



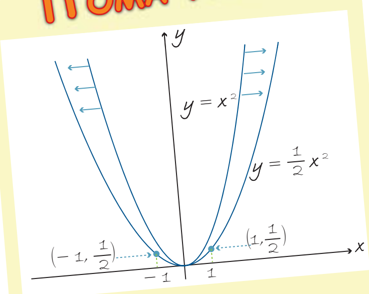
¡Toma nota!

Si en la **parábola base**,
$y = x^2$
multiplicamos el término x^2
por una cantidad **positiva**
y **menor** a 1,
digamos por ejemplo $\frac{1}{2}$,
tenemos la nueva expresión
$y = \frac{1}{2}x^2$

¡Toma nota!

En $y = \frac{1}{2}x^2$
el **efecto gráfico**
que se obtiene es una
ampliación en la abertura
de la parábola base.
En $x = \pm 1$ se tiene ahora $y = \frac{1}{2}$
(y no $y = 1$ como antes).

¡Toma nota!



Se observa en la figura que el ingreso total está aumentando a medida que el valor de x *aumenta hasta llegar al valor de* $\frac{5}{3}$ *momento en que el ingreso marginal es* 0, *dejando de ser positivo y pasando a ser negativo.*

En ese preciso valor de x *se tiene el valor máximo del ingreso total, que es igual a* $\frac{25}{12}$.

Cabe observar además que la función de ingreso total debe ser considerada en la zona en la que este ingreso es positivo, a saber, para valores de x *de* 0 *a* $\frac{10}{3}$.

Los dos valores importantes de x *en las gráficas se obtienen al igualar función y derivada a* 0, *que en este caso corresponden con las funciones de ingreso total e ingreso marginal.*

Realizamos estos procedimientos algebraicos. Encontremos el corte con el eje x *de la función ingreso total:*

$$R(x) = x\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}x\right) = \frac{5}{2}x - \frac{3}{4}x^2 = 0$$

de donde conviene trabajar con la expresión factorizada

$$x\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}x\right) = 0$$

y cada factor se iguala a 0:

$$x = 0 \text{ y } \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x = 0$$

despejamos $$\frac{5}{2} = \frac{3}{4}x$$

$$20 = 6x \quad \text{y así} \quad x = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

Encontremos ahora el corte con el eje x *de la función ingreso marginal:*

$$R'(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x = 0$$

Despejamos: $\frac{5}{2} = \frac{3}{2}x$ y $x = \frac{5}{3}$

Para encontrar el valor máximo del ingreso total se evalúa esta función en el valor de x *que hemos encontrado:*

$$R\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\left(\frac{5}{3}\right)\right) =$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{12}$$

tal como se encuentra señalado en la gráfica.

Caso 2. La prueba de fuerza física en una feria

En las ferias se ha popularizado un juego para demostrar la fuerza física del hombre. Se trata de un artefacto vertical en cuya base se tiene una palanca para ser golpeada con un martillo e impulsar una esfera de hierro hacia arriba. Dependiendo de la fuerza aplicada, la esfera se desliza en un poste vertical. La meta es aplicar la mayor fuerza posible para que la esfera llegue a golpear la campana que se encuentra en el extremo superior del artefacto y ganar el premio.

Consideremos que cierto hombre aplica una fuerza de 27 kilogramos; siendo así, la posición a la que se encuentra la esfera (medida desde la palanca en la base del poste) está dada por la función cuadrática

$$x(t) = 13.5t - 9.8t^2$$

donde t representa el tiempo medido en segundos y x representa la posición medida en metros.

Si la campana está situada a 4.5 metros, ¿resulta suficiente la fuerza de 27 kilogramos para hacerla sonar?

Para hacer sonar la campana necesitamos asegurarnos que la posición alcanzada por la esfera sea mayor o igual a la altura de la campana de 4.5 metros.

Podemos calcular la altura máxima que alcanza la esfera si su posición está modelada con la función cuadrática dada, pues dicha altura máxima es la posición que alcanza justo cuando su velocidad es 0.

La velocidad que lleva la esfera se calcula con la derivada de la función de posición:

$$v(t) = x'(t) = 13.5 - 19.6t$$

Igualamos a 0 la velocidad y despejamos el tiempo:

$$13.5 - 19.6t = 0 \quad \text{luego} \quad 13.5 = 19.6t \quad \text{y así}$$

$$t = \frac{13.5}{19.6} = 0.689$$

Debemos ahora evaluar la posición en este tiempo:

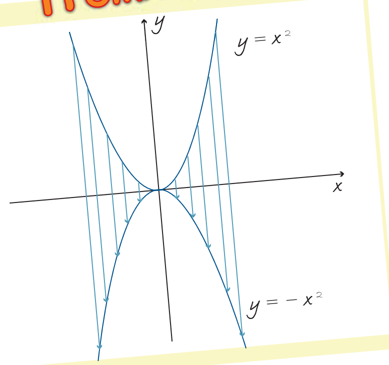
$$x(0.689) = 13.5(.689) - 9.8(.689)^2 = 4.6492342$$

¡Toma nota!

Si en la **parábola base**
$y = x^2$
multiplicamos por -1
al término **cuadrático**,
obtenemos la nueva expresión
$y = -x^2$

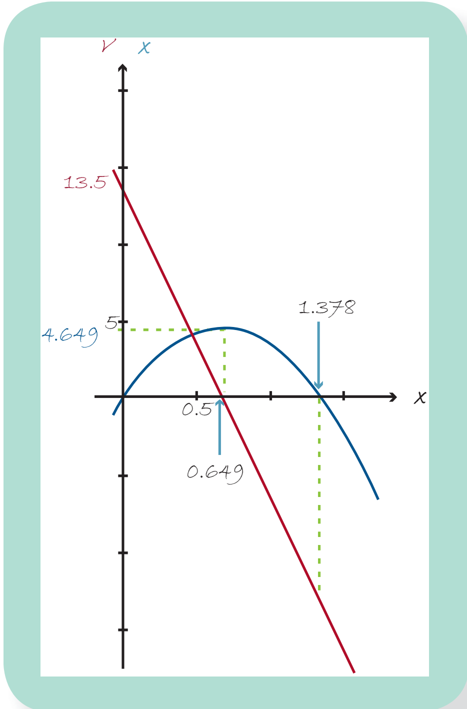
El **efecto gráfico** es una
reflexión
respecto al eje x.

¡Toma nota!



¡Toma nota!

Si además de esta multiplicación por
-1 y reflexión sobre el eje x,
se multiplica la expresión
$y = x^2$
por un número mayor o menor a 1,
la abertura de la parábola se ve
reducida o ampliada.



Habiendo comprobado que la posición de la esfera excede la altura de la campana, podemos predecir que efectivamente ésta sonará debido a la fuerza aplicada por el hombre.

Agregamos una imagen de las gráficas de velocidad y posición de la esfera para interpretar visualmente la información obtenida. Nuevamente aquí tenemos un punto máximo correspondiente con el corte de la derivada con el eje horizontal y el cambio de signo en la misma de positivo a negativo. Cabe observar además que ambos gráficos deben ser considerados para valores de t *entre* 0 *y* 1.378 *segundos, que es el tiempo en que la esfera ha regresado a la base.*

Caso 3. Un terreno rectangular óptimo

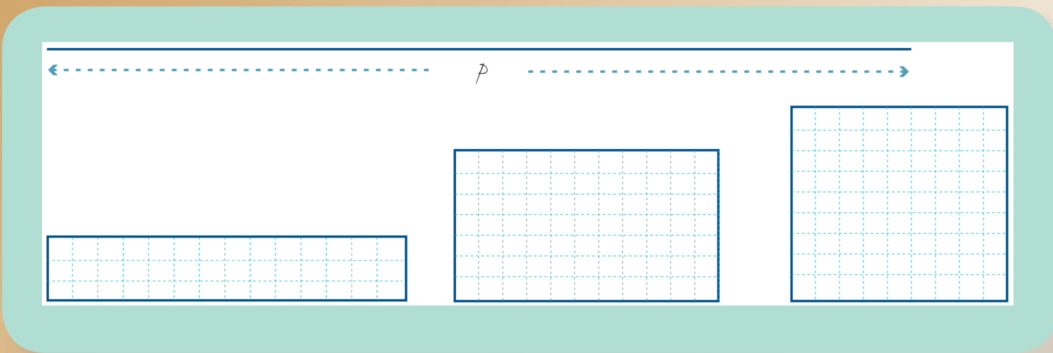
Una problemática que siempre ha sido tema importante en la humanidad es la concerniente a optimizar algún hecho; es decir, buscar el mejor provecho de realizar algo o de obtener algo. Esta ha sido una problemática a la que el Cálculo se aboca cuando la optimización se refiere a encontrar el valor máximo o mínimo de una cierta magnitud: maximizar áreas, minimizar costos, maximizar ganancia, minimizar tiempos, etcétera.

En las aplicaciones que hemos visto se ha tratado con esta problemática en áreas como Economía y Física. Toca ahora tratar un caso relacionado con la Geometría: la posibilidad de optimizar el área de un rectángulo (pudiese ser un terreno) con una longitud fija como perímetro.

Si no tienes dificultad en aceptar que un cuadrado es un caso particular de rectángulo, probablemente puedas considerar que el cuadrado sea la solución del problema justificando de manera intuitiva que el cuadrado encierra más área que un rectángulo del mismo perímetro. Sin embargo, a veces nuestras intuiciones nos traicionan, así que propongamos el problema para resolverlo con las herramientas que hemos construido.

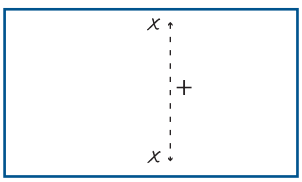
El problema consiste en que, dada una longitud fija p, se encuentre el rectángulo de mayor área que tenga esa longitud como su perímetro. Observa que en esta ocasión hemos dejado el dato del perímetro como una constante denotada por la letra p, sin darle un valor numérico particular, estamos proponiendo el establecer el resultado en una forma general.

Consideremos la longitud p siguiente y tracemos algunos rectángulos con ella que nos transmitan la idea de que aún con igual perímetro no encierran la misma área:



Encuentra cuál de los rectángulos posibles de perímetro p encierra la mayor área.

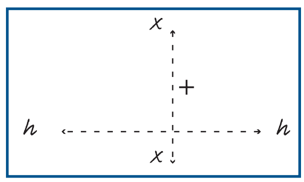
Al intentar trazar un rectángulo con ese perímetro podemos darnos cuenta de que el rectángulo queda determinado completamente en el momento en que se decide cuál será la longitud de su base. En efecto, si llamamos x a esa longitud, entonces se necesita otra longitud x igual para el lado paralelo a la base, y de la longitud restante de p, se deberán producir los otros dos lados. La siguiente figura ilustra la situación.



Se ha utilizado la cantidad $2x$ de la longitud original p y queda el resto, $p-2x$ el cual debe ser utilizado para formar los dos lados restantes.

Como estos lados deben ser iguales, cada uno de ellos deberá tener una longitud $\frac{p-2x}{2}$.

Pudimos haber llegado a esa expresión también si llamamos h a la altura del rectángulo (ver figura),



sabemos que $2x+2h=p$ y de ahí despejamos h en términos de x:

$$2h = p - 2x \quad \text{y así} \quad h = \frac{p-2x}{2}$$

Hemos trazado el rectángulo cuyo perímetro es la longitud p. Ahora expresemos su área, la cual es el producto de base por altura. Escrito en términos de la base x tenemos que:

$$y = A(x) = x\left(\frac{p-2x}{2}\right)$$

y realizando el producto algebraico se tiene

$$y = A(x) = x\left(\frac{p}{2} - \frac{2x}{2}\right) = x\left(\frac{p}{2} - x\right) = \frac{p}{2}x - x^2$$

Se trata de una función cuadrática con cortes en el eje horizontal cuando $y = A(x) = 0$, esto es, cuando

$$x\left(\frac{p}{2} - x\right) = 0$$

e igualando ambos factores a 0 obtenemos

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{p}{2}.$$

El vértice de la parábola, gráfica de esta función, se encuentra donde su derivada es 0:

$$y' = A'(x) = \frac{p}{2} - 2x = 0$$

de ahí que $\frac{p}{2} = 2x$ y $x = \frac{p}{4}$.

Evaluamos finalmente el área ahí para hacer un trazado de las gráficas.

$$y = A\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{4}\right) - \left(\frac{p}{4}\right)^2$$

$$= \frac{p^2}{8} - \frac{p^2}{16} = \frac{p^2}{16}$$

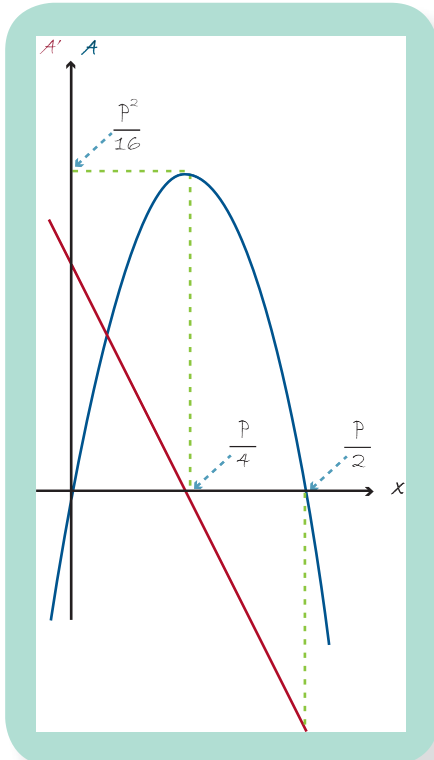
Observa que los valores de x que representan la longitud de la base del rectángulo van de 0 a $\frac{p}{2}$ esto es así porque para que pueda construirse un rectángulo no podemos exceder la mitad de la longitud p para formar la base y el lado paralelo a ella, pues no quedaría material de p para los 2 lados restantes.

Observa además que el valor máximo del área se da cuando $x = \frac{p}{4}$ y siendo así, la altura es

$$h = \frac{p - 2\left(\frac{p}{4}\right)}{2}$$

$$= \frac{p - \frac{p}{2}}{2} = \frac{\frac{p}{2}}{2} = \frac{p}{4}$$

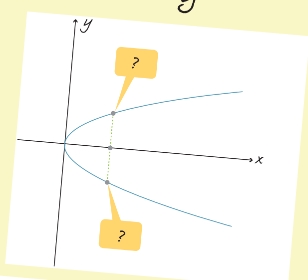
De modo que se trata de un cuadrado ya que su base y altura son iguales. Por tanto, concluimos que para que una longitud p forme el perímetro de un rectángulo que encierre la máxima área posible, se debe dividir la longitud p en 4 partes iguales y formar un cuadrado.



¡TOMA NOTA!

La **parábola horizontal base** tiene la expresión algebraica

$$x = y^2$$



¡TOMA NOTA!

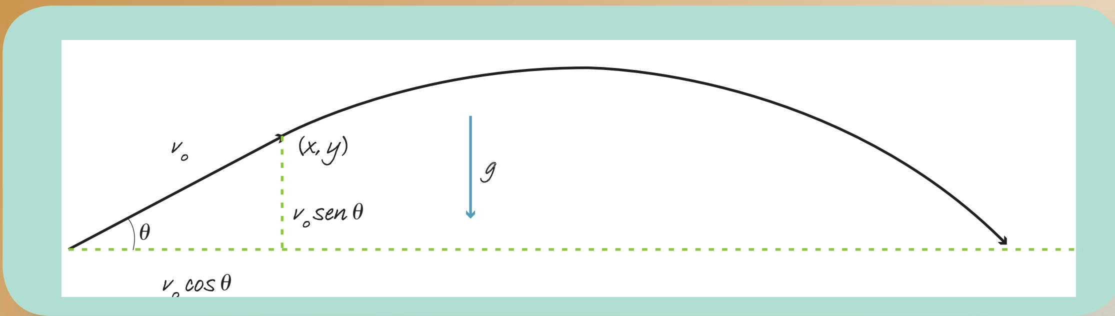
Su gráfica no puede ser considerada una función

$$y = f(x)$$

porque no sabríamos qué valor asociar a cada x, si el y positivo o el y negativo.

Caso 4. El tiro parabólico

Con este nombre se conoce un movimiento que describe la trayectoria ideal en forma de parábola. La situación consiste en que un objeto se impulsa desde la horizontal (digamos del suelo) formando un ángulo θ con ésta, en un medio que no ofrece resistencia al avance y está sujeto a un campo gravitacional uniforme. Siendo así, el movimiento puede representarse matemáticamente con dos funciones, una para cada coordenada (x, y) en el plano. La coordenada x como función del tiempo t, $x(t)$ se representa acorde a un movimiento rectilíneo uniforme y la coordenada $y = y(t)$ se representa acorde a un movimiento uniformemente acelerado donde la aceleración constante es g, la debida a la fuerza de gravedad actuando en dirección hacia abajo.



a) Construye las funciones $x(t)$ y $y(t)$ que dependen del tiempo transcurrido y que modelan las coordenadas

$$\left(x(t), y(t)\right) = (x, y)$$

en cada punto de la trayectoria del tiro parabólico.

Tomando en cuenta el ángulo de inclinación, podemos descomponer la velocidad inicial en su efecto en la dirección horizontal, $v_0 \cos\theta$ *y su efecto en la dirección vertical,* $v_0 \operatorname{sen}\theta$ *esto lo obtenemos al considerar el triángulo rectángulo en la figura y recordando que el seno (coseno) del ángulo es el cociente del cateto opuesto (adyacente) entre la hipotenusa.*

Si la coordenada x *representa la posición en la horizontal de un movimiento con velocidad constante* $v_x(t) = v_0 \cos\theta$, *entonces, antiderivando tenemos que la posición en la dirección horizontal del objeto es*

$$x(t) = \left(v_0 \cos\theta\right)t$$

donde hemos asumido que la posición inicial en la dirección x *es* $x(0) = 0$.

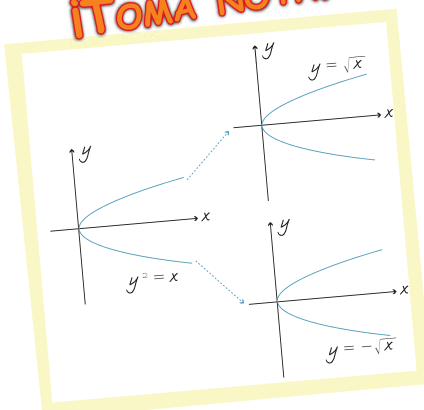
¡Toma nota!

Para despejar y de la expresión
$$x = y^2$$
se extrae raíz cuadrada de ambos lados de la igualdad, pero debemos tener precaución de considerar un doble signo detrás del radical:
$$y = \pm\sqrt{x}$$

¡Toma nota!

Este doble signo indica las "dos mitades" de la parábola horizontal que **ahora sí son funciones**:
$$y = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{x}$$

¡Toma nota!



Si la coordenada y representa la posición en la vertical de un movimiento con aceleración constante, $-g$ y con velocidad inicial $v_0 \operatorname{sen} \theta$ entonces, la velocidad en esa dirección vertical será variable y se modela con la función lineal

$$v_y(t) = v_0 \operatorname{sen} \theta - gt = v_0 \operatorname{sen} \theta - 9.8t$$

De ahí que la posición y en la vertical es la antiderivada de esta velocidad, por tanto,

$$y(t) = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - (9.8)\frac{t^2}{2} = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - 4.9t^2$$

donde hemos asumido que la posición inicial en y es 0, lo que sustituye la constante aditiva en la antiderivación.

Concluimos entonces que este movimiento especial, el tiro parabólico se representa mediante el par de funciones

$$x(t) = (v_0 \cos \theta) \qquad\qquad y(t) = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - 4.9t$$

b) Haciendo uso de las funciones anteriores, conocidas como funciones paramétricas de este movimiento, predecir: la altura máxima que alcanza el objeto, el tiempo en que la alcanza; la distancia máxima recorrida por el objeto y el tiempo que tarda en caer nuevamente al suelo.

La altura máxima alcanzada debe coincidir con el instante en que la velocidad variable en la dirección y deja de ser positiva y llega al valor 0 para comenzar a tomar valores negativos y mostrar la caída del objeto. Igualamos a 0 esta velocidad y despejamos el tiempo:

$$v_y(t) = v_0 \operatorname{sen} \theta - 9.8t = 0$$

luego $\quad v_0 \operatorname{sen} \theta = 9.8t \quad$ *y* $\quad t = \dfrac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{9.8}$

Observa que este valor depende del ángulo y la velocidad inicial en el lanzamiento.

Para encontrar la altura máxima, sustituimos este valor del tiempo en la función de posición $y(t)$

$$y(t) = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - 4.9t^2$$

$$\begin{aligned}
y\left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{9.8}\right) &= (v_0 \operatorname{sen} \theta)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{9.8}\right) - 4.9\left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{9.8}\right)^2 \\
&= \frac{(v_0 \operatorname{sen} \theta)^2}{9.8} - \frac{4.9}{(9.8)(9.8)}(v_0 \operatorname{sen} \theta)^2 \\
&= \frac{(v_0 \operatorname{sen} \theta)^2}{9.8} - \frac{1}{2(9.8)}(v_0 \operatorname{sen} \theta)^2 = \frac{(v_0 \operatorname{sen} \theta)^2}{9.8} - \frac{(v_0 \operatorname{sen} \theta)^2}{2(9.8)} \\
&= (v_0 \operatorname{sen} \theta)^2\left(\frac{1}{9.8} - \frac{1}{2(9.8)}\right) = \left(\frac{1}{19.6}\right)(v_0 \operatorname{sen} \theta)^2
\end{aligned}$$

Observa que en caso de que el ángulo θ sea de 90 grados, el valor de la altura máxima debe coincidir con la altura que se obtiene en caída libre si se lanza el objeto hacia arriba con una velocidad inicial v_0; esto lo comprobarás en los problemas propuestos de este tema.

Para determinar el tiempo de caída del objeto, por la simetría que presenta el movimiento en la situación analizada, podemos afirmar que el tiempo debe ser el doble de lo que invirtió el objeto en llegar a su altura máxima,

$$t = 2\left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{9.8}\right) = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{4.9}.$$

Es un buen ejercicio algebraico que compruebes que la coordenada $y(t)$ *en este tiempo debe ser igual a* 0 *pues el objeto llega al suelo. . . sustituye en la función* $y(t)$ *y comprueba que efectivamente,*

$$y\left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{4.9}\right) = 0$$

Por último, para calcular la distancia a la que el objeto cayó con respecto a su salida, basta que evaluemos la función $x(t)$ *en dicho tiempo, en*

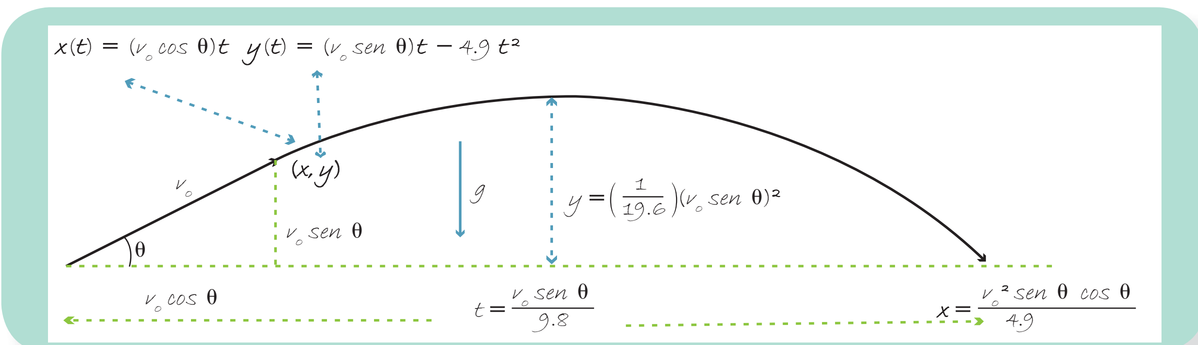
$$t = 2\left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{9.8}\right) = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{4.9}$$

lo hacemos en seguida:

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t$$

$$x\left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{4.9}\right) = (v_0 \cos \theta)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{4.9}\right) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{4.9}$$

Terminamos colocando toda la información obtenida en la imagen original:



¡TOMA NOTA!

Una ecuación **cuadrática** que no tenga el término lineal o el constante (b o $c = 0$) no merece ser resuelta con la fórmula general.

¡TOMA NOTA!

Si acaso, $c = 0$ el consejo es:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \qquad ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

¡TOMA NOTA!

Si acaso, $b = 0$ el consejo es:

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

PROBLEMA 1

Una pelota se lanza desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 metros por segundo. Consideremos sólo la acción de la fuerza de gravedad afectando el movimiento de la pelota.

a) Construye la función que modela la velocidad de la pelota y enseguida construye la función que modela la altura de la pelota respecto al suelo.

Respuesta:

$v(t)=20-9.8t \quad h(t)=20t-4.9t^2$

b) Encuentra la altura máxima de la pelota y el tiempo que tarda en alcanzarla.

Respuesta:

$t=\frac{100}{49}\approx 2.0408 \quad h_{max}\approx 20.4081$

c) Utiliza un software de graficación para trazar las gráficas de la velocidad y de la altura de la pelota en un mismo sistema coordenado e interpretar el comportamiento del movimiento.

Respuesta:

la gráfica de velocidad es una recta de pendiente negativa que cruza el eje del tiempo, y la altura es una parábola cóncava hacia abajo con vértice en el punto determinado en el inciso b.

d) Considera ahora que la pelota fue lanzada hacia arriba pero desde una terraza en un departamento de tal modo que su altura inicialmente era de 10 metros. ¿Qué distancia recorre la pelota hasta llegar a su altura máxima?

Respuesta:

Aproximado a 4 decimales la distancia es el cambio en la altura.

$h[0,\ 2.0408]=h(2.0408)-h(0)=30.408-10=20.4081$ metros.

e) En la misma situación del inciso anterior, ¿cuánto tiempo tarda en caer al suelo?

Respuesta:

Igualando la altura de la pelota a 0, $t=4.532$

f) Calcula la distancia que ha recorrido la pelota en los primeros 3 segundos.

Respuesta:

A la distancia recorrida hasta la altura máxima se le suma la distancia que recorre en el sentido contrario hasta los 3 segundos.

$h[0, 2.0408] = h(2.0408) - h(0) = 20.4081$

$h[2.0408, 3] = h(3) - h(2.0408) = 25.9 - 30.4081 = -4.5081$

Distancia $= 20.4081 + 4.5081 = 24.9162$ metros.

g) Con ayuda de un graficador realiza la gráfica de la altura de la pelota lanzada desde la terraza y señala en ella la información obtenida en los incisos *d*), *e*) y *f*). Compara con la gráfica obtenida en el inciso *c* para visualizar similitudes y diferencias.

Respuesta:

La nueva gráfica es una traslación vertical hacia arriba de 10 unidades de la gráfica del inciso *c*, sólo que debe prolongarse para llegar a la altura 0.

Problema 2.

Un tanque tiene la forma de un cilindro con 800 centímetros cuadrados como área de su base y un metro de altura. Dos llaves lo están llenando de agua de tal manera que una de ellas lo hace a razón constante de 3 centímetros/segundo y la otra lo hace a razón variable igual a $2t$ centímetros/segundo, donde t es el tiempo transcurrido en segundos. En el instante en que comenzamos a considerar la situación, el nivel del agua es $h_0 = 12$ centímetros.

a) Construye la función que dé cuenta de la razón de cambio del nivel del agua en cualquier instante t. Construye enseguida la función que dé cuenta del nivel de agua a partir de ella.

Respuesta:

$r(t) = 3 + 2t \quad h(t) = 12 + 3t + t^2$

b) ¿Cuál será el nivel del agua dentro de $2\sqrt{2}$ segundos?

Respuesta:

$h = 20 + 6\sqrt{2}$ metros

c) ¿En qué instante t se llena el tanque?

Respuesta:

$t = 8$ segundos

d) ¿Cuánto tiempo había pasado cuando el tanque estaba lleno a la mitad de su capacidad?

Respuesta:

$t \approx 4.8443$ segundos

e) Construye la gráfica de la función que modela el nivel del agua y señala en ella las respuestas dadas en los incisos *b*), *c*) y *d*).

Respuesta:

La gráfica de la ecuación del nivel es creciente y cóncava hacia arriba

f) Considera que la razón de cambio del nivel del agua en el tanque fuese $r(t) = -3 + 2t$, ¿qué diferencia plantea esto en la situación descrita en el problema?

Respuesta:

La primera llave está desalojando agua a razón constante, el nivel disminuye al inicio

g) Encuentra el valor mínimo al que llega el nivel y en qué instante.

Respuesta:

A los 1.5 segundos, nivel mínimo

$h(1.5) = 9.75$ centímetros

h) Grafica la función del nivel de agua y de su razón de cambio para la nueva situación del inciso *f* habiendo calculado el instante en que se llena el tanque.

Respuesta:

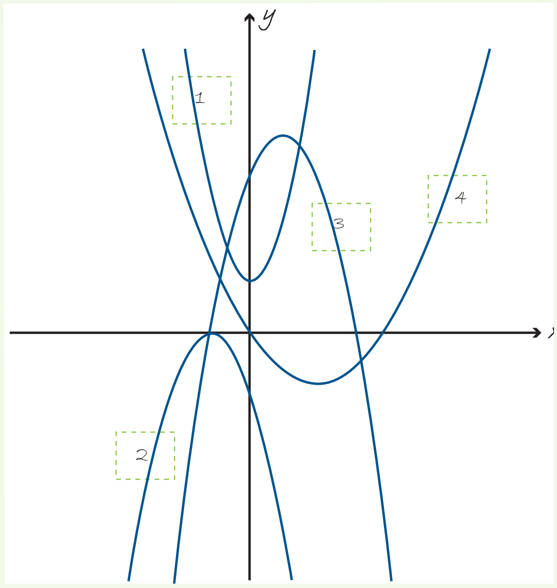
Se llena a los 11 segundos.

Gráfica del nivel parábola cóncava hacia arriba con vértice en $t = 1.5$

Razón de cambio recta que cruza el eje de valores negativos a positivos.

Problema 3.

Inventa una función cuadrática de la forma $y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ que tenga el comportamiento que se establece en las gráficas de la siguiente imagen. Observa que, aunque no hay una escala dada, el signo de las variables x y y sí se encuentra explícito en las figuras. La respuesta en cada gráfica no es única, por lo que deberás graficar y comprobar que efectivamente la función que propones cumple con las características que la imagen dada manifiesta.

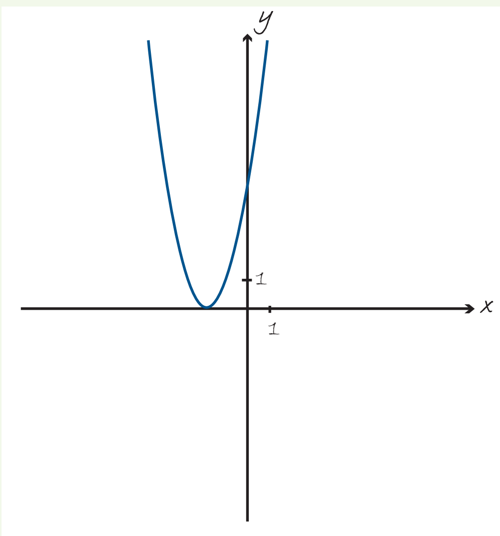


Respuesta:

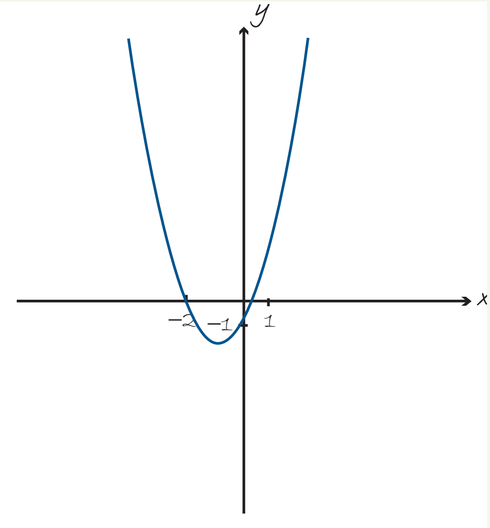
En la parábola 1 el discriminante es negativo, en la parábola 2 el discriminante es igual a 0 y en las parábolas 3 y 4 el discriminante es positivo, pero las raíces se tienen signos opuestos en la parábola 3 y una raíz es 0 en la parábola 4.

Problema 4.

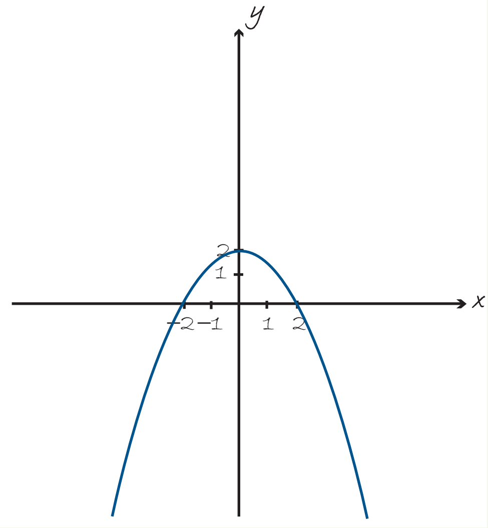
Para cada función cuadrática dada encuentra su derivada y dibuja su gráfica en el mismo sistema coordenado donde te damos la gráfica de la función. Encuentra los puntos de intersección de la función y de su derivada con el eje horizontal x y con el eje vertical y.



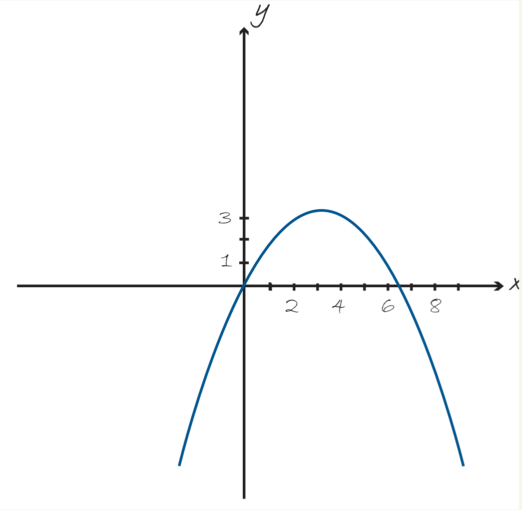
a) $y=y(x)=2x^2+6x+\frac{9}{2}$



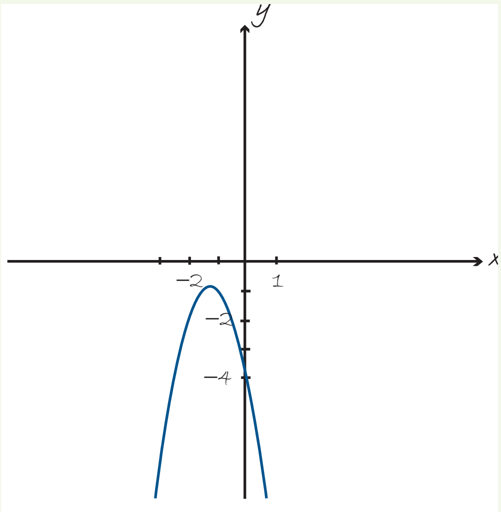
b) $y = y(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{11}{5}\right)$



c) $y = y(x) = -\frac{3}{7}x^2 + 2$



d) $y = y(x) = -\frac{3}{10}x^2 + \frac{39}{20}x$



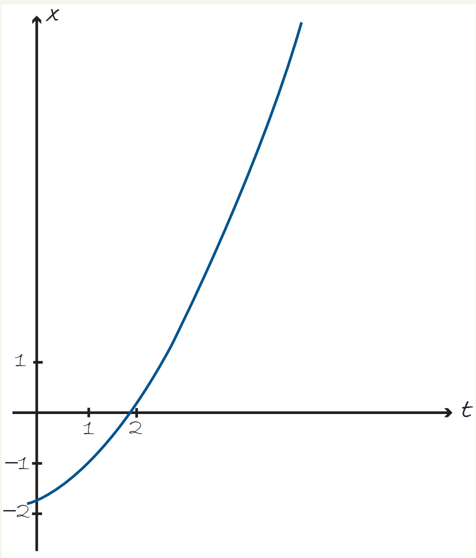
e) $y = y(x) = -2x^2 - 5x - 4$

Problema 5.

En cada inciso se te provee de una función lineal $v = v(t)$ que modela el comportamiento de la velocidad de una partícula que se mueve en línea recta. También aparece la gráfica de la función cuadrática $x = x(t)$ que modela la posición de la partícula; se grafica sólo en la zona positiva del eje horizontal t que representa el tiempo transcurrido.

En cada inciso deberás completar la descripción del movimiento de la partícula al llenar los blancos. La información numérica que obtengas para esto debe estar calculada explícitamente con el procedimiento algebraico necesario.

a) $x_0 = -\frac{7}{4}$, $v(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}$



Descripción del movimiento:

Cuando comenzamos a observar, la partícula se encontraba en la posición __________ y se movía hacía la __________ cada vez más __________.

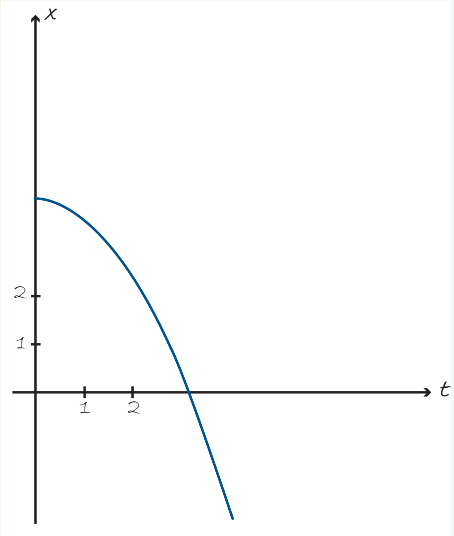
Pasó por el origen de la recta en que se mueve a los __________ segundos y continuó su movimiento hacía la __________ cada vez más __________ hasta que le perdimos de vista . . .

b) $x_0 = 4, \quad v(t) = -\frac{4t}{5}$

Descripción del movimiento:

Cuando comenzamos a observar, la partícula se encontraba en la posición ____________ y se movía hacia la ____________ cada vez más ____________.

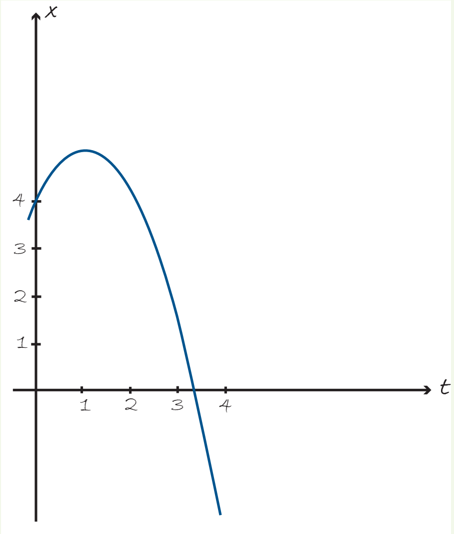
Pasó por el origen de la recta en que se mueve a los ____________ segundos y continuó su movimiento hacia la ____________ cada vez más ____________ hasta que le perdimos de vista . . .



c) $x_0 = 4, \quad v(t) = 2 - 2t$

Descripción del movimiento:

Cuando comenzamos a observar, la partícula se encontraba en la posición ____________ y se movía hacia la ____________ cada vez más ____________. Se detuvo justo a los ____________ segundos y en la posición ____________ metros para dirigirse hacia la ____________ cada vez más____________. A eso de los ____________ segundos pasó por el origen de la recta en que se mueve. Llevaba una velocidad de ____________ metros/segundo y continuó moviéndose cada vez más ____________ hacia la ____________ hasta que le perdimos de vista . . .

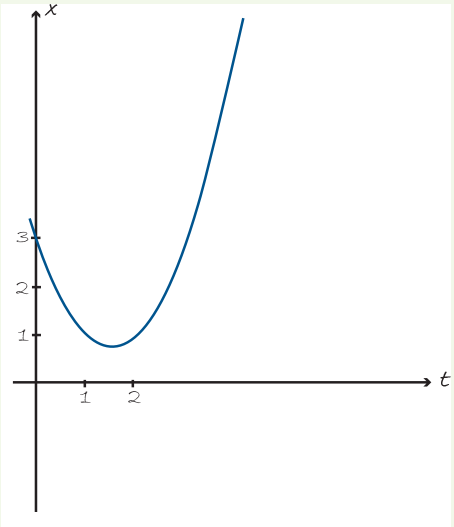


d) $x_0 = 3, \quad v(t) = -3 + 2t$

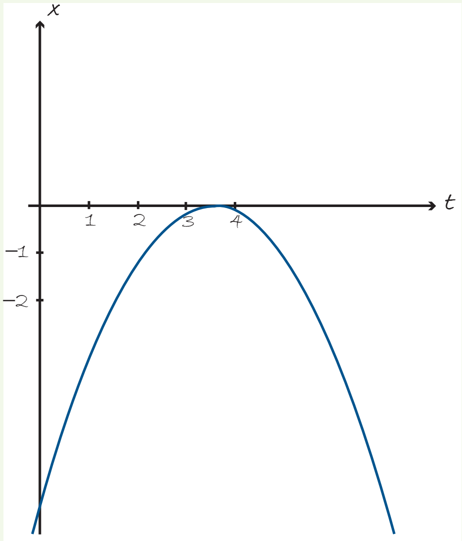
Descripción del movimiento:

Cuando comenzamos a observar, la partícula se encontraba en la posición ____________ y llevaba una velocidad de ____________metros/segundo.

Se movía hacia la ____________ cada vez más ____________. Se detuvo justo a los ____________ segundos y en la posición ____________metros para dirigirse hacia la ____________cada vez más____________, de modo que ____________llegó a pasar por el origen de la recta en que se mueve. Continuó moviéndose cada vez más ____________ hacia la ____________ hasta que le perdimos de vista...



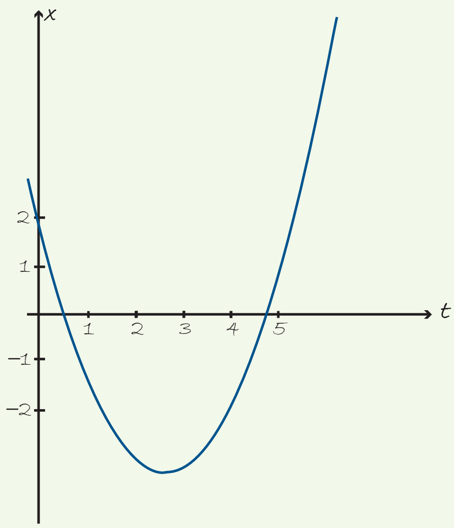
e) $x_0 = -\frac{49}{8}$, $v(t) = \frac{7}{2} - t$



Descripción del movimiento:

Cuando comenzamos a observar, la partícula se encontraba en la posición ____________ y llevaba una velocidad de ____________ metros/segundo. Se movía hacia la ____________ cada vez más ____________. Se detuvo justo a los ____________ segundos y en la posición ____________ metros para dirigirse hacia la ____________ cada vez más ____________, de modo que llegó al origen de la recta en que se mueve y se devolvió sin cruzar. Continuó moviéndose cada vez más ____________ hacia la ____________ hasta que le perdimos de vista...

f) $x_0 = 2$, $v(t) = -4 + \frac{3}{2}t$



Descripción del movimiento:

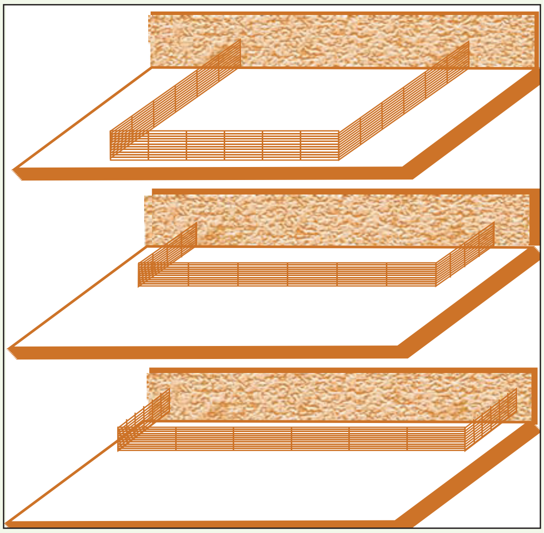
Cuando comenzamos a observar, la partícula se encontraba en la posición ____________ y llevaba una velocidad de ____________ metros/segundo. Se movía hacia la ____________ cada vez más ____________.

Pasó por primera vez por el origen de la recta en que se mueve a los ____________ segundos con una velocidad de ____________ metros/segundo y continuó hacia la ____________ cada vez más ____________.

Así continuó hasta que se detuvo justo a los ____________ segundos y en la posición ____________ metros para dirigirse hacia la ____________ cada vez más ____________; de este modo llegó a pasar nuevamente por el origen de la recta en que se mueve a los ____________ segundos y con una velocidad de ____________ metros/segundo. Continuó moviéndose cada vez más ____________ hacia la ____________ hasta que le perdimos de vista . . .

Problema 6

Se va a cercar un terreno rectangular contiguo a una barda de piedra que servirá como un lado del terreno, el cual, no requiere cerca. El problema consiste en encontrar el terreno rectangular que encierra el área máxima posible y que cumpla con la restricción que se establece en cada inciso.



a) La longitud de la cerca debe ser de exactamente 1 150 metros.

Respuesta:

lado paralelo a barda de 575 *metros, lados perpendiculares de* 287.5 *metro*

b) El costo de la cerca debe ser justamente de 54 000 pesos y el material que se usará para el lado paralelo a la barda cuesta 75 pesos el metro mientras que los lados perpendiculares a la barda de piedra se cercarán con una malla económica de 50 pesos el metro.

Respuesta:

lado paralelo a barda de 360 *metros, lados perpendiculares de* 270 *metros*

En cada inciso aparece una función cuadrática cuya gráfica es una parábola vertical.

a) Plantea y resuelve la ecuación cuadrática que te permite decidir si la gráfica de la parábola intersecta o no intersecta el eje x. En caso afirmativo, expresa cada punto (x, y) de intersección.

b) Encuentra las coordenadas (x, y) del vértice de la parábola (utiliza la derivada).

c) Encuentra el punto de intersección de la parábola con el eje y y expresa el punto (x, y) de intersección.

d) Grafica la función cuadrática en cuestión y su derivada en el mismo sistema coordenado.

e) Señala en la gráfica el vértice y los puntos de intersección con los ejes x y y; señala ahí mismo las coordenadas (x, y) de estos puntos.

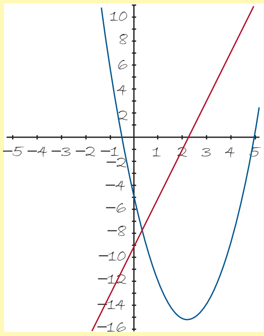
1) $y = f(x) = 2x^2 - 9x - 5$	**2)** $y = f(x) = 2x^2 + 9x$
3) $y = f(x) = 2x^2 - 5$	**4)** $y = f(x) = 2x^2 - x + 5$
5) $y = f(x) = 4x^2 - 12x + 9$	**6)** $y = f(x) = -4x^2 - 21x - 17$
7) $y = f(x) = -4x^2 + 21x$	**8)** $y = f(x) = -4x^2 - 17$
9) $y = f(x) = -11x^2 - 10x + 1$	**10)** $y = f(x) = -9x^2 - 6x - 1$

1)

Eje x: $(5, 0)$ $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$

Vértice : $\left(\frac{9}{4}, -\frac{121}{8}\right)$

Eje y : $(0, -5)$

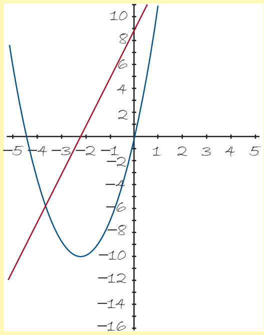


2)

Eje x: $(0, 0)$ $\left(\frac{-9}{2}, 0\right)$

Vértice : $\left(-\frac{9}{4}, -\frac{81}{8}\right)$

Eje y : $(0, 0)$

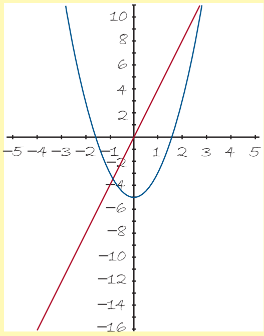


3)

Eje x: $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$ $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$

Vértice: $(0, -5)$

Eje y : $(0, -5)$

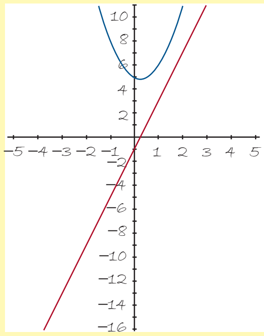


4)

Eje x: no hay

Vértice : $\left(\frac{1}{4}, \frac{39}{8}\right)$

Eje y : $(0, 5)$

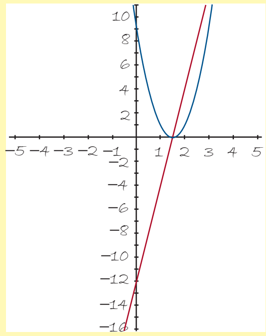


5)

Eje x: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Vértice : $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Eje y : $(0, 9)$

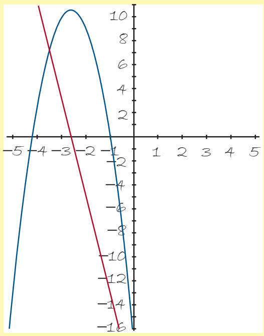


6)

Eje x : $\left(\frac{-17}{4}, 0\right)$ $(-1, 0)$

Vértice : $\left(\frac{-21}{8}, \frac{169}{16}\right)$

Eje y: $(0, -17)$

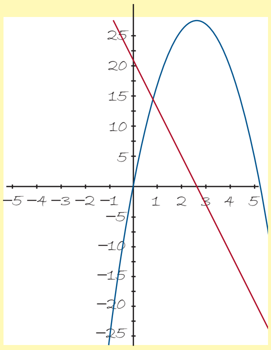


7)

Eje x : $(0, 0)$ $\left(\frac{21}{4}, 0\right)$

Vértice: $\left(\frac{21}{8}, \frac{441}{16}\right)$

Eje y: $(0, 0)$

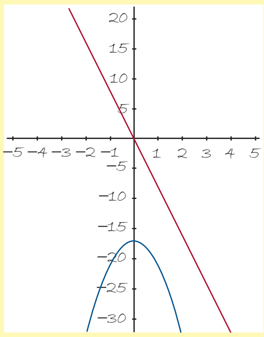


8)

Eje x : no hay

Vértice : $(0, -17)$

Eje y: $(0, -17)$

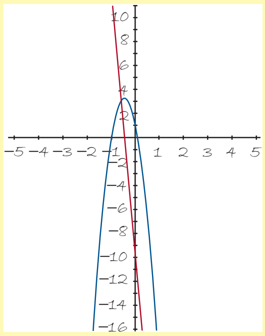


9)

Eje x : $(-1, 0)$ $\left(\frac{1}{11}, 0\right)$

Vértice : $\left(-\frac{5}{11}, \frac{36}{11}\right)$

Eje y: $(0, 1)$

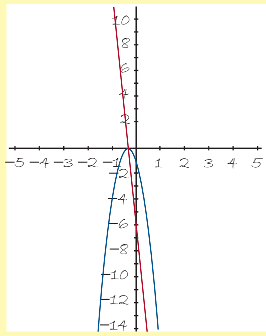


10)

Eje x: $\left(\frac{-1}{3}, 0\right)$

Vértice : $\left(\frac{-1}{3}, 0\right)$

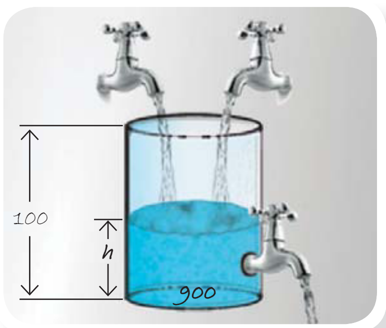
Eje y: $(0, -1)$



1.5 Estudio cualitativo del Cambio NO uniforme: Modelo cúbico

En este tema se continúa con el análisis de tipo cualitativo para predecir el comportamiento de la magnitud en estudio, con la idea de tomar decisiones respecto a si la magnitud está aumentando o disminuyendo, además de precisar cómo realiza esa acción. Todo esto se discute a través del análisis de la razón de cambio de la magnitud. Como producto de un acercamiento visual a las gráficas de razón de cambio y magnitud se establecen relaciones entre ambas gráficas que se traducirá en la información nombrada. Las nociones de punto máximo y mínimo, se agregan a la de punto de inflexión, que surge de este análisis, y con esto se enriquece la interpretación del comportamiento de la magnitud modelada mediante la función. Aunque los resultados en este tema son válidos en cualquier función cuyas propiedades matemáticas coinciden con las de las funciones polinomiales. Sin embargo, será en el marco particular de la función cúbica donde se apoyan las inferencias que se establecen en dichos resultados. Este tema incluye un estudio exhaustivo del modelo cúbico y su aplicación en problemas reales.

Situación Problema 1.5



Un tanque tiene la forma de cilindro circular recto con base de área 900 centímetros cuadrados y 1 metro de altura. Tres llaves actúan en el tanque a partir de cierto instante

(cuando $t = 0$)

de tal manera que el nivel del agua h (medido en centímetros) cambia con respecto al tiempo transcurrido (medido en minutos).

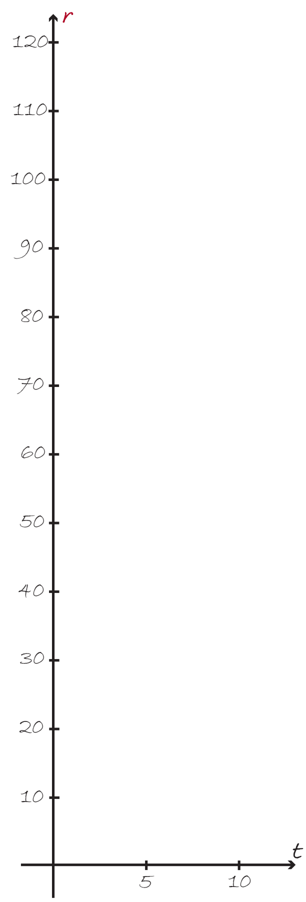
La función que expresa el nivel del agua con respecto al tiempo es:

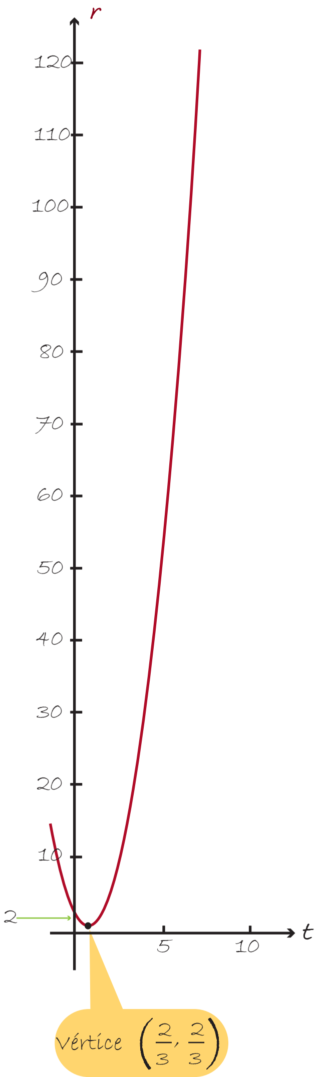
$$h(t) = 15 + 2t - 2t^2 + t^3 .$$

En el sistema coordenado dado, grafica la razón de cambio del nivel del agua con respecto al tiempo. Utiliza la información de esta gráfica para realizar después la del nivel del agua en ese mismo sistema coordenado. Finalmente, describe lo que sucede con el nivel del agua en el tanque: ¿Crece?, ¿decrece?, ¿lo hace cada vez más rápido?, ¿cada vez más lento?

Como la función que expresa el nivel está dada por

$$h(t) = 15 + 2t - 2t^2 + t^3 ,$$





entonces, la razón de cambio del nivel está dada por la función cuadrática $r(t) = 2 - 4t + 3t^2$ *cuya gráfica es una parábola.*

Para trazar la gráfica de esta parábola es necesario ubicar su vértice. Como ya lo hemos hecho antes, procedemos igualando a 0 *a su razón de cambio.*

La razón de cambio de $r(t)$ *es*

$$r'(t) = -4 + 6t$$

y al igualar a 0 obtenemos $-4 + 6t = 0$

de donde $6t = 4$ y $t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Sustituyendo este valor en la función $r(t)$ obtenemos

$$r\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 2 - \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, las coordenadas del vértice de la parábola son $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Esta información, junto con el hecho de que la parábola corta al eje vertical en $r(0) = 2$, *nos permite realizar la gráfica cóncava hacia arriba para la razón de cambio del nivel,*

$$r(t) = 2 - 4t + 3t^2.$$

Se observa de este modo que la gráfica no corta el eje del tiempo, lo que podemos corroborar al calcular el discriminante de la ecuación cuadrática $r(t) = 0$ *y ver que resulta un número negativo. En efecto el discriminante de la ecuación* $2 - 4t + 3t^2 = 0$ *es* $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(3)(2) = -8$, *resultando negativo.*

La gráfica de $r(t)$ *nos informa que la razón de cambio del nivel del agua es positiva todo el tiempo, pues la gráfica se mantiene en la zona positiva del plano. Esto debe interpretarse en el crecimiento del nivel del agua en el tanque durante todo el tiempo, a pesar de la acción de la llave que desaloja el agua. Está claro entonces que la gráfica de* $h(t)$ *será exclusivamente creciente.*

Existe, sin embargo, cierta diferencia con la forma en que se da el crecimiento del nivel, porque durante el intervalo de tiempo de 0 *a* $\frac{2}{3}$ *de minuto, la razón de cambio decrece, lo que provoca que el crecimiento del nivel sea cada vez más lento. Después, de los* $\frac{2}{3}$ *de minuto en adelante, la razón de cambio del nivel crece, lo que provoca que el crecimiento del nivel sea cada vez más rápido.*

La gráfica del nivel es creciente, pero de los 0 *a los* $\frac{2}{3}$ *de minuto es cóncava hacia abajo, manifestando el crecimiento cada vez más lento del nivel, y a los* $\frac{2}{3}$ *de minuto comienza el tramo de la gráfica con conca-*

vidad hacia arriba, manifestando el crecimiento cada vez más rápido del nivel a partir de ese instante.

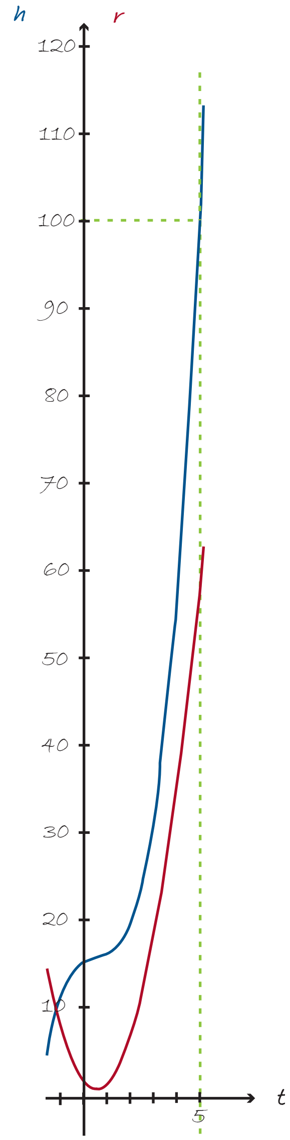
Trazamos la gráfica en el mismo sistema coordenado de la razón de cambio.

En esa gráfica debemos cortar la curva en el instante $t = 5$ *una vez que nos hemos dado cuenta de que a los* 5 *minutos el nivel del agua llega a la altura del tanque, como comprobamos en seguida:*

$$h(5) = 15 + 2(5) - 2(5)^2 + (5)^3$$

$$= 15 + 10 - 50 + 125$$

$$= 100 \quad \textit{centímetros}$$



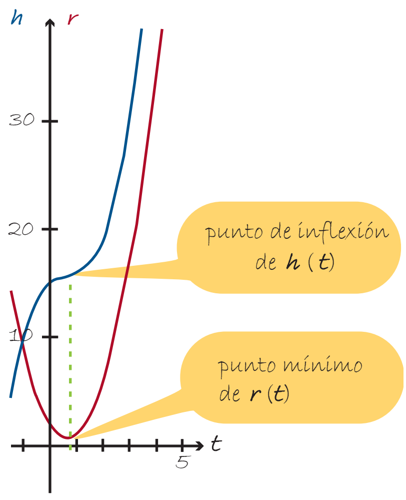
Generalizaciones a partir de la Situación Problema 1.5

Primer resultado: puntos de inflexión

El comportamiento del nivel del agua en el tanque muestra un evento singular que se genera alrededor del instante $t = \frac{2}{3}$; se trata del cambio en la forma en que el nivel crece porque de estarlo haciendo de una manera cada vez más lenta (antes de ese instante) cambia para hacerlo después de una manera cada vez más rápida.

Visualmente el cambio del tipo de crecimiento ocurre en un punto de la gráfica de la función que se conoce como punto de **inflexión**, punto en el que se produce un cambio en la concavidad de la curva.

La figura abajo es un acercamiento de la imagen anterior con la gráfica del nivel y la de su razón de cambio. Como podemos observar en ella, el punto de inflexión se relaciona justo con el punto mínimo que ha ocurrido en la gráfica de la razón de cambio del nivel.



Esto era de esperarse, ya que en ese punto mínimo la razón de cambio deja de ser decreciente para ser creciente y, como ya sabemos, el decrecimiento de la razón de cambio (derivada) se relaciona con la concavidad hacia abajo de la gráfica de la función, mientras que el crecimiento de la razón de cambio se relaciona con la concavidad hacia arriba de la gráfica de la función.

Estamos argumentando en base a nuestro conocimiento anterior que el punto mínimo de la razón de cambio nos señala la existencia de un punto de inflexión en la gráfica de la magnitud bajo estudio, porque la derivada cambia su comportamiento en ese punto mínimo de decrecimiento a crecimiento.

Recordando la relación entre el comportamiento de la gráfica de la función y la de su derivada, podemos recordar lo dicho en la siguiente forma:

Derivada $y' = f'(x)$ (razón de cambio, velocidad)		Función $y = f(x)$ (magnitud, posición)
positiva	$\longleftrightarrow$	creciente
negativa	$\longleftrightarrow$	decreciente
creciente	$\longleftrightarrow$	cóncava hacia arriba
decreciente	$\longleftrightarrow$	cóncava hacia abajo

cambio en el comportamiento

cambio en la concavidad

Observa que el cambio de comportamiento de crecimiento a decrecimiento en la derivada, significa la existencia de un punto máximo de la función derivada; y a su vez, el cambio de comportamiento de decrecimiento a crecimiento en la derivada, significa la existencia de un punto mínimo de la función derivada.

En ambos casos, tratándose de un máximo o bien de un mínimo de la derivada; $y' = f'(x)$, podemos ubicar ahí la existencia de un punto de inflexión de la función original, $y = f(x)$.

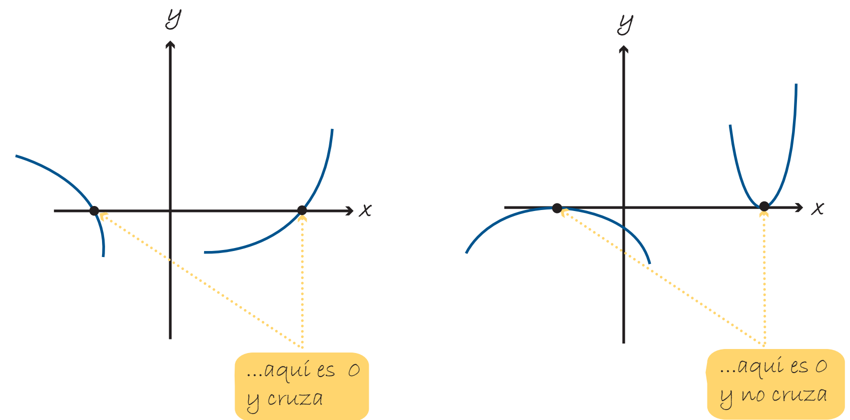
La función polinomial $y = f(x)$ tiene en x un punto de inflexión si en el punto de su gráfica $(x, f(x))$ se tiene un cambio en la concavidad de esta curva. Para que esto suceda, en x se debe tener un máximo, o bien, un mínimo de la gráfica de su derivada de $f'(x)$.

En la situación problema 1.5 reconocimos un punto de inflexión de la curva que representa al nivel del agua en el tanque; un punto donde el comportamiento de la curva cambia de una concavidad hacia abajo a una concavidad hacia arriba. En la siguiente sección tendremos oportunidad de reconocer funciones donde ocurra de la otra manera, de concavidad hacia arriba a concavidad hacia abajo. Pero antes de eso, vale la pena continuar el razonamiento en esta situación al preguntarnos ¿cómo es que detectamos numéricamente ese punto mínimo de la razón de cambio que nos condujo al punto de inflexión en el nivel? La respuesta es, derivando la razón de cambio e igualando a 0 su expresión, esto es, igualando a 0 a la **segunda derivada** de la función.

Sabemos que, en general, esta acción algebraica de igualar a 0 a la derivada de la razón de cambio nos brinda información sobre el máximo, o bien, el mínimo de la razón de cambio. Que en este caso se trate de un mínimo es algo que lo sabemos porque se observa en la gráfica, y siendo así, la derivada de la razón de cambio (que es una recta) cruzará el eje del tiempo en $t = \frac{2}{3}$ pasando de valores negativos a positivos.

Cabe aclarar que en esta situación no es necesario comprobar ese cambio de signo en la segunda derivada, por tratarse de la derivada de una función cuadrática, que, al ser una recta, siempre cruzará el eje horizontal.

No obstante, en la búsqueda de una generalización, debemos percatarnos de lo siguiente: cuando introdujimos el análisis de los puntos máximos y mínimos en el Tema 1.4, lo hicimos para el caso de la función cuadrática; ahí era claro que su derivada, al ser una función lineal (gráficamente una recta), necesariamente cambia de signo cuando se encuentra un instante en el que vale 0. Mas esto no sucede así en el caso general, porque una curva (no recta) puede tener un comportamiento en el que "toca" el valor 0 pero no "cruza" cambiando su signo.



Esa es la precaución que debemos tomar en consideración cuando no se trata de una función cuadrática; deberemos asegurar que se produzca un cambio de signo en la derivada para confirmar la existencia de un valor máximo, o bien, mínimo en la función.

Como evidenciaremos en la sección enseguida, igualar la derivada a 0 no resulta ser una condición suficiente para la existencia de máximos o mínimos, así como también, resultará insuficiente la igualación a 0 de la segunda derivada para asegurar la existencia de un punto de inflexión.

Segundo resultado: la función cúbica y su comportamiento.

En esta sección veremos diferentes comportamientos que puede tener la función cúbica $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ analizando una secuencia de ejemplos para este caso particular de función polinomial.

¡TOMA NOTA!

Si en algún número x la función polinomial $y = f(x)$ tiene un máximo o un mínimo, entonces

$f'(x) = 0$

Pero...

Si en algún número x la función polinomial $y = f(x)$ cumple que

$f'(x) = 0$

entonces...

no necesariamente se tiene un máximo o mínimo de $y = f(x)$ en x

...¿entiendes la diferencia?

Este análisis nos permitirá tener una percepción más amplia y organizada de aspectos visuales en las gráficas de funciones en general.

Para seguir esta secuencia con comprensión, conviene que tengas a la mano un software de graficación que te permita verificar lo que dibujamos y discutimos.

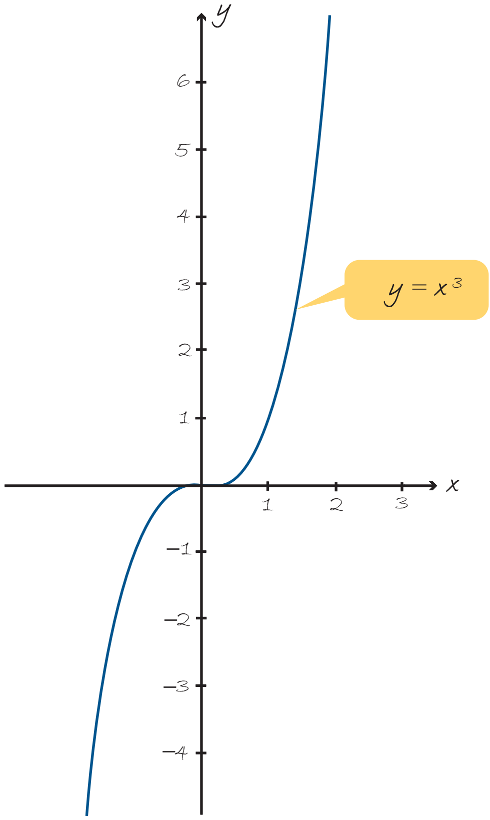
Secuencia 1: Partiremos de la gráfica de la función cúbica más simple de todas:

$$y = f(x) = x^3$$

Decimos "más simple", en el sentido de que, en la expresión formal

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

estamos asignando el valor 0 a los coeficientes $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ y considerando que el coeficiente $a_3 = 1$.



Observa que estando el número x entre 0 y 1 (siendo x "pequeño") al elevar al cubo y obtener el valor de y, este valor es aún más pequeño que x, por ejemplo, si $x = \frac{1}{2} = 0.5$, entonces

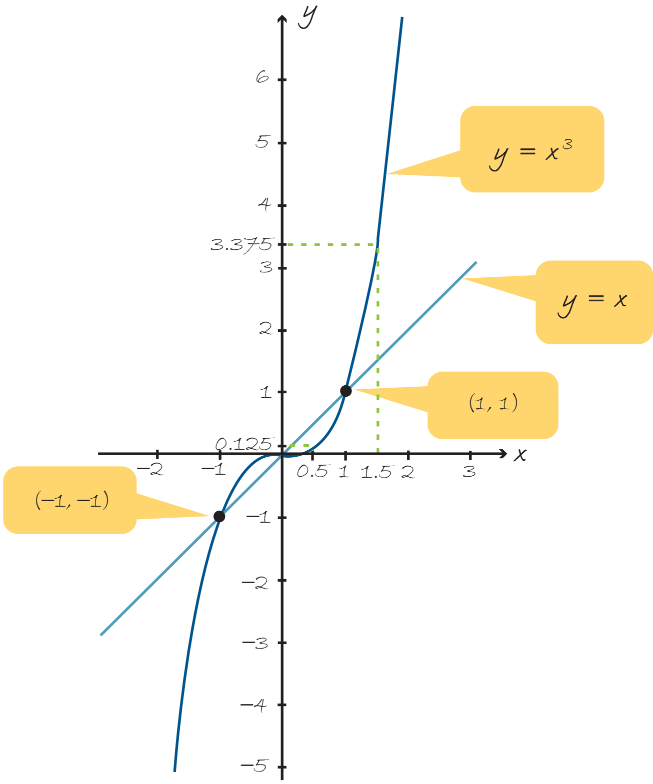
$$x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$$

y el número $\frac{1}{8} = 0.125$ es más pequeño que $\frac{1}{2} = 0.5$, es decir, $x^3 < x$, (observa la siguiente figura). En cambio, cuando un número x es mayor que 1, al elevarlo al cubo y obtener el valor de y, este valor es aún mayor que x, por ejemplo, si $x = \frac{3}{2} = 1.5$, entonces

$$x^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3.375$$

y el número 3.375 es más grande que 1.5, es decir, $x^3 > x$ (observa la siguiente figura).

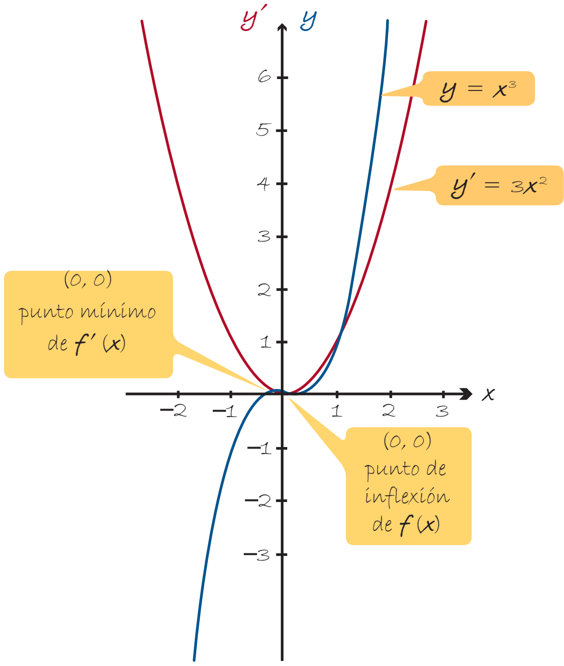
Cálculos numéricos como los anteriores nos muestran que la gráfica de $y = x^3$ se mantiene por debajo y por encima de la recta $y = x$ para diferentes zonas antes y después de $x = 1$, como lo muestra la siguiente imagen.



Observa además que la gráfica de $f(x) = x^3$ no tiene un punto máximo ni un mínimo, es una gráfica siempre creciente. También en la gráfica de $f(x) = x^3$ se observa que en el punto $(0, 0)$ hay un cambio en la concavidad; se trata de un punto de inflexión.

Esto que percibimos visualmente en la curva podemos detectarlo si utilizamos la derivada de la función.

Derivando la función $y = f(x) = x^3$ obtenemos $f'(x) = 3x^2$ la cual es una parábola cuyo vértice se encuentra en $(0, 0)$.



El hecho de que en $x = 0$ la función derivada tenga un punto mínimo nos asegura que en $x = 0$ la función $y = f(x) = x^3$ tiene un punto de inflexión. Si además calculamos la derivada de la derivada (segunda derivada) $f''(x) = 6x$, comprobamos que al igualarle a 0 obtenemos que $x = 0$.

¡TOMA NOTA!

Cuando estamos acostumbrados a trabajar sólo con números enteros, nos parece natural que al elevar al cuadrado o al cubo un número, el resultado siempre sea mayor. ... pero no es así.

Usa tu calculadora y prueba opciones como

$(0.1)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2$

$(0.5)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$(0.35)^2 = \left(\frac{35}{100}\right)^2$

Tenemos con este ejemplo de $y = f(x) = x^3$ un caso donde el hecho de tener que la derivada sea igual a 0 **no garantiza** la existencia de un máximo o mínimo en la gráfica de la función. Matemáticamente se expresa que la igualdad a 0 de la derivada en cierto valor de x es una condición **necesaria** más no **suficiente** para garantizar la existencia de un máximo o mínimo de la función $y = f(x)$ en ese valor de x.

¡TOMA NOTA!

No te conformes pensando que basta resolver

$f'(x) = 0$

para encontrar un máximo o mínimo de la función ...

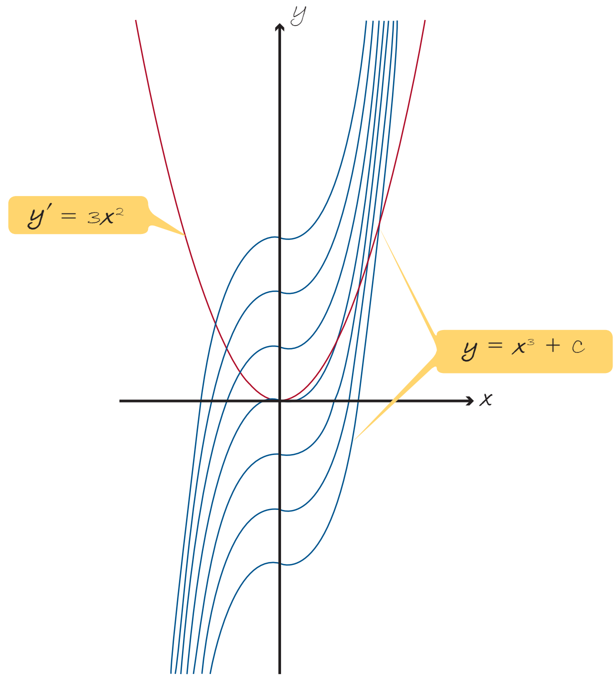
$y = f(x)$

una toma de decisión siempre requiere **análisis** y **reflexión**

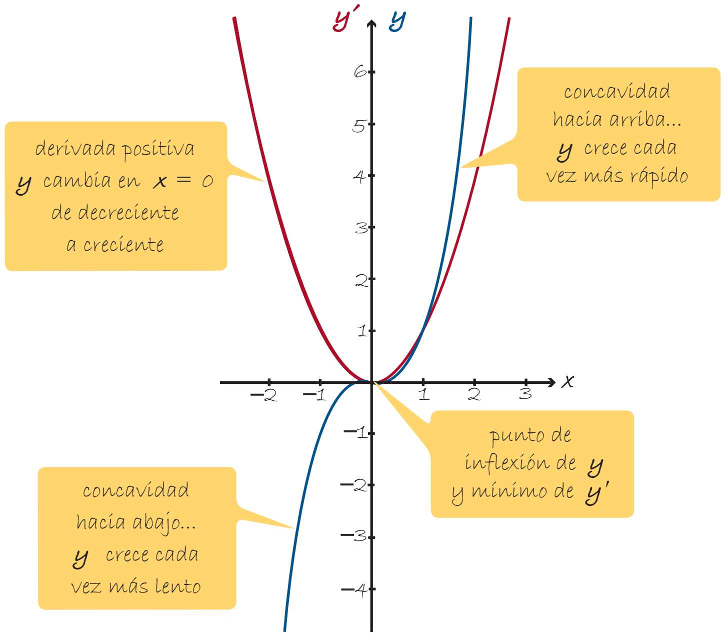
En este caso de $y = f(x) = x^3$ la derivada en $x = 0$ es 0, y se trata de un punto de inflexión de la gráfica de $y = f(x)$, donde la segunda derivada también es igual a 0, como consecuencia de que la derivada tiene un punto mínimo ahí.

Vale la pena acompañar este ejemplo con la suma de una constante aditiva a la función, por ejemplo, $y = x^3 + 3$ o $y = x^3 - 3$. Cualquiera de estas funciones comparte la misma función derivada con $y = x^3$, lo que garantiza cierta "igualdad" en el comportamiento, aunque con un cambio del "valor inicial", entendiendo con esto que el punto donde la gráfica cruza el eje y vertical, va a cambiar.

Las gráficas enseguida muestran el efecto de una **traslación vertical** del gráfico original de $f(x) = x^3$ provocado por la suma de una constante en su expresión, $f(x) = x^3 + c$. Cuando la constante c es positiva, la traslación del gráfico original es de c unidades hacia arriba, y cuando la constante c es negativa, la traslación es hacia abajo.



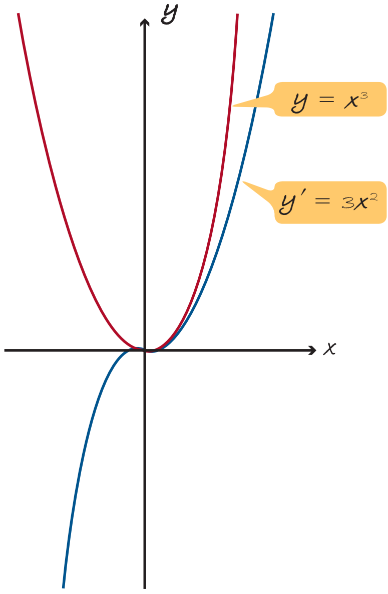
Secuencia 2: Partimos nuevamente de la función cúbica más simple de todas y observamos que la gráfica de $y = f(x) = x^3$ manifiesta un crecimiento cada vez más lento, hasta llegar al punto de inflexión $(0,0)$ y ahí es cuando continúa su crecimiento pero ahora cada vez más rápido.

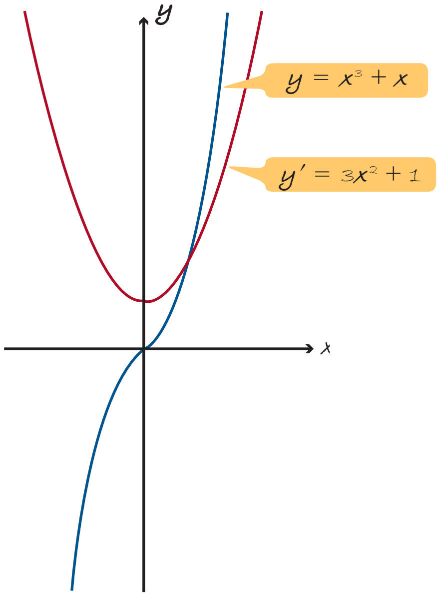


Vamos a analizar lo que sucede al alterar la expresión matemática de $y = f(x) = x^3$ mediante el agregado del término lineal x, obteniendo $y = x^3 + x$.

De esta manera su derivada se ve afectada también, de $y' = 3x^2$ a $y' = 3x^2 + 1$.

Observamos en la siguiente imagen ambas curvas con sus correspondientes derivadas, la original y la que fue afectada. El propósito de verlas simultáneamente es visualizar sus semejanzas y diferencias.



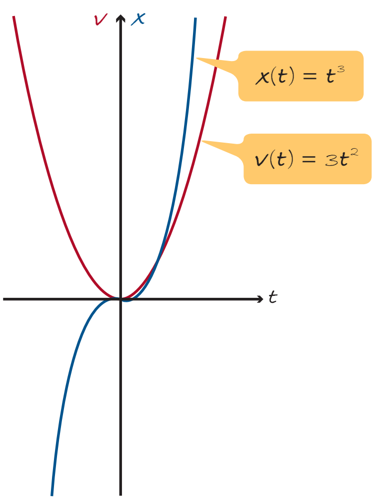


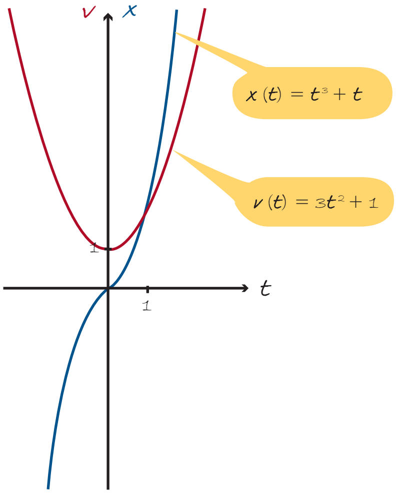
Comparando ambas imágenes se nota que el comportamiento de $y = x^3 + x$ sigue siendo el de crecimiento cada vez más lento seguido por un crecimiento cada vez más rápido. Este cambio en el tipo de crecimiento se produce en el punto de inflexión $(0,0)$ que, nuevamente, corresponde con el mínimo en la gráfica de su derivada.

Pero la diferencia con respecto a $y = x^3$ radica en que ahora no hubo un instante donde la derivada fuera 0, y esto afecta la forma de "doblarse" la curva alrededor del punto de inflexión.

Vale la pena en este preciso momento regresar al contexto real del movimiento rectilíneo para interpretar esta diferencia en el comportamiento de las gráficas anteriores. Consideremos la realización del movimiento aún cuando el tiempo sea negativo, digamos que consideramos incluso el tiempo pasado, aunque, ya lo pasado... pasado.

Para $y = x^3$, interpretada como $x = x(t) = t^3$, diríamos que el objeto va hacia la derecha cada vez más lento, se para en el instante $t = 0$ y prosigue su movimiento hacia la derecha pero ahora cada vez más rápido.



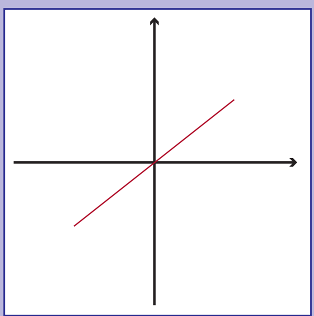


¿Sabías que?...

Con las nuevas tecnologías para graficación es posible realizar “acercamientos” a la gráfica de una función $y = f(x)$ que se ha introducido mediante su representación algebraica.

Es importante observar en estos acercamientos el cambio que se hace en las escalas de los ejes coordenados, pues de ello depende la imagen que nos ofrece la herramienta tecnológica.

En el caso de mantener la misma unidad en ambos ejes y producir acercamientos sucesivos puedes llegar a obtener una imagen como esta



y sin conocer la función introducida en su representación algebraica no podrías asegurar si es $y = x$ es $y = x^3 + x$ es $y = x^5 + x^3 + x$ o muchos más casos.

En cambio, considerando el caso de

$$y = x^3 + x,$$

interpretado como

$$x = x(t) = t^3 + t,$$

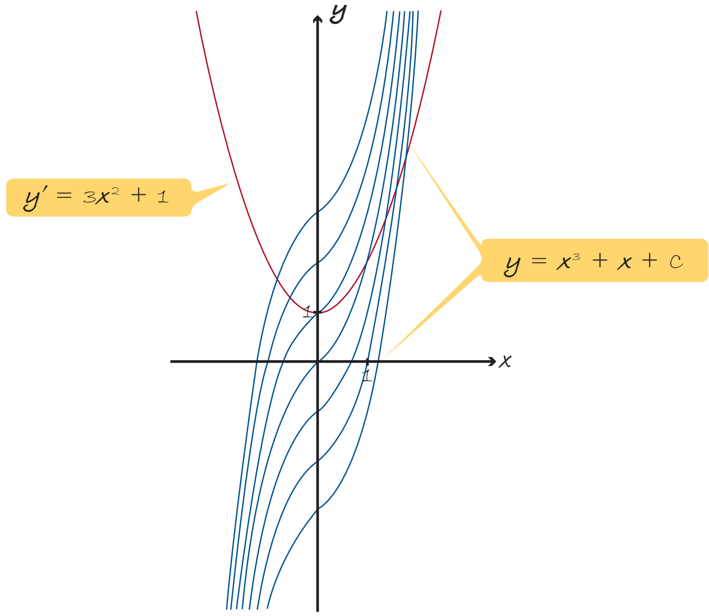
debemos decir que el objeto iba hacia la derecha cada vez más lento, y, sin llegar a pararse, en el instante $t = 0$ decide seguir aún hacia la derecha, pero cada vez más rápido.

El tipo de comportamiento que estamos visualizando se conserva si agregamos a la nueva expresión la constante aditiva, considerando

$$y = f(x) = x^3 + x + C$$

como lo expresan las siguientes gráficas que comparten una misma derivada

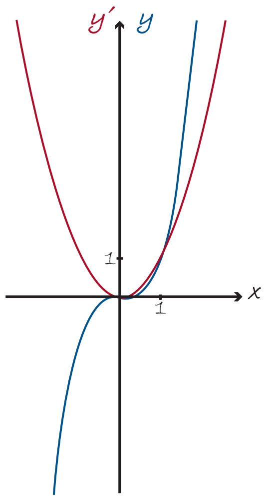
$$y' = 3x^2 + 1.$$



En la siguiente secuencia puede identificarse el comportamiento “diferente” de los puntos de inflexión. Un valor del parámetro k que sea positivo, pero que cada vez sea mayor, provoca que la curva

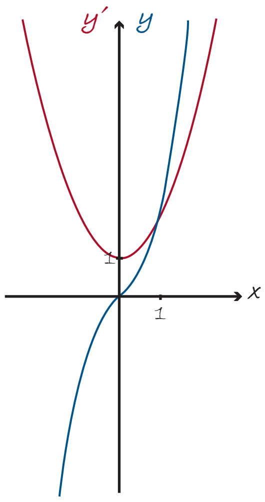
$$y = x^3 + k\,x$$

se “estire” haciendo a nuestra vista imperceptible la diferencia con un comportamiento de recta con pendiente positiva, y cada vez mayor, que tiende hacia la vertical. En una situación tal, tiene que ser la representación algebraica en la que nos apoyemos y que nos informe lo que debemos “ver”, diferenciando así de lo que “parece ser”.



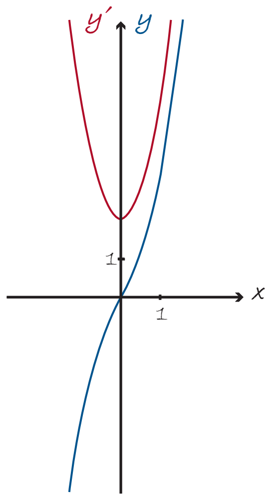
$y = x^3$

$y' = 3x^2$



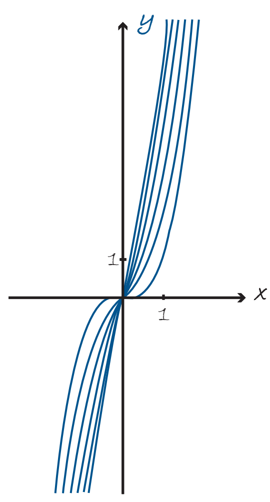
$y = x^3 + x$

$y' = 3x^2 + 1$



$y = x^3 + 2x$

$y' = 3x^2 + 2$



$y = x^3 + kx$

$k > 0$

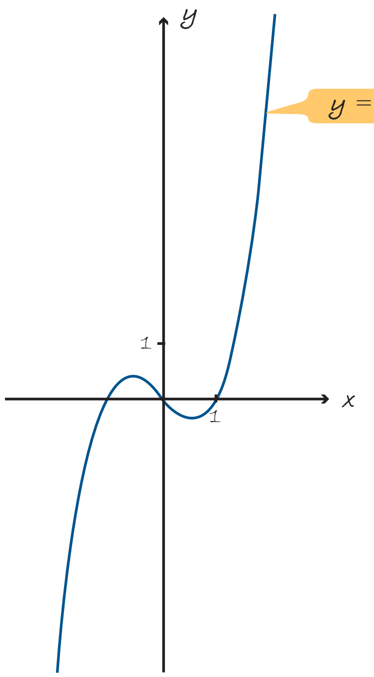
$y' = 3x^2 + k$

¿Habrá alguna diferencia en el comportamiento si en lugar de sumar el término lineal lo hubiésemos restado? O lo que es lo mismo, ¿qué sucede si el parámetro k hubiese sido negativo? Lo analizaremos en la siguiente secuencia.

Secuencia 3: Consideramos la función

$$y = f(x) = x^3 - x$$

cuya gráfica es la siguiente (recuerda que conviene tener un graficador a la mano).



Es evidente que resulta ser un comportamiento muy diferente al de la función cúbica más simple $y = x^3$ y ya porque ahora se observa la existencia de un punto máximo y un punto mínimo; eso además del punto de inflexión en $(0,0)$.

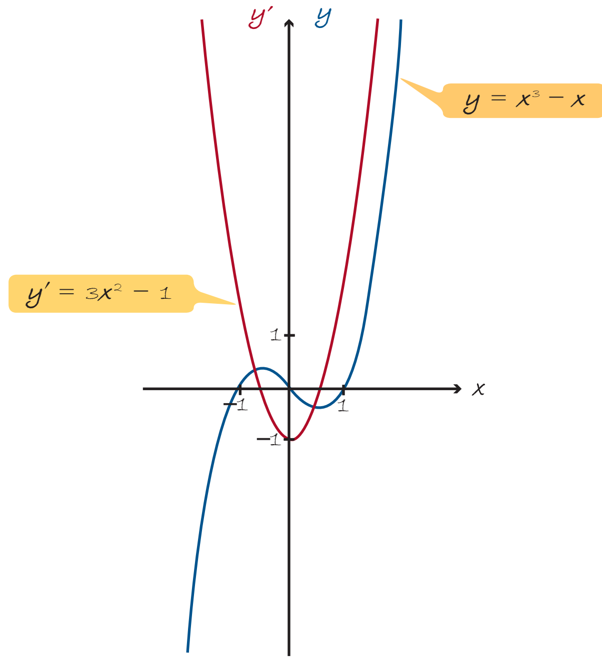
Podemos esperar este comportamiento si analizamos la derivada de la función, $y' = 3x^2 - 1$. Igualando la derivada a 0 encontramos dos valores de x:

$$3x^2 - 1 = 0 \qquad 3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

La gráfica de la derivada, $y' = 3x^2 - 1$ es una parábola que cruza el eje horizontal en $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Su vértice se encuentra donde la derivada de ella, $y' = 3x^2 - 1$ es igual a 0; esto es, donde $y'' = 6x = 0$, o sea $x = 0$. Si evaluamos la derivada en $x = 0$ tenemos que el vértice de la parábola es $(0,-1)$. En la siguiente figura aparecen ambas, función y su derivada.



Al observar ambas gráficas juntas, se visualiza que en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ la función $y = f(x) = x^3 - x$ tiene un punto máximo, pues su derivada ahí es 0 y cruza de valores positivos a negativos. El valor máximo se calcula evaluando la función ahí:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-1+3}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Así mismo, en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ la función $y = f(x) = x^3 - x$ tiene un punto mínimo, pues su derivada es 0 ahí y pasa ahora de valores negativos a positivos. El valor mínimo es

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1-3}{3\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

El punto de inflexión de $y = x^3 - x$ en $(0, 0)$ se confirma porque corresponde con el punto mínimo (vértice) de la derivada $y' = 3x^2 - 1$ en $x = 0$.

Nuevamente, la constante c que se suma a la expresión,

$$f(x) = x^3 - x + c,$$

no va a alterar la derivada; el comportamiento de esta familia de funciones es análogo al de $f(x) = x^3 - x$, salvo por una traslación vertical hacia arriba o abajo, dependiendo del signo positivo o negativo de la constante c.

¡TOMA NOTA!

Cuando un número irracional del tipo $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{3}$ ó $\sqrt{5}$ ...

se eleva al cubo:

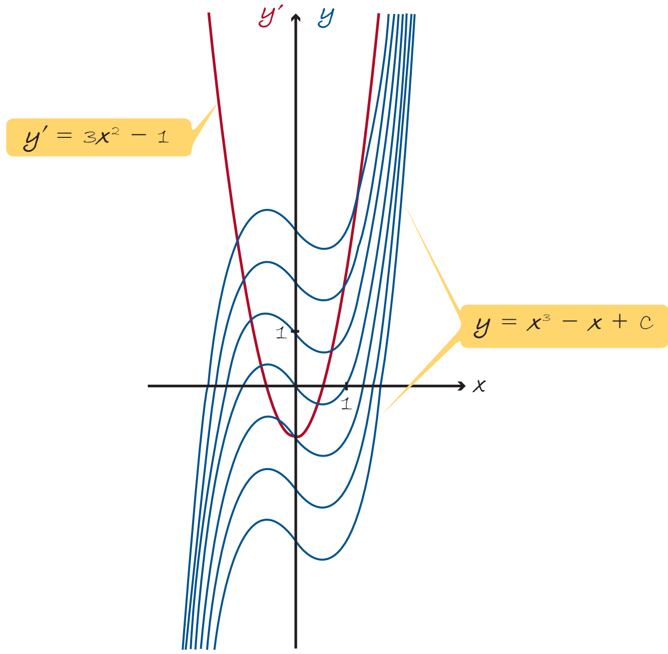
$\left(\sqrt{2}\right)^3$ ó $\left(\sqrt{3}\right)^3$ ó $\left(\sqrt{5}\right)^3$ ...

se obtiene

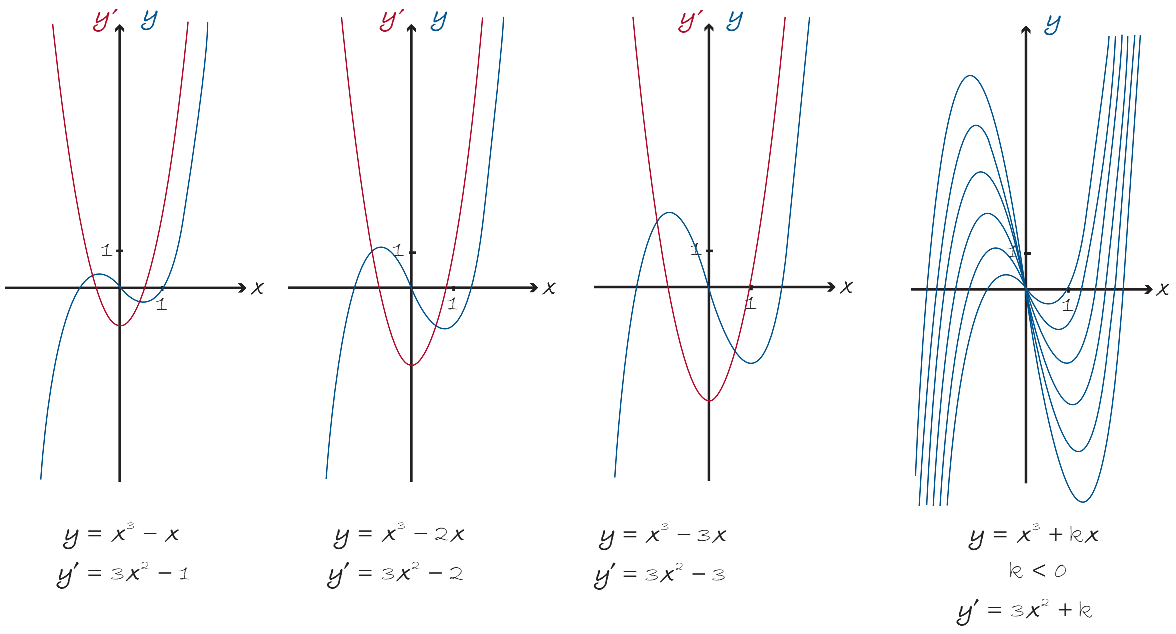
$2\sqrt{2}$ ó $3\sqrt{3}$ ó $5\sqrt{5}$ ...

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)}_{2}\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$



En la siguiente secuencia puede identificarse el comportamiento que provoca el parámetro $k < 0$ al agregar el término lineal kx a la función $y = x^3$.



Pensando en términos de la derivada, observamos que a medida que varía el parámetro k, esta derivada es una parábola que va trasladándose verticalmente hacia abajo, con lo que sus cortes con el eje x se van separando cada vez más, haciendo que el punto máximo y el punto mínimo de la función se vayan distanciando cada vez más del origen. A su vez, el vértice de la parábola (derivada) que está cada vez más lejano del origen, provoca que el punto de inflexión de la función (que está en el origen) presente una inclinación tendiente hacia la vertical pero con una pendiente negativa.

¡TOMA NOTA!

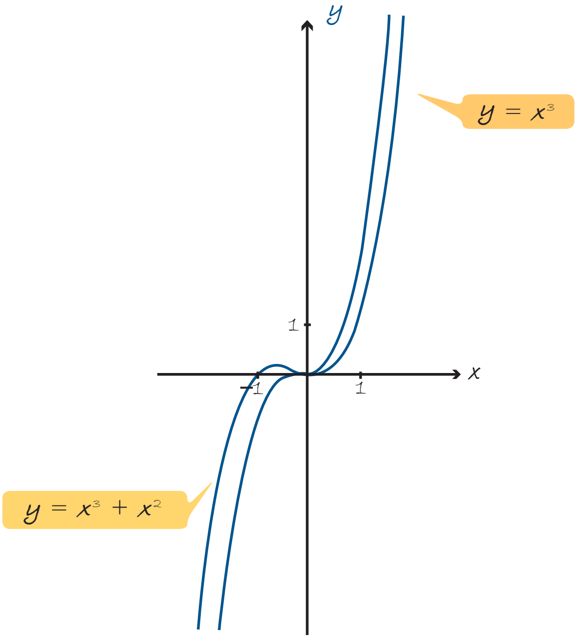
La habilidad para transitar entre "ver" una representación gráfica de una función y "ver" su representación algebraica, es decir, su fórmula $f(x)$... **no es innato**

Es una habilidad que se desarrolla... y adquiere un nivel de **competencia matemática.**

Secuencia 4: Analicemos ahora el efecto de agregar el término cuadrático x^2 a la función $y = f(x) = x^3$. En la siguiente figura aparece esta función junto con la nueva función $y = f(x) = x^3 + x^2$.

Puede observarse que "se levanta" un punto máximo en la zona negativa de x, y en $(0,0)$, el punto de inflexión de $y = x^3$, ahora parece convertirse en un punto mínimo de la nueva función.

Podemos confirmar esto si razonamos en términos de la derivada de la función $y = x^3 + x^2$ que es $y' = 3x^2 + 2x$.



Al igualar a 0 esta derivada obtenemos

$$3x^2 + 2x = 0$$

de donde

$$x(3x+2) = 0.$$

Igualamos a 0 ambos factores y tenemos que

$$x = 0 \quad \text{y} \quad 3x + 2 = 0$$

de donde

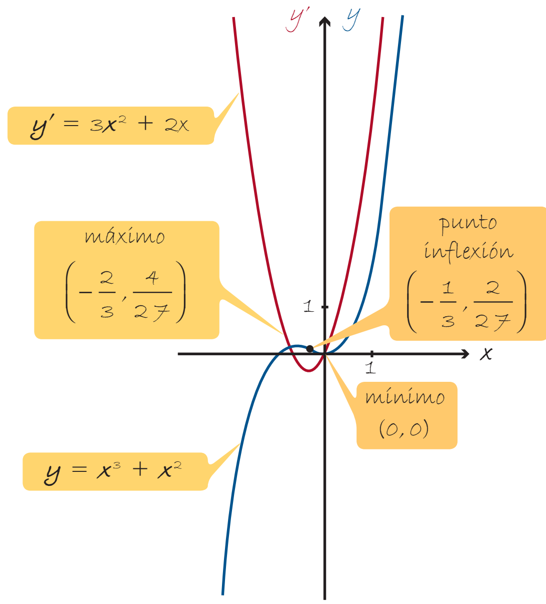
$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = -\frac{2}{3}.$$

Tenemos dos valores donde la derivada es 0 (la cual es una parábola cóncava hacia arriba) y si observamos la gráfica de la función $f(x)$ podemos decidir cuál valor de $x = 0$ y $x = -\frac{2}{3}$ corresponde con máximo y cuál con mínimo.

Identificamos por la gráfica que en

$$(0, f(0)) = (0,0)$$

la función $f(x) = x^3 + x^2$ tiene un punto mínimo y en $\left(-\frac{2}{3}, f\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{27}\right)$ tiene un punto máximo.



El punto de inflexión de $f(x)$, situado entre el máximo y el mínimo, se encuentra en donde la segunda derivada es 0.

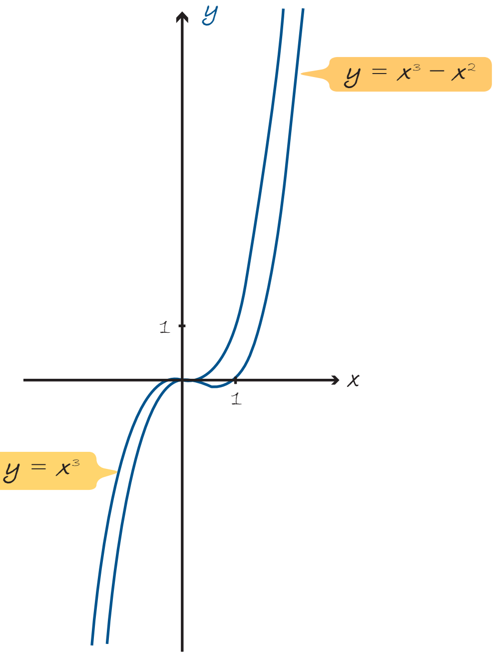
Derivamos $y' = 3x^2 + 2x$, obtenemos $y'' = 6x + 2$ y al igualarla a 0 despejamos x:

$$6x + 2 = 0 \qquad 6x = -2 \qquad x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Por tanto, el punto de inflexión de la función $f(x) = x^3 + x^2$ es

$$\left(-\frac{1}{3},\ f\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{27}\right).$$

Mostramos la función y su derivada enseguida. Consideremos ahora que a la función $f(x) = x^3$ le restamos el término cuadrático, obteniendo $f(x) = x^3 - x^2$. Presentamos ambas gráficas en seguida observando que el efecto ahora es hacer aparecer un punto mínimo en la zona positiva del eje x, y el origen se convierte en un punto máximo.



Este efecto es predecible si analizamos la gráfica de su derivada como lo hicimos en el caso anterior. Puede visualizarse que la derivada es una parábola cóncava hacia arriba que ahora corta al eje horizontal en $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$.

En la siguiente imagen presentamos a las funciones

$$f(x) = x^3 + x^2 \qquad \text{y} \qquad f(x) = x^3 - x^2$$

en el mismo sistema coordenado y agregamos sus derivadas. Observa cómo la imagen visual de la derivada nos explica el comportamiento de las funciones correspondientes.

¡Toma nota!

Cuando un cociente está elevado a una potencia

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5$$

se elevan a esa potencia ambos números

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1^3}{\left(\sqrt{3}\right)^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{(-1)^5}{2^5} = \frac{-1}{2^5} = -\frac{1}{32}$$

¡TOMA NOTA!

Para resolver ecuaciones **cuadráticas** como

$3x^2 + 2x = 0$

basta factorizar x...

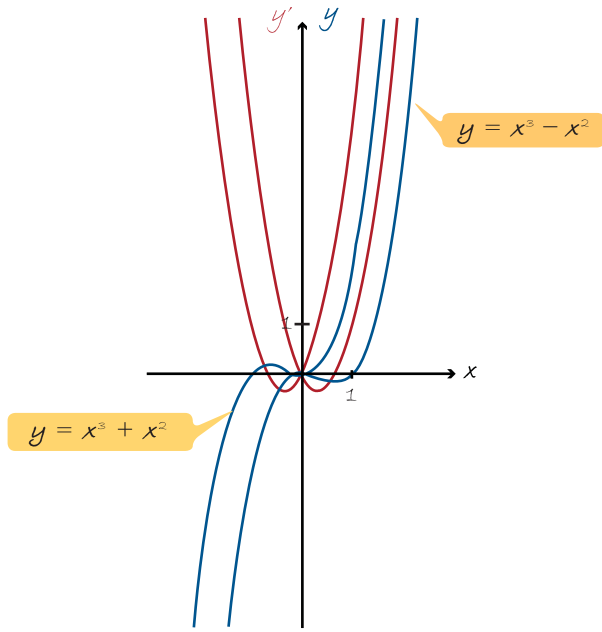
e igualar ambos factores a 0:

$3x^2 + 2x = 0$

$x(3x + 2) = 0$

$x = 0 \qquad 3x + 2 = 0$

$x = -\dfrac{2}{3}$

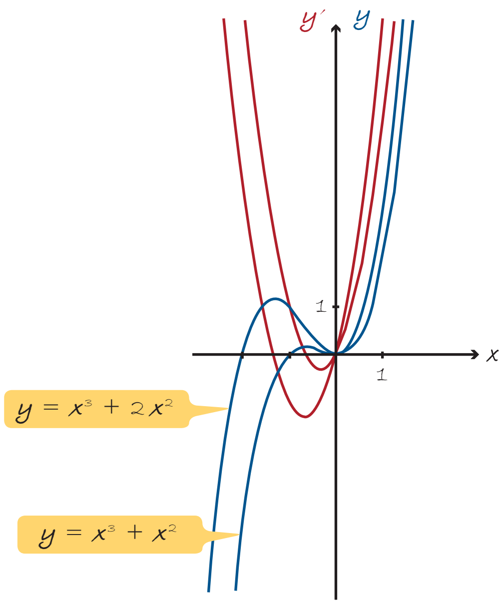


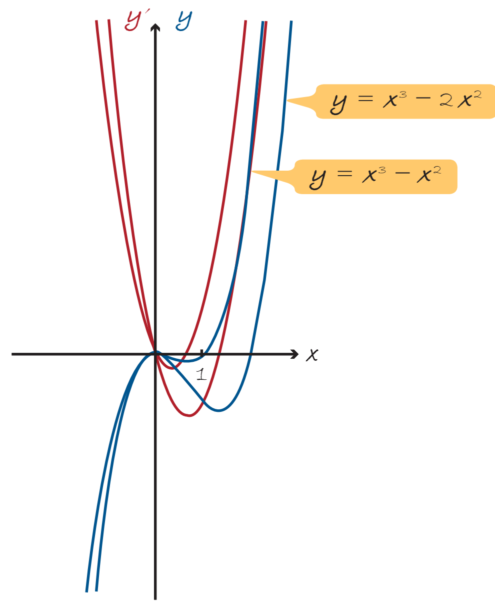
Las siguientes imágenes permiten comparar el comportamiento de

$$f(x) = x^3 + x^2 \quad \text{con} \quad f(x) = x^3 + 2x^2,$$

así como el de $f(x) = x^3 - x^2$ con el de $f(x) = x^3 - 2x^2$

a través de comparar sus derivadas.





Cabe observar que si nos concentramos pensando en los cortes con el eje x de las gráficas de las derivadas, podemos identificar fácilmente cuál es la función que les corresponde.

Otra manera posible de identificar las gráficas de estas funciones cúbicas es analizando sus cortes con el eje x. Para eso debemos igualar a 0 ambas funciones y resolver las ecuaciones que se generan.

¡Toma nota!

Para resolver ecuaciones **cuadráticas** como

$3x^2 - 4x = 0$

basta factorizar x...

e igualar ambos factores a 0:

$3x^2 - 4x = 0$

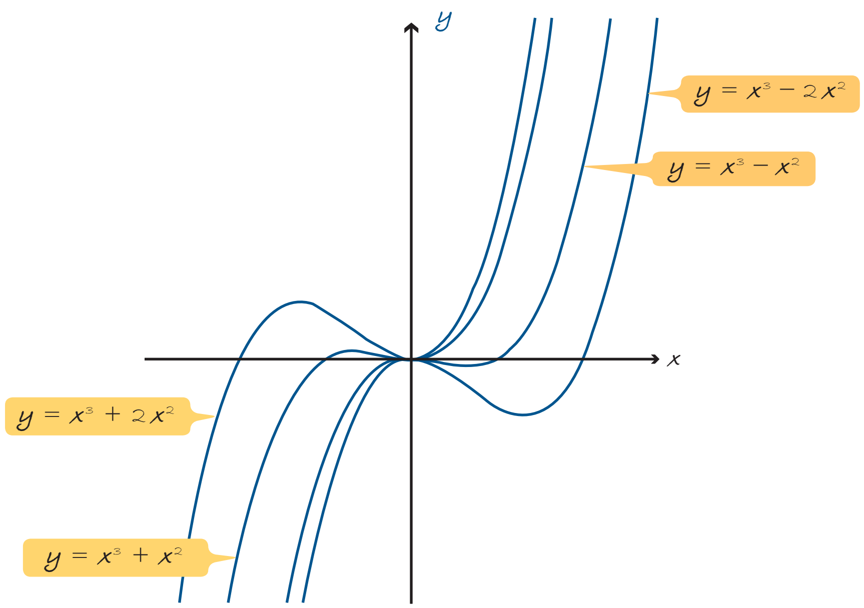
$x(3x - 4) = 0$

$x = 0$ $\quad$ $3x - 4 = 0$

$x = \frac{4}{3}$

Por ejemplo, de $x^3 - x^2 = 0$ se obtiene la raíz doble $x = 0$ y la raíz $x = 1$, mientras que de $x^3 + 2x^2 = 0$ se obtiene la raíz doble $x = 0$, además de la raíz $x = -2$.

Las raíces dobles en $x = 0$ se manifiestan en esa forma de "tocar pero no cortar" el eje x en el origen $(0,0)$. Esto se observa para las 4 curvas, que mostramos ahora en el mismo sistema coordenado, sin graficar su derivada.



Por último, en la siguiente imagen visualizamos el efecto del parámetro k en la familia de funciones $y = f(x) = x^3 + k\,x^2$ para casos positivos y negativos de este valor numérico.

¡Toma nota!

Para resolver ecuaciones **cúbicas** como

$x^3 + x^2 = 0$

basta factorizar x^2...

e igualar ambos factores a 0:

$x^3 + x^2 = 0$

$x^2(x + 1) = 0$

$x^2 = 0$ $\quad$ $x + 1 = 0$

$x = 0$ $\quad$ $x = 0$ $\quad$ $x = -1$

(doble)

¡Toma nota!

Para resolver ecuaciones **cúbicas** como

$x^3 - 2x^2 = 0$

basta factorizar x^2...

e igualar ambos factores a 0

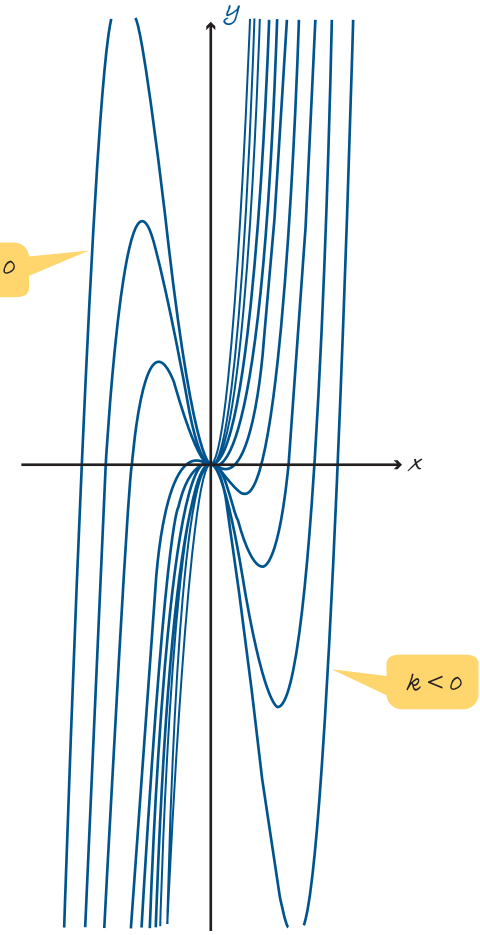
$x^3 - 2x^2 = 0$

$x^2(x - 2) = 0$

$x^2 = 0$ $\quad$ $x - 2 = 0$

$x = 0$ $\quad$ $x = 0$ $\quad$ $x = 2$

(doble)



$y = x^3 + k\,x^2$

El análisis del comportamiento visual de las funciones cúbicas que hemos considerado en las secuencias anteriores es suficiente para tener una idea clara de todas las posibilidades en la graficación de funciones cúbicas. Podemos reconocer esto a través de establecer de manera formal lo siguiente.

Síntesis: Lenguaje simbólico en Matemáticas. Modelo Cúbico.

El Modelo Cúbico:

$$y = f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3$$

es un modelo matemático tal que su derivada

$$y' = f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2$$

se representa mediante un Modelo Cuadrático.

Incluso sabemos que su segunda derivada se representa mediante una función lineal, y hablando de una tercera derivada, ésta sería una función constante.

Cuando uno analiza el comportamiento de la función derivada, se puede predecir el comportamiento de la función cúbica, que es su antiderivada. El análisis de la derivada en este caso es relativamente simple porque se trata de una función cuadrática.

La gráfica de

$$y' = f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

es una parábola vertical.

Información importante de esta parábola es su **vértice**, que señala al punto **máximo** o **mínimo** de la derivada.

Encontramos ese punto "al derivar la derivada" e igualarla a 0, esto es

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x = 0$$

La solución de esta ecuación lineal nos provee del valor de la coordenada x del vértice de la parábola, y su coordenada vertical se obtiene al evaluar la función derivada en ese x.

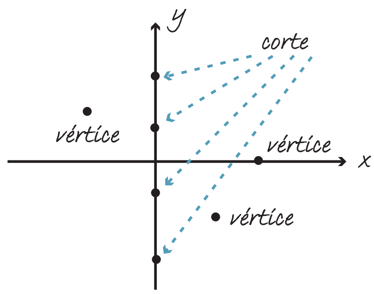
Esta información del vértice de su derivada podemos unirla a la información del corte con el eje vertical, que es evidente en la expresión matemática

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2,$$

ya que $f'(0) = a_1$, se trata justo del coeficiente que no tiene la variable x en la función.

Teniendo la información del vértice y del corte con el eje vertical, podemos realizar el trazado de la parábola. Cabe notar que su concavidad queda sobredeterminada con esos datos, al unir el corte con el eje y y el vértice con un trazado continuo. Puedes convencerte de esto realizando la siguiente práctica visual.

Intenta dibujar las 12 parábolas que tienen uno de los 3 vértices marcados y pasan por uno de los cortes con el eje y marcados, verás que esta información obliga la concavidad.



Al unir el vértice y el corte con el eje y para trazar la parábola, derivada de la función cúbica, nos percatamos que pueden suceder 3 casos: que la parábola corte al eje x, que sólo lo toque (justo en el vértice) o bien, que no corte al eje x. Lo anterior se puede decidir al plantear la ecuación cuadrática:

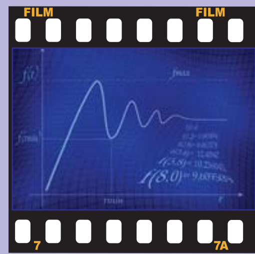
$$y' = f'(x) = 0$$

y analizar el valor de su discriminante D.

- Si $D > 0$ corta en dos valores distintos de x.
- Si $D = 0$ sólo corta (toca) el eje x, en su vértice precisamente.
- Si $D < 0$ la parábola no corta al eje x.

Con esto hemos terminado de precisar el comportamiento de la parábola, que es la gráfica de la derivada de la función cúbica y será a partir de ésta que el comportamiento de su antiderivada, la función cúbica, quedará evidente para precisarse de forma numérica.

¿Sabías que?...



En el caso de la función cúbica

$$y = f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

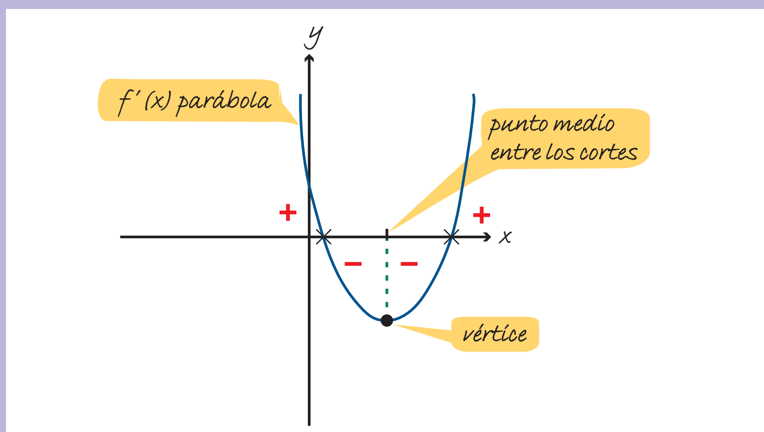
que tiene un máximo, y un mínimo, siempre encontraremos un punto de inflexión justo a la mitad entre los 2 valores de x donde se tiene el máximo y mínimo.

La razón de que esto ocurra se debe a que su derivada,

$$f'(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

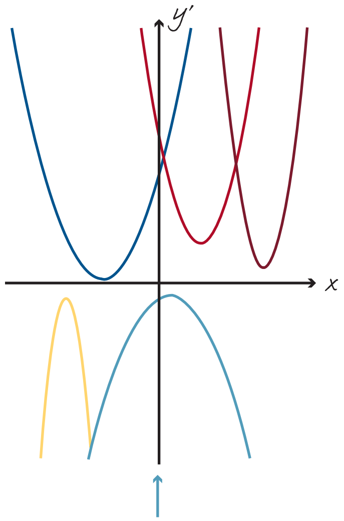
es una parábola que debe cortar el eje x para producir el valor máximo y mínimo de la función cúbica... y como ya hemos argumentado, el punto mínimo o máximo de la derivada corresponde con el punto de inflexión de la gráfica de la cúbica.

Este punto mínimo o máximo de la derivada es el vértice de la parábola, situado necesariamente en el punto medio entre los cortes de la parábola con el eje x... esa es la razón de este comportamiento tan "simétrico" en la cúbica.

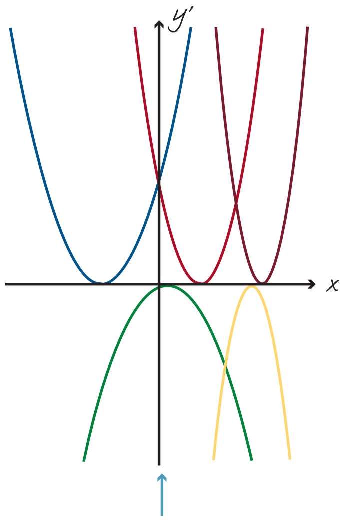


Sin embargo, no hay razón para generalizar este resultado si la función tiene un grado mayor a tres.

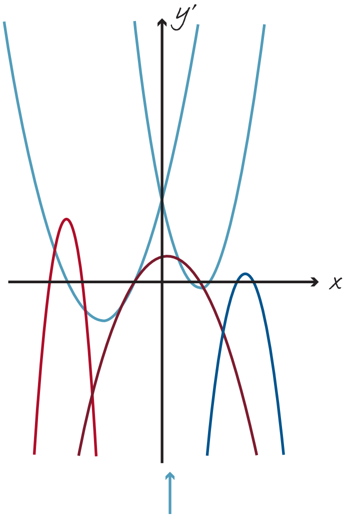
Habrás notado que nuestra estrategia ha consistido en visualizar la gráfica de la función derivada y de ella convertir su información en información de la función cúbica. Por lo que hemos visto, los escenarios que se tienen son básicamente 3, los representamos enseguida:



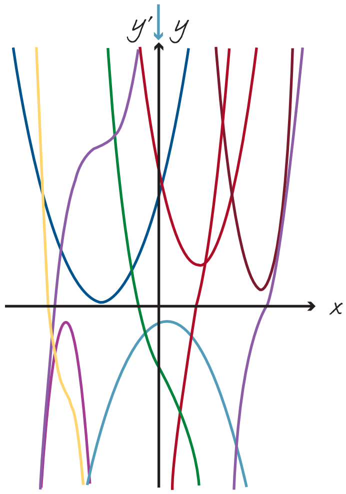
Si la derivada no cruza el eje horizontal, la función tiene un punto de inflexión...

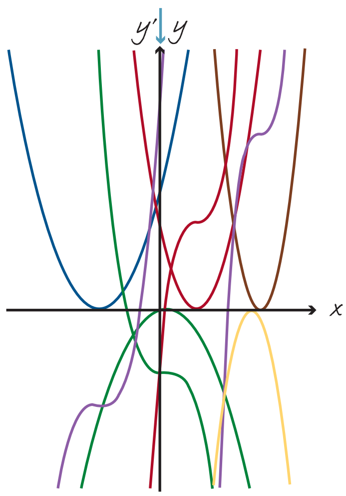


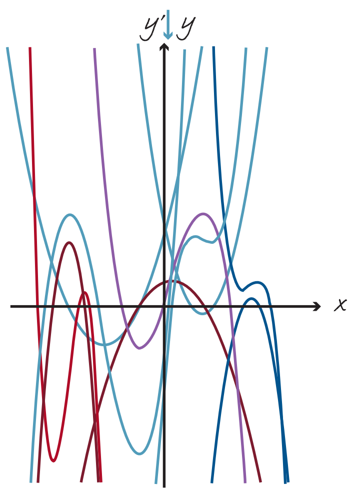
Si la derivada toca y no cruza el eje horizontal, la función tiene un punto de inflexión de "inclinación horizontal"...



Si la derivada cruza el eje horizontal, la función tiene un máximo, un mínimo y un punto de inflexión...







¿Sabías que?...

Cuando resolvimos ecuaciones cuadráticas nos percatamos que las soluciones no resultan ser siempre números reales. Basta que el discriminante sea negativo para convencernos de que aparecen expresiones donde $\sqrt{-1}$ forma parte de la solución que la fórmula general ofrece.

Aceptando expresiones del tipo a + bi donde a y b son números reales, estamos aceptando la existencia de un conjunto de "números" que contiene al de los números reales, cuando el caso es que b = 0.

Los números **imaginarios** o **complejos** son suficientes para establecer teóricamente que cualquier ecuación cuadrática con coeficientes reales tiene dos soluciones o raíces en ese conjunto de números.

¡Toma nota!

En la educación básica conocimos a
i
como la tercer vocal...
pero en Matemáticas, además de usarla como tal, debemos aceptarla como
"la unidad imaginaria"
$i = \sqrt{-1}$
¡te imaginas!

Aplicación: La Función Cúbica en contextos reales.

Como consecuencia del análisis de la situación problema en este y el pasado tema, hemos evidenciado relaciones entre las gráficas de una función y la de su derivada. Estas relaciones se refieren al comportamiento de crecimiento; decrecimiento, concavidad hacia arriba y hacia abajo, así como existencia de puntos máximo, mínimo y puntos de inflexión de la gráfica de la función.

Cuando el contexto formal de la función $y = f(x)$ se llena de significado al representar a una magnitud y que depende de otra x, la gráfica de la función expresa de un modo visual el comportamiento de la magnitud, el cual, como hemos visto, "lo dicta" su razón de cambio, esto es, su derivada.

Aplicamos el aprendizaje que hemos generado en algunos contextos reales para ilustrar su utilidad en la predicción de eventos.

Caso 1. La temperatura como función del tiempo

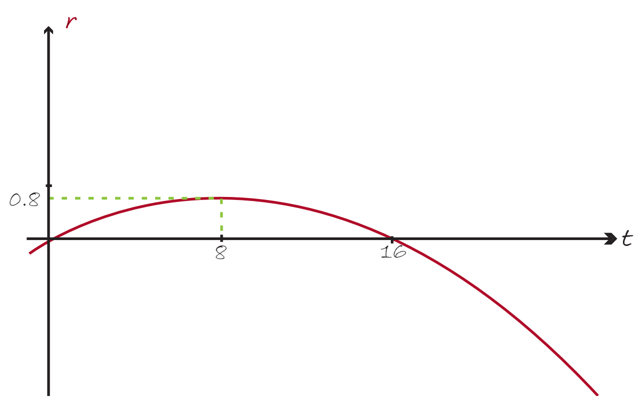
Si pensamos en el cambio que experimenta la temperatura del medio ambiente en un día cualquiera, podemos identificar dos sucesos comunes, la temperatura aumenta de manera notoria al amanecer, llegará un momento en que no sea notorio pero sigue el aumento hasta llegar a un valor máximo y entonces comienza el descenso. Un Modelo Cuadrático para la razón de cambio de la temperatura pudiera resultar adecuado para ilustrar este comportamiento, aunque veremos posteriormente un modelo que resulta más cercano a la realidad.

Supongamos que la temperatura, T, en un día de enero en el campus, era de 2 °C a las cero horas, y la razón a la que fue cambiando durante ese día, con respecto al tiempo t, está siendo modelada por la función

$$r(t) = -\frac{1}{80}t^2 + \frac{1}{5}t \quad \text{°C/hr}$$

a) Grafica la razón de cambio, evidenciando la información importante que provee.

Utilizamos un software de graficación y obtenemos la curva siguiente:



Sabemos que se trata de una parábola pues es una función cuadrática. Eso nos permite localizar su vértice al derivar la razón de cambio e igualarla a 0.

$$r'(t) = -\frac{1}{80}(2t) + \frac{1}{5} = -\frac{1}{40}t + \frac{1}{5} = 0$$

de donde $$\frac{1}{40}t = \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad t = \frac{40}{5} = 8.$$

El valor máximo de la razón de cambio de la temperatura es

$$r(8) = -\frac{1}{80}(8)^2 + \frac{1}{5}(8) = -\frac{1}{80}(64) + \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$$

Podemos además precisar los valores de t *donde la razón de cambio es* 0 *y la gráfica cruza el eje horizontal. Aunque es claro que esto sucede en* $t = 0$ *y en* $t = 16$ *por la simetría de esta curva, lo determinaremos también algebraicamente. Para eso igualamos la razón de cambio a* 0:

$$r(t) = -\frac{1}{80}t^2 + \frac{1}{5}t = 0$$

Factorizamos t: $$t\left(-\frac{1}{80}t + \frac{1}{5}\right) = 0$$

e igualamos a 0 *cada factor, de donde*

$$t = 0 \quad \text{o bien} \quad -\frac{1}{80}t + \frac{1}{5} = 0$$

esto es, $t = 0$ *y* $t = 16$ *como esperábamos.*

b) Encuentra la función que predice la temperatura T en términos del tiempo t, para cualquier hora en ese día.

La función de temperatura se obtiene antiderivando su razón de cambio, $r(t) = -\frac{1}{80}t^2 + \frac{1}{5}t$, *por tanto,*

$$T(t) = -\frac{1}{80}\frac{t^3}{3} + \frac{1}{5}\frac{t^2}{2} + C$$

$$T(t) = -\frac{1}{240}t^3 + \frac{1}{10}t^2 + C$$

Sabiendo que a las cero horas la temperatura era $T(0) = 2$ °C *podemos sustituir este valor en la función pues coincide con el valor de la constante* C:

$$T(t) = -\frac{1}{240}t^3 + \frac{1}{10}t^2 + 2$$

La temperatura se modela con esta función cúbica.

c) ¿Cuál fue la temperatura a la que se llegó a las 24 horas de ese día?

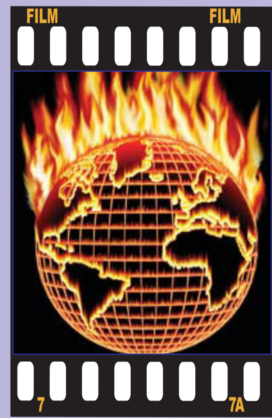
Evaluamos la función de temperatura en $t = 24$:

$$T(24) = -\frac{1}{240}(24)^3 + \frac{1}{10}(24)^2 + 2$$
$$= -57.6 + 57.6 + 2 = 2$$

La temperatura vuelve a los 2 °C *pasadas las* 24 *horas, a la media noche, donde comienza un nuevo "ciclo" de cambio en sus valores.*

¿Sabías que?...

El **calentamiento global** es tema en debate.



Es común en la actualidad que al conversar acerca de las altas temperaturas registradas durante el día, la conversación llegue en cierto momento a girar en torno al tema del **cambio climático**.

A partir de declaraciones emitidas en 1988 por el Panel Intergubernamental sobre el Cambio Climático (organización creada por la ONU), este tema se ha vuelto oficial.

Afirmar que la quema de petróleo, carbón y gas natural, que el hombre ha aprovechado desde finales del siglo XVII como combustibles fósiles, haya causado un aumento del dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera, provoca neurosis y ansiedad en gran parte de la población preocupada por el efecto invernadero y sus consecuencias en cambios catastróficos en el clima de nuestro planeta.

Sin embargo, esta afirmación también ha provocado reacciones de científicos que aseguran que se trata de un evento esperado y presentan razones de peso para convencer que debemos ser cautos acerca de aceptar al CO_2 como el agente causante del calentamiento, y esto además, si acaso estamos realmente ante un fenómeno de calentamiento.

No obstante, este tema es ocasión para subrayar la importancia de contar con una comunicación responsable, donde los medios tomen una posición activa brindando información para crear conciencia y motivar una educación basada en el estudio y análisis de los problemas reales de nuestro ambiente. Y tú... ¿qué piensas?

d) ¿Hasta qué hora la temperatura estuvo creciendo?, ¿dónde lo hace cada vez más rápido?, ¿dónde lo hace cada vez más lento?

La temperatura crece mientras su razón de cambio es positiva, por tanto crece hasta las 16 horas, pasadas estas a partir de la hora cero. Esto lo observamos en la gráfica de la razón de cambio que cruza el eje del tiempo en $t = 16$.

Sin embargo, la forma en que crece la temperatura difiere; de las 0 *a las* 8 *horas, lo hace cada vez más rápido, y de las* 8 *a las* 16 *horas, lo hace cada vez más lento.*

e) ¿Cuál fue la temperatura máxima en ese día y a qué hora?

La temperatura máxima se alcanza en el instante en que ésta deja de aumentar, esto es, en $t = 16$, *donde la razón de cambio cruza el eje dejando de ser positiva para pasar a ser negativa. Para calcular el valor máximo de la temperatura evaluamos la función:*

$$T(16) = -\frac{1}{240}(16)^3 + \frac{1}{10}(16)^2 + 2$$

$$= -\frac{4096}{240} + \frac{256}{10} + 2 = -\frac{256}{15} + \frac{128}{5} + \frac{2}{1}$$

$$= \frac{-256 + 384 + 30}{15} = \frac{158}{15} \approx 10.5333$$

Por lo tanto, a las 4 *de la tarde (*16 *horas) la temperatura máxima fue prácticamente de* 10.5 *°C.*

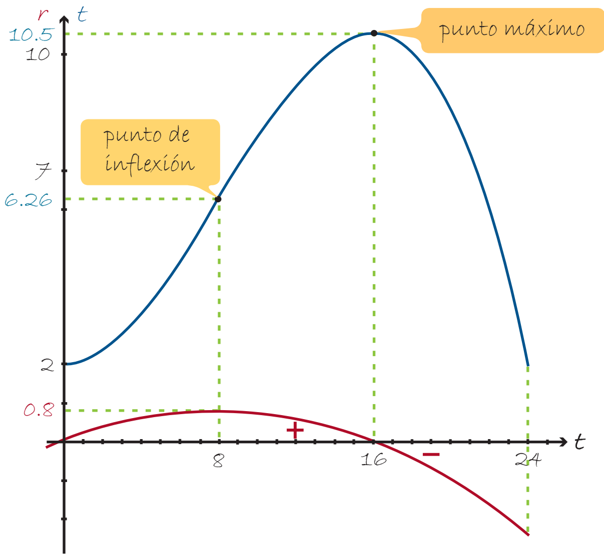
f) Grafica la función de la temperatura en un mismo plano que su razón de cambio y señala su punto máximo y de inflexión.

La gráfica de la temperatura tiene su valor máximo en $t = 16$ *ya que ahí la razón de cambio pasa de valores positivos a valores negativos. El punto de inflexión aparece en la gráfica de temperatura cuando en la gráfica de la razón de cambio encontramos un punto máximo, o sea en* $t = 8$. *Evaluamos la temperatura ahí:*

$$T(8) = -\frac{1}{240}(8)^3 + \frac{1}{10}(8)^2 + 2$$

$$= -\frac{512}{240} + \frac{64}{10} + 2 = -\frac{32}{15} + \frac{32}{5} + \frac{2}{1}$$

$$= \frac{-32 + 96 + 30}{15} = \frac{94}{15} \approx 6.2667$$



Con el valor inicial de 2 °C *se completa la gráfica de la temperatura reflejando los eventos importantes y su relación con la gráfica de la razón de cambio.*

Caso 2. La reacción a un medicamento

Todos los medicamentos vienen acompañados en su presentación de información entre la cual se encuentra la dosis adecuada para menores y adultos. El tomar una dosis menor o mayor a la prescrita disminuye el efecto posible del medicamento. La intensidad del efecto a una dosis de medicamento puede ser representada (aunque existen mejores modelos) por una función cúbica de la forma

$$R = R(x) = x^2\left(\frac{k}{2} - \frac{x}{3}\right)$$

donde k es una constante positiva que depende del medicamento y x es la cantidad de medicina (dosis) que se administra.

a) Encuentra la razón de cambio de la intensidad del efecto en el cuerpo con respecto a una dosis x dada.

Para encontrar la razón de cambio de R, primeramente desarrollamos el producto y expresamos R como función cúbica con sus coeficientes:

$$R(x) = x^2\left(\frac{k}{2} - \frac{x}{3}\right) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

De ahí que

$$r(x) = R'(x) = \frac{k}{2}(2x) - \frac{1}{3}(3x^2)$$

$$R'(x) = kx - x^2$$

b) Realiza la gráfica de la razón de cambio $R'(x)$.

La gráfica de $R'(x)$ es una parábola, observamos que esta cruza el eje horizontal cuando $R'(x) = 0$, esto es, cuando

$$kx - x^2 = x(k - x) = 0,$$

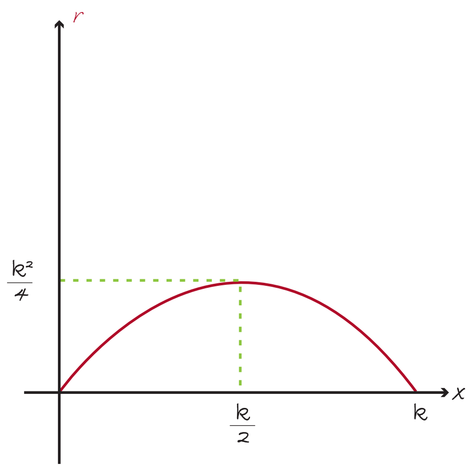
de donde $x = 0$ *y* $x = k$.

Su vértice está a la mitad entre estos valores, lugar que coincide con el valor de x donde $R''(x) = k - 2x = 0$, o sea, en $x = \frac{k}{2}$.

Calculamos el valor de la razón de cambio ahí para completar el trazado de la gráfica enseguida.

$$R'\left(\frac{k}{2}\right) = k\left(\frac{k}{2}\right) - \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

$$= \frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{4} = \frac{k^2}{4}$$



c) Tomando en cuenta la gráfica de la razón de cambio $R(x)$, grafica ahora $R(x)$ y expresa con palabras el comportamiento de la reacción en términos de la cantidad de medicamento administrada.

¿Sabías que?...

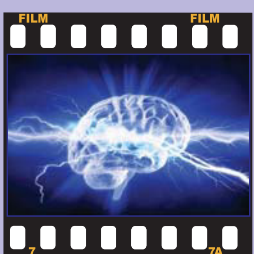
Además del efecto farmacológico que produce cualquier medicamento… se produce también un “efecto placebo”.

Se trata de un efecto psicológico que provoca la reducción de los síntomas como resultado de estar recibiendo una atención terapéutica; y depende de la confianza que uno pone en el medicamento o en la persona que le orienta, siendo médico o no.

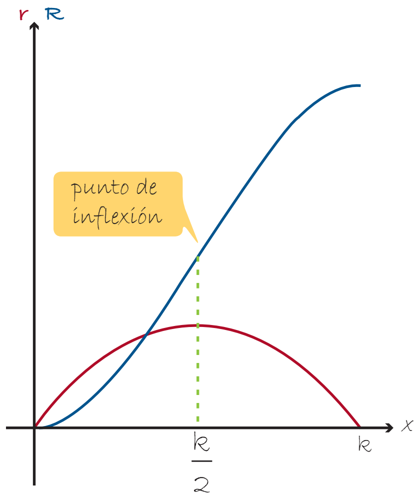
En los experimentos clínicos se busca controlar este efecto placebo y determinar en qué proporción la mejoría clínica puede explicarse por la sola percepción del paciente al sentirse tratado.

Investigaciones recientes en Neurología han descubierto los mecanismos cerebrales que explican el efecto placebo.

Cuando uno va a tomar un medicamento, nuestro cerebro activa una región vinculada a la habilidad de experimentar un beneficio o recompensa y segrega una sustancia provocando alivio al dolor.



El valor máximo de la razón de cambio da lugar a un punto de inflexión en la gráfica de la intensidad del efecto, donde se da un cambio en el comportamiento de la intensidad habiendo llegado ésta a su máxima rapidez de cambio.



Por las gráficas que realizamos podemos visualizar que la variación de la intensidad es máxima cuando la dosis es $x = \frac{k}{2}$, *valor que se relaciona con el parámetro* k *que aparece en la función* $R(x)$.

Caso 3. La resistencia de una viga

La resistencia de una viga que se fabrica de un madero cilíndrico puede suponerse directamente proporcional al producto del largo por el cuadrado del ancho de la sección transversal rectangular que se determina.

En el caso de la fabricación de la viga a partir de maderos de 28 centímetros de diámetro y 3 de metros de largo, el modelo matemático toma la forma

$$R(x) = 0.5x\left(784 - x^2\right) \text{ kg/m}^2$$

donde x representa el largo de la sección transversal y la constante de proporcionalidad es 0.5.

a) Utiliza un graficador para representar visualmente el comportamiento de la resistencia de la viga en función del lado x de su sección transversal.

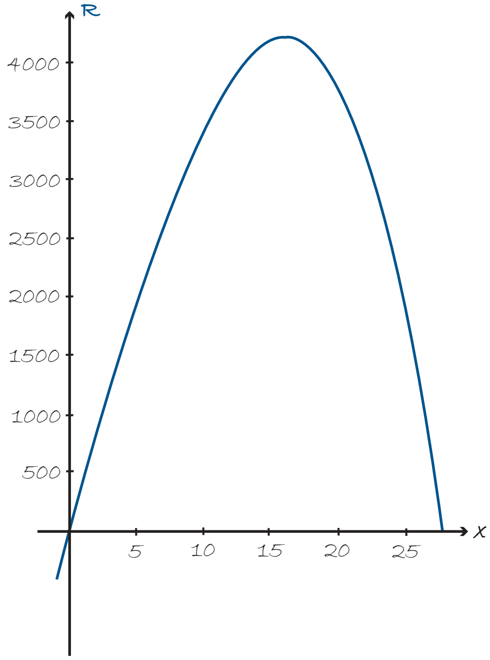
Obtenemos la siguiente imagen en la cual hemos considerado la zona donde la función se encuentra arriba del eje horizontal, que es en la que tiene sentido considerar esta situación, cuando el valor de la resistencia es positivo. Podemos encontrar el valor de x *donde cortamos el gráfico al igualar a* 0 *la función*

$$R(x) = 0.5x\left(784 - x^2\right) = 0$$

$0.5x = 0 \qquad\qquad 784 - x^2 = 0$

$x = \dfrac{0}{0.5} = 0 \qquad\qquad x^2 = 784$

$x = \pm 28$



El valor donde termina la gráfica es $x = 28$ *que representa el caso del mayor largo pero sin ancho en la sección transversal.*

b) Encuentra el valor x para que la viga tenga su máxima resistencia.

En la gráfica se aprecia el valor máximo de la resistencia cercano a $x = 15$, *sin embargo, el valor exacto es el que corresponde con aquél donde la derivada de la función cruza el eje* x *cambiando de valores positivos a negativos. Averiguamos dónde se da esto al igualar a* 0 *la razón de cambio.*

Primeramente encontramos esta función a partir de que

$$R(x) = 0.5x\left(784 - x^2\right) = 392x - 0.5x^3$$

Derivamos para obtener la razón de cambio de la resistencia

$$r(x) = R'(x) = 392 - 1.5x^2$$

Igualamos a 0 *y despejamos* x:

$$r(x) = 392 - 1.5x^2 = 0$$

$$392 = 1.5x^2$$

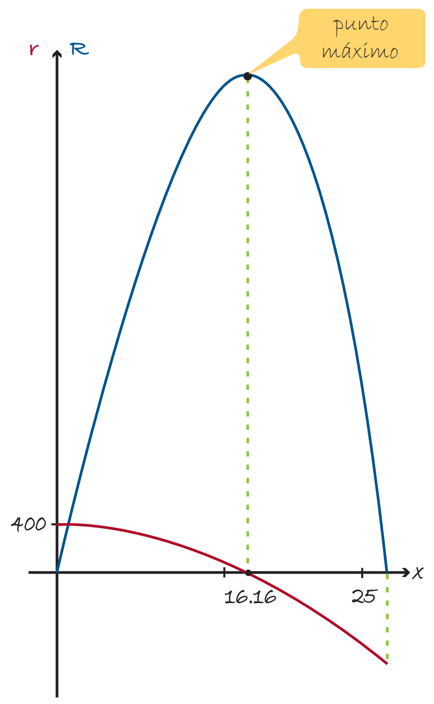
$$x^2 = \frac{392}{1.5} = \frac{784}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{784}{3}} \approx \pm 16.166$$

Descartamos el valor negativo por razones obvias del contexto, y así, el largo de la sección transversal de la viga de máxima resistencia es prácticamente de $x = 16.166$ *centímetros.*

c) Realiza la gráfica de resistencia y su razón de cambio en el mismo sistema coordenado y señala en ellas lo relacionado con lo que se ha obtenido en el inciso anterior.

Con un software de graficación obtuvimos las gráficas donde es clara la relación del valor máximo de la resistencia con el cruce en el eje horizontal de su derivada. Los valores positivos en la razón de cambio corresponden con el crecimiento de la resistencia y los valores negativos en la razón de cambio corresponden con el decrecimiento de la resistencia.



Caso 4. El costo total y marginal en Administración y Economía

Cuando se produce y comercializa cierta cantidad de artículos, se requiere modelar el costo total mediante una función matemática.

La función de costo total, $y = f(x)$, donde x representa cantidad de artículos, debe cumplir con ciertas propiedades:

- El valor $f(0)$ debe ser mayor o igual que cero $f(0) \geq 0$, porque indica el costo fijo de producción (renta de local, costo de equipo, etc.)
- $y = f(x)$ debe ser una función creciente, porque a mayor cantidad de artículos, el costo total debe necesariamente crecer.
- En niveles iniciales de producción (x relativamente pequeño) $y = f(x)$ tiene una gráfica cóncava hacia abajo; sin embargo, por lo común la producción de una cantidad grande llega a crecer con una tasa creciente, entonces la gráfica de $y = f(x)$ cambiará eventualmente su concavidad hacia arriba.

Una función cúbica suele ser apropiada para modelar matemáticamente el costo total, cuando su concavidad cambia en un intervalo especificado, y no tiene valor máximo ni mínimo en el primer cuadrante, donde $x, y > 0$.

Supongamos que la producción y comercialización de cierto artículo se modela mediante la función cúbica

$$y = c(x) = 45 + 60x - 12x^2 + x^3$$

donde y representa el costo total en miles de pesos y x representa decenas de artículos.

a) ¿Cuál es el costo que permanece constante en todos los niveles de producción?

Es el costo fijo de la producción que se calcula en la función de costo total al evaluarla en $x = 0$:

$$y = c(0) = 45 \text{ mil pesos.}$$

b) El costo marginal representa la variación del costo total "en el margen", es decir, para variaciones de x pequeños. Se le conoce como tasa de cambio del costo, o bien, en el lenguaje matemático formal, la derivada del costo total. Encuentra y grafica la función de costo marginal.

Como $y = c(x) = 45 + 60x - 12x^2 + x^3$ *entonces el costo marginal es su derivada:*

$$y' = c'(x) = 60 - 24x + 3x^2$$

cuya gráfica es una parábola vertical. Su vértice se encuentra al derivarle e igualar a 0 *esa segunda derivada del costo total:*

$$y'' = c''(x) = -24 + 6x = 0$$
$$6x = 24$$
$$x = 4.$$

¿Sabías que?...

Los materiales sólidos responden de manera diferente al soportar fuerzas externas.

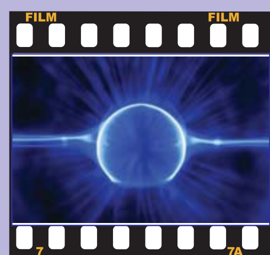
Las respuestas se conocen como **propiedades mecánicas** y el conjunto de estas es lo que se entiende por la **resistencia de los materiales** al ser expuestos a fuerzas externas.

Las propiedades mecánicas dependen también del medio ambiente; de la temperatura, presión y composición química de la atmósfera.

En general, la resistencia de los materiales disminuye cuando la temperatura o la presión aumentan, o cuando la atmosfera es muy oxidante o muy reductora.

Cuando una fuerza externa se aplica de manera uniforme en una cierta área, la magnitud física se conoce como el **esfuerzo** o **carga** aplicada. Estos pueden ser de tensión, compresión o cortantes, dependiendo del sentido en que se aplican las fuerzas.

Los materiales cerámicos son muy resistentes a las cargas en compresión, pero también se dice que son frágiles, esto último en el sentido de su diferencia con respecto a los metales, que se deforman más que ellos.



¿Sabías que?...

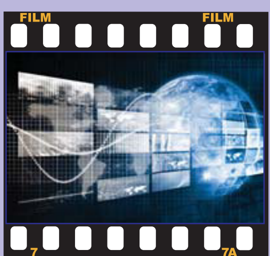
La tendencia actual en la búsqueda del producto que te genere el mayor margen de ganancia señala a los **productos digitales**.

La alternativa de un **negocio** basado en productos de información digitales es blanco de atención de quienes se inclinan por crear una microempresa altamente rentable.

La razón principal para que productos como software, ebooks, video o audio digital o sitios web por suscripción, provean de un alto margen de ganancia, es justamente que la misma Internet funciona como canal de distribución.

Al ser descargado directamente desde tu sitio de Internet, el producto llega de inmediato al comprador. No hay costos de manejo o envío, de almacenaje, de reproducción, y llega a cualquier parte del mundo donde exista conexión.

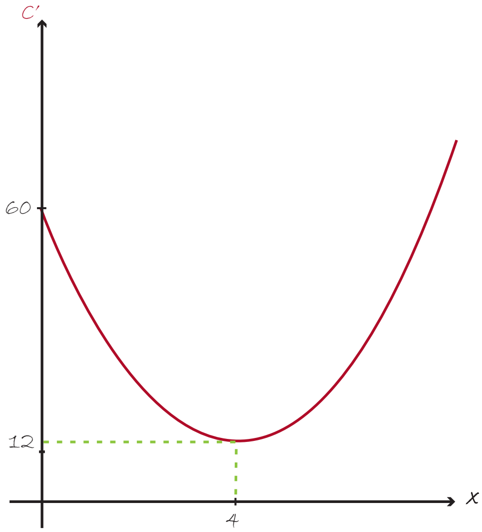
Los productos digitales han tenido un gran impacto con buena y amplia aceptación de parte de los usuarios de Internet. Crear nuestro propio producto de información digital se ha convertido en una verdadera forma de invertir en un negocio.



Evaluamos la derivada ahí para obtener las coordenadas del vértice de la parábola:

$$C'(4) = 60 - 24(4) + 3(16)$$
$$= 60 - 96 + 48 = 12$$

Con el vértice y el corte con el eje vertical en $C'(0) = 60$, *dibujamos la gráfica del costo marginal enseguida.*



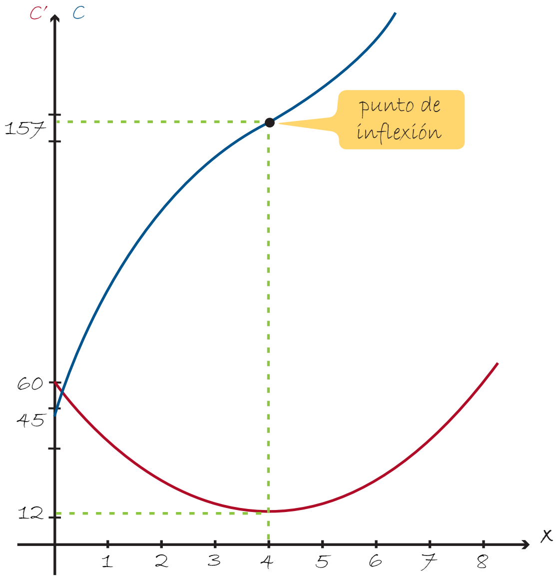
Observamos que la función de costo marginal toma sólo valores positivos, esto es, $C'(x) > 0$, *como debe satisfacerse, porque de esta manera la función* $C(x)$ *es creciente y representa un modelo del costo total.*

c) Realiza en el mismo sistema coordenado la gráfica de la función de costo total tomando en cuenta la información del costo marginal.

El punto mínimo en $f(x)$ *de la gráfica de costo marginal (la derivada) plantea la existencia de un punto de inflexión para la gráfica del costo total (la función). Conoceremos sus coordenadas si evaluamos el costo en* $x = 4$.

$$C(4) = 45 + 60(4) - 12(4)^2 + (4)^3$$
$$= 45 + 240 - 192 + 64 = 157$$

La gráfica de la función de costo total inicia en el eje vertical con el costo fijo $C(0) = 45$ *y por el decrecimiento del costo marginal entre* $x = 0$ *y* $x = 4$ *se debe comportar con concavidad hacia abajo ahí, cambiando luego su concavidad hacia arriba en el punto de inflexión, con coordenadas* $(4,\ 157)$

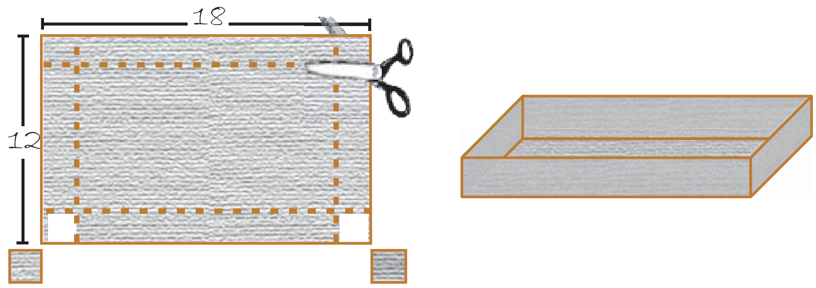


El valor de $x = 4$ *decenas de artículos ofrece la mejor opción bajo las condiciones del modelo matemático dado para la función costo total, porque si* x *rebasa el valor de* 4, *el costo total crece cada vez más rápido, en cambio, hasta antes de ese valor, el costo total estaba creciendo de un modo cada vez más lento.*

Caso 5. Una caja sin tapa que resulta óptima

El problema que planteamos a continuación, es del tipo que ya abordamos en el tema anterior, donde lo que se desea es optimizar en el sentido de obtener el mayor beneficio posible en una situación dada. El problema es el siguiente:

De una pieza rectangular de cartón de dimensiones 18 centímetros por 12 centímetros se pueden construir diferentes cajas sin tapa. Cada caja se construye recortando cuadrados iguales en las esquinas de la pieza de cartón y doblando hacia arriba las “cejas” marcadas para formar las caras laterales de la caja.



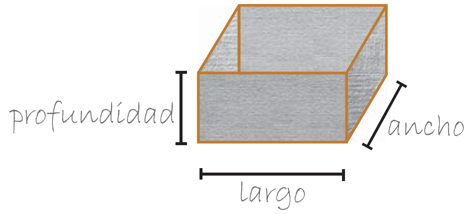
En esta situación, interesa encontrar la caja “óptima”, es decir, aquélla que contiene el volumen máximo y que se puede construir del modo descrito utilizando la pieza rectangular. A eso se abocan las siguientes instrucciones.

Antes que nada, observa que el problema “tiene sentido” ya que del modo indicado se pueden construir diferentes cajas con diferente volumen.

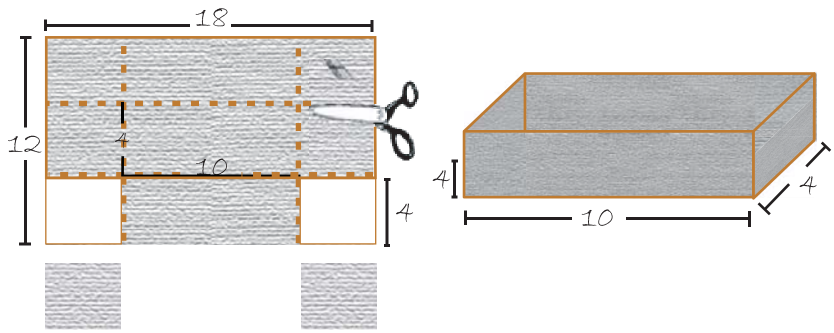
a) Calcula el volumen de dos cajas diferentes, asignando los valores de 4 y 2 centímetros al lado del cuadrado recortado en las esquinas.

Calculemos el volumen cuando el lado es de 4 centímetros:

El volumen es el producto del "largo" por el "ancho" de la base y por la "altura o profundidad" de la caja.



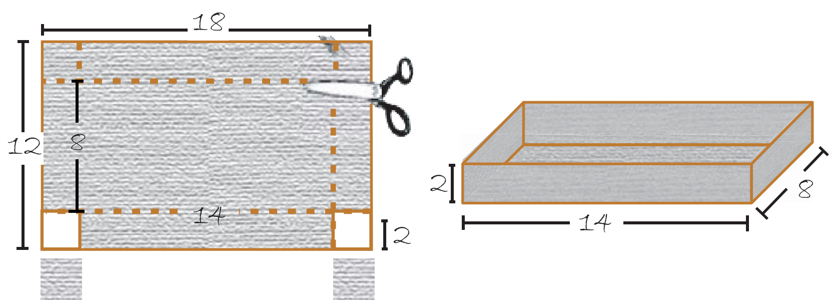
Si consideramos el proceso de construcción de la caja, tenemos una situación como la siguiente figura, donde se observa que el cartón se reduce en sus medidas por los dos extremos de cada lado produciendo el largo y ancho de la base de la caja. Además, la longitud del lado del cuadrado se convierte en la profundidad de la caja.



Podemos calcular el volumen de la caja construida cuando el lado de los cuadrados recortados mide 4 centímetros:

$$v = [18 - 2(4)][12 - 2(4)](4)$$
$$= [10][4][4] = 160 \text{ centímetros cúbicos}$$

Podemos calcular ahora el volumen de la caja construida cuando el lado de los cuadrados recortados es 2 centímetros. Observa cómo cambia la altura o profundidad de la caja porque es igual a la longitud del lado del cuadrado recortado.



$$v = [18 - 2(2)][12 - 2(2)](2)$$
$$= [14][8][2] = 224$$ *centímetros cúbicos.*

Como vemos, construimos estas cajas de la "misma" pieza rectangular de cartón y sin embargo, los volúmenes de las cajas no son iguales, podemos afirmar que el volumen cambia conforme va cambiando el valor del lado del cuadrado recortado en cada esquina. El volumen de la caja es una ***función*** *del lado del cuadrado recortado.*

b) Utiliza una hoja de cálculo donde produzcas una tabla de valores para generar columnas tituladas: profundidad, largo, ancho y volumen de la caja construida con ese cartón de 18 por 12 centímetros. Asigna diferentes valores numéricos, incluso con dos cifras decimales para la longitud del lado del cuadrado recortado en cada esquina.

En la siguiente tabla hemos enlistado diferentes opciones de cajas, asignando diferentes valores al lado del cuadrado recortado en las esquinas del cartón. Esta tabla puedes reproducirla en una hoja de cálculo al asignar fórmulas en las celdas de largo, ancho y volumen.

Como podrás notar los valores en la primera columna, representan el lado del cuadrado recortado en cada esquina que a la vez determina la profundidad de la caja por construir.

La segunda columna se calcula al restar al número 18 el doble del dato de profundidad y la tercera columna se calcula restando a 12 el doble del dato de profundidad. El volumen es el producto de las tres columnas.

En la tabla incluimos el dato del lado del cuadrado como 0 y 6, cuando físicamente no hay caja útil con esos datos; el dato del volumen, que es cero, nos recordará está situación extrema. Ciertamente ese listado nos da una idea de por dónde debemos asignar el valor al lado del cuadrado de modo que el volumen resulte mayor.

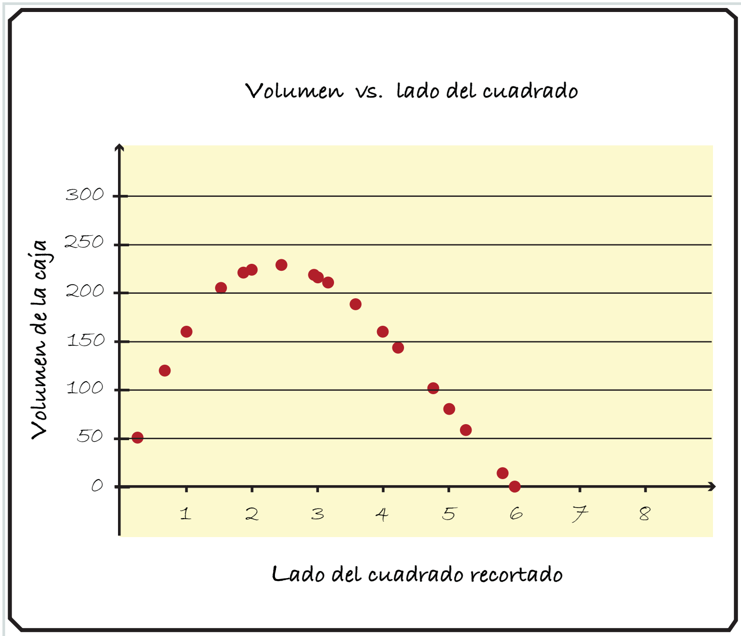
Si las opciones para construir la caja fuesen únicamente las que la tabla provee, entonces definitivamente escogeríamos el valor del lado igual a 2.45, pues es al que se le asigna el mayor volumen, 227.87 centímetros cúbicos. Sin embargo, ya contamos con el conocimiento suficiente para encontrar una solución precisa al problema que nos interesa.

profundidad	largo	ancho	volumen
0	18	12	0
0.25	17.5	11.5	50.313
0.67	16.66	10.66	118.99
1	16	10	160
1.54	14.92	8.92	204.95
1.86	14.28	8.28	219.92
2	14	8	224
2.45	13.1	7.1	227.87
2.95	12.1	6.1	217.74
3	12	6	216
3.16	11.68	5.68	209.64
3.58	10.84	4.84	187.83
4	10	4	160
4.23	9.54	3.54	142.85
4.75	8.5	2.5	100.94
5	8	2	80
5.26	7.48	1.48	58.23
5.82	6.36	0.36	13.325
6	6	0	0

profundidad	volumen
0.25	50.313
0.67	118.99
1	160
1.54	204.95
1.86	219.92
2	224
2.45	227.87
2.95	217.74
3	216
3.16	209.64
3.58	187.83
4	160
4.23	142.85
4.75	100.94
5	80
5.26	58.23
5.82	13.325
6	0

c) Utiliza la hoja de cálculo para producir una gráfica de puntos cuyas coordenadas sean la profundidad (lado del cuadrado) y el volumen de la caja correspondiente. Interpreta la solución de este problema en relación con la imagen visual obtenida.

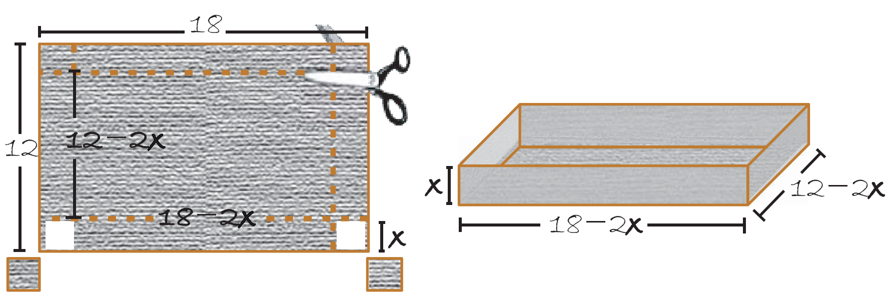
Vale la pena aprovechar el tecleo en la hoja de cálculo y obtener una idea visual del comportamiento del volumen, esta opción que nos ofrece el uso del recurso tecnológico, es realmente una ventaja. Graficamos con su ayuda los datos de la primera y última columnas de la tabla anterior en el sistema coordenado como mostramos en seguida:



Observando la figura es claro que nuestro problema consiste en llegar a calcular para qué valor del lado de los cuadrados recortados se tiene que la ordenada del punto (que representa al volumen de la caja) llega a tomar su valor máximo. Para esto debemos imaginar que unimos los puntos obtenidos dibujando una curva continua.

d) Construye la función que calcula el volumen de la caja en términos de x, el lado del cuadrado.

Consideremos, pues, una caja "general" en la que la longitud del lado de los cuadrados recortados sea x *centímetros. Observa la figura siguiente:*



Entonces, si denotamos por $V(x)$ *al valor del volumen de la caja, tendremos que*

$$V(x) = (18 - 2x)(12 - 2x)x$$

o lo que es lo mismo, al multiplicar los términos

$$V(x) = 216x - 60x^2 + 4x^3$$

Esta es la función que calcula el volumen de la caja sin tapa construida del cartón de 18 *por* 12 *centímetros al que se le recortaron cuadrados en sus esquinas de lado* x *centímetros.*

e) Encuentra el volumen máximo de la función que representa el volumen de la caja.

La razón de cambio del volumen está dada por la función

$$r(x) = 216 - 120x + 12x^2$$

donde los valores de x *tienen sentido entre* 0 *y* 6*.*

Para encontrar el valor máximo y mínimo de $V(x)$, *consideremos primeramente en qué valores de* x *(comprendidos entre* 0 *y* 6*) la razón de cambio es cero.*

Resolveremos la ecuación cuadrática

$$216 - 120x + 12x^2 = 0$$

que simplificamos primeramente al dividir entre 12*:*

$$18 - 10x + x^2 = 0$$

Encontramos las soluciones de $x^2 - 10x + 18 = 0$ *utilizando la fórmula general:*

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(18)}}{2(1)} = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$= \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 5 \pm \sqrt{7}$$

de donde, redondeando a tres decimales obtenemos los valores

$$x \approx 2.354 \quad \text{y} \quad x \approx 7.645$$

que son una aproximación aceptable (para nuestros fines) de las soluciones de la ecuación.

Encontramos entonces un único valor en el interior del intervalo desde $x = 0$ *hasta* $x = 6$ *donde la razón de cambio es* 0, *no resulta* *difícil decidir, basándonos en la gráfica de puntos obtenida antes, que tenemos el valor máximo para el volumen* V *cuando el lado del cuadrado recortado es de* $x = 2.354$ *centímetros.*

Por tanto, enseguida determinamos las dimensiones de la caja (sin tapa) que tiene el mayor volumen posible, y que se puede construir a partir de una pieza de cartón de dimensiones 18 *por* 12 *centímetros.*

Los lados de la base (o fondo) de la caja son:

$$18 - 2(2.354) = 13.292 \text{ centímetros y}$$

$$12 - 2(2.354) = 7.292 \text{ centímetros.}$$

La altura (o profundidad) de la caja es:

$$2.354 \text{ centímetros.}$$

El valor del ***volumen máximo*** *que contiene esta caja es de:*

$$(13.292)(7.292)(2.354) = 228.162$$

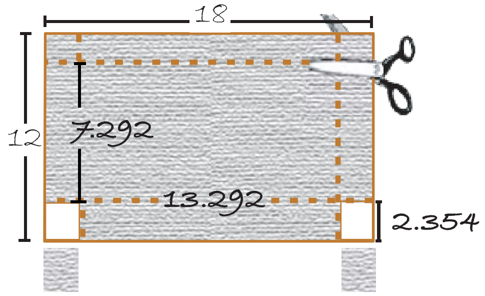
centímetros cúbicos, que es el mismo valor que se obtiene en la función que calcula el volumen

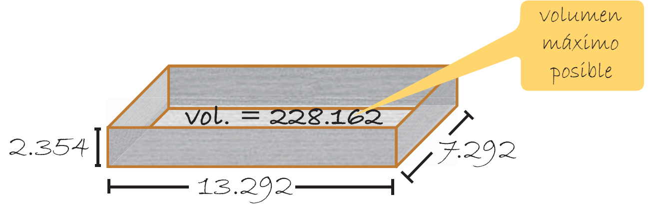
$$V(x) = 216x - 60x^2 + 4x^3$$

cuando la evaluamos en $x = 2.354$

$$\begin{aligned} f(2.354) &= 216(2.354) - 60(2.354)^2 + 4(2.354)^3 \\ &\approx 228.162 \end{aligned}$$

La siguiente imagen nos da una idea de sus dimensiones:





Sigue con atención el procedimiento de solución en los siguientes problemas para fortalecer el aprendiz aje y aplicarlo en la sección posterior de problemas propuestos.

Problema 1

En un tanque cilíndrico de 1 metro de altura se introduce agua a través de una llave que provoca un aumento del nivel a razón constante de 27 centímetros/minuto. Otra llave desaloja el agua de tal forma que el nivel disminuye a razón variable de $12t$ centímetros/minuto, donde t es el tiempo transcurrido en minutos.

a) Representa la razón de cambio del nivel de agua en el tanque como una función del tiempo y traza su gráfica.

La acción de ambas llaves se conjunta en una función lineal donde se introduce un signo negativo para diferenciar el efecto de la segunda llave que provoca un decrecimiento en el nivel. La expresión es

$$r(t) = 27 - 12t$$

y se trata de una recta que inicia en el eje vertical en 27 *y corta el eje horizontal en el instante en que* $r(t) = 0$

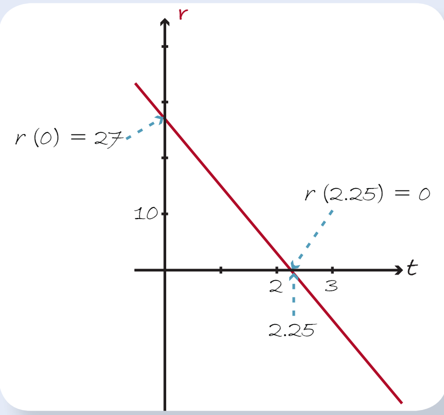
$$27 - 12t = 0$$

$$27 = 12t$$

$$t = \frac{27}{12} = 2.25$$

esto es, a los $t = 2.25$ *minutos.*

La gráfica es una recta con valor inicial 27 *y que corta con el eje horizontal en* $t = 2.25$ *como mostramos enseguida.*



b) Suponiendo que en el instante $t = 0$ el nivel del agua es $h_0 = 24$ centímetros, construye la función que expresa el nivel del agua en términos del tiempo y traza su gráfica.

Para encontrar la función que representa el nivel de agua debemos antiderivar la razón de cambio del nivel, ya que $r(t) = h'(t)$

$$h(t) = 27t - 12\frac{t^2}{2} + C = C + 27t - 6t^2$$

antiderivamos

$$r(t) = 27 - 12t$$

Siendo que $h_0 = h(0) = c + 27(0) - 6(0)^2 = c$ *entonces, el valor de la constante* c *es*

$$c = 24 = h_0,$$

por tanto

$$h(t) = 24 + 27t - 6t^2$$

es la función cuadrática que representa el comportamiento del nivel y cuya gráfica es una parábola vertical.

Para graficar el nivel de agua tomamos en cuenta primeramente la grafica de su razón de cambio. Con base en esa gráfica, la parábola que representa al nivel tendrá en $t = 2.25$ *un valor máximo, por el cambio de signo positivo a negativo que presenta la razón de cambio ahí.*

Se trata entonces de una parábola cóncava hacia abajo que inicia en el eje vertical en 24, *y tiene su vértice en*

$$h(2.25) = 24 + 27(2.25) - 6(2.25)^2$$

$$= 24 + 60.75 - 30.375 = 54.375$$

Además, corta el eje horizontal cuando $h(t) = 0$, *calculamos el valor de* t *que cumple esto al resolver la ecuación cuadrática*

$$24 + 27t - 6t^2 = 0$$

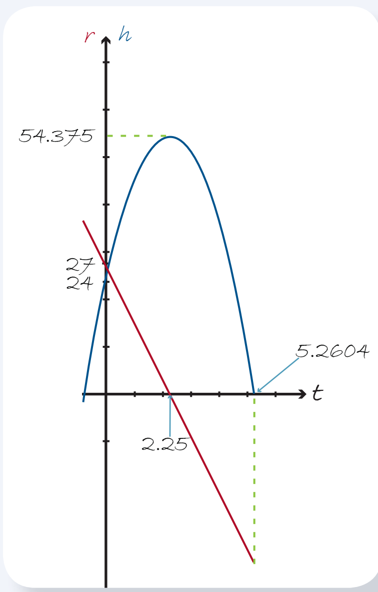
Dividiendo entre 23 *y reacomodando la ecuación cuadrática anterior tenemos*

$$2t^2 - 9t - 8 = 0$$

de donde, usando la fórmula general, obtenemos las soluciones:

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4(2)(-8)}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{145}}{4} \approx \begin{cases} 5.2604 \\ -0.76039 \end{cases}$$

Descartamos el valor negativo del tiempo que no tiene sentido en la situación, y así obtenemos la figura siguiente que muestra la información obtenida, junto con la de la razón de cambio del nivel.



c) Utiliza tu gráfica para contestar si el nivel llega a un valor máximo o mínimo, o si el tanque se llena o se vacía. Debes especificar valores numéricos donde ocurre esto.

En la gráfica se observa que el nivel va creciendo cada vez más lento, y llega a un valor máximo de 54.375 *centímetros a los* 2.25 *minutos; el tanque no se llena, pues no llega a la altura de* 100 *centímetros.*

Inmediatamente después de llegar al nivel máximo, comienza a decrecer el nivel cada vez más rápido, hasta que a los $\frac{9+\sqrt{145}}{4} \approx 5.2604$ *minutos el tanque llega al nivel* 0*, esto es, se vacía.*

En ese momento dejamos de considerar la situación y el modelo matemático utilizado.

d) Consideremos ahora que el tanque se modifica para agregar a las dos llaves anteriores otra llave extra que introduzca agua a razón variable de t^2 centímetros/minuto. Modifica las funciones $h(t)$ y $r(t)$ para que modelen la nueva situación.

La razón de cambio del nivel se verá afectada con una aportación de esta tercera llave que se agrega:

$$r(t) = 27 - 12t + t^2$$

y antiderivamos esta función para construir la función del nivel, que ahora resulta ser una función cúbica

$$h(t) = 24 + 27t - 6t^2 + \frac{t^3}{3}$$

El valor inicial sigue siendo el mismo y ocupa el lugar de la constante aditiva C.

e) Grafica en el mismo sistema coordenado ambas funciones, apoyándote en que el comportamiento de la razón de cambio del nivel dicta cuál debe ser el comportamiento de la gráfica del nivel de agua.

Graficamos primeramente la razón de cambio del nivel de agua, que está dada por la función cuadrática:

$$r(t) = 27 - 12t + t^2$$

Su gráfica es una parábola que se abre hacia arriba y que corta el eje t *en* $t = 3$ *y* $t = 9$ *lo cual se obtiene fácilmente igualando a* 0 *la expresión de* $r(t)$ *y resolviendo la ecuación cuadrática que se genera.*

Su vértice está en el punto medio (en $t = 6$*), lo que coincide con igualar a* 0 *a la derivada de la razón de cambio y despejar* t*:*

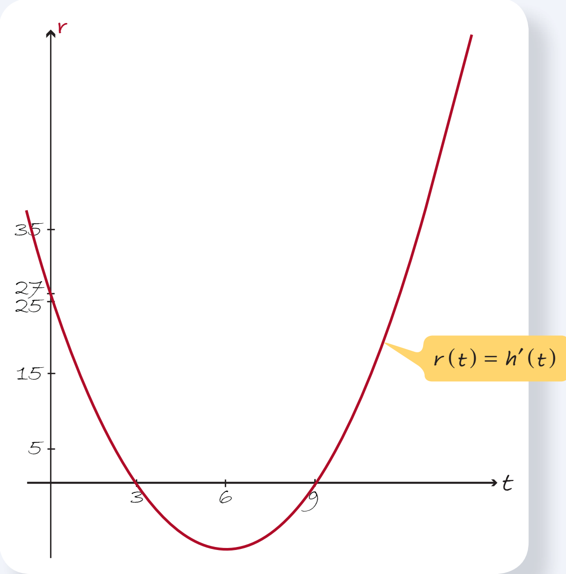
$$r'(t) = -12 + 2t = 0$$

$$2t = 12 \quad \text{luego} \quad t = 6$$

Calculamos

$$r(6) = 27 - 12(6) + (6)^2 = -9$$

y con estos datos, además del dato inicial, $r(0) = 27$*, trazamos la parábola que aparece en la siguiente figura y que representa la razón de cambio del nivel.*



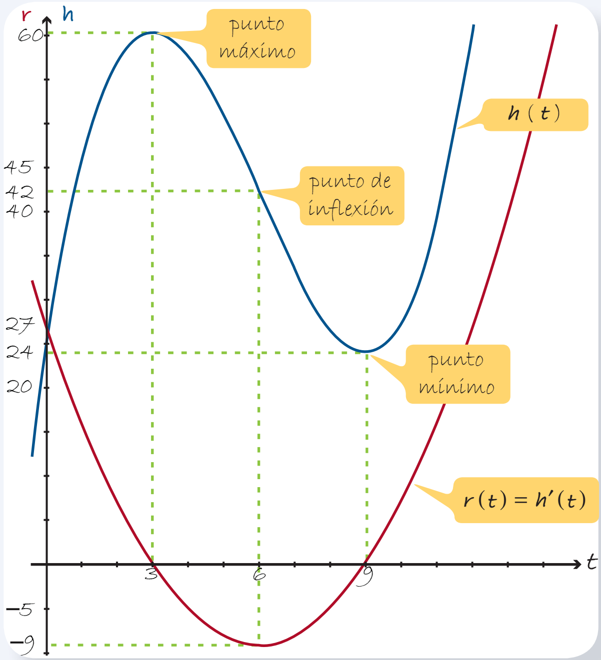
De la gráfica de la razón de cambio podemos observar que:

- *En* $t = 3$ *la razón de cambio es* 0 *y cruza de valores positivos a negativos, por tanto, el nivel alcanza en* $t = 3$ *un valor máximo (relativo).*
- *En* $t = 9$ *la razón de cambio es* 0 *y cruza de valores negativos a positivos, por tanto, el nivel alcanza en* $t = 9$ *un valor mínimo (relativo).*
- *En* $t = 6$ *la razón de cambio tiene su valor mínimo, por tanto el nivel tiene en* $t = 6$ *un punto de inflexión donde el cambio es de concavidad hacia abajo a concavidad hacia arriba.*

Calculamos los valores del nivel al evaluar en esos tiempos la función:

$$h(3) = 60 \qquad h(6) = 42 \qquad h(9) = 24$$

y con ellos queda trazada la gráfica del nivel del agua relacionada con la de su razón de cambio en la siguiente figura.



¿Sabías que?...

La **división sintética** es un procedimiento efectivo para encontrar sólo **raíces racionales** de una ecuación cúbica. Por tanto, si la ecuación no tiene este tipo de raíces, no podremos encontrar el valor exacto de una solución.

Lo anterior plantea limitaciones de este procedimiento algorítmico, pero esas limitaciones podemos superarlas en la actualidad con las ventajas que ofrece el uso de la **tecnología**, en especial si utilizamos un software de graficación.

Con ayuda del **software** para graficar funciones puedes convertir el problema de encontrar las raíces reales de una ecuación cúbica

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$$

al problema de visualizar los cortes de la gráfica de la función

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

con el eje horizontal, lo que se obtiene haciendo

$$y(x) = 0 .$$

f) Describe ampliamente cómo cambia el nivel del agua en el tanque en los primeros doce minutos después de que lo empezamos a observar. Justifica tu descripción con argumentos apoyados en la visualización de las gráficas trazadas.

Originalmente, el nivel de agua en el tanque es de 24 centímetros, en ese momento el nivel está aumentando cada vez más lentamente, hasta que a los 3 minutos alcanza su nivel máximo de 60 centímetros. En ese preciso momento, comienza a descender el nivel de un modo cada vez más rápido.

A los 6 minutos el nivel ha llegado a 42 centímetros y es justo en ese instante cuando se observa la máxima rapidez de decrecimiento del nivel (coincidiendo con el valor mínimo de la razón de cambio). A partir de entonces sigue decreciendo el nivel pero ahora de un modo cada vez más lento.

A los 9 minutos llega el nivel de agua a su valor mínimo, que es 24 centímetros, y a partir de ese instante, el nivel comienza a aumentar cada vez más rápido y así seguirá aumentando hasta llenar el tanque por completo.

g) ¿Entre qué minutos consecutivos se llenará el tanque?

Para que el tanque se llene debemos tener que la función del nivel sea igual a 100 *centímetros, esto es,*

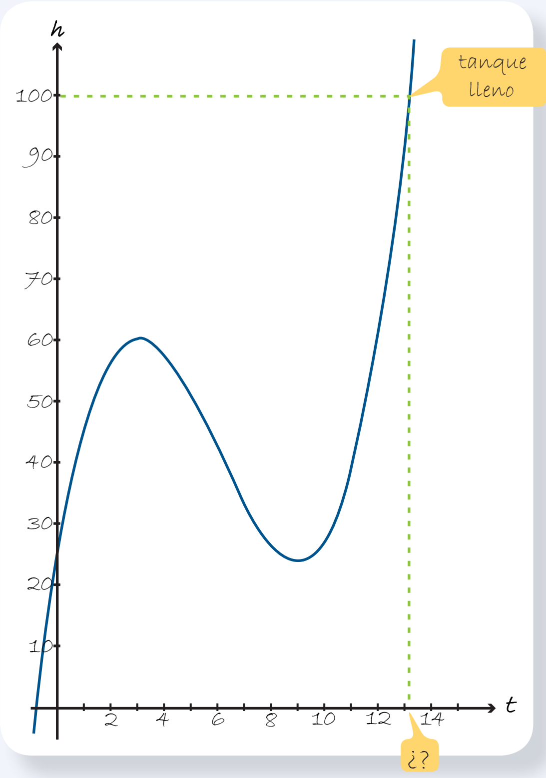
$$h(t) = 24 + 27t - 6t^2 + \frac{t^3}{3} = 100$$

que reacomodando de lugar a la ecuación cúbica

$$\frac{t^3}{3} - 6t^2 + 27t - 76 = 0$$

Resolver esta ecuación cúbica de manera exacta puede resultar algo muy complicado o incluso imposible. Preferimos utilizar el software de graficación y buscar en la gráfica de $h(t)$ *el punto que se encuentra a la altura* 100*, tratando de precisar, en principio, entre cuáles enteros consecutivos se encuentra.*

La siguiente imagen muestra esta intención, donde debimos cambiar la "ventana" en la cual teníamos a la vista la función para poder apreciar el evento en que el nivel alcanza los 100 *centímetros y comienza a desbordarse el agua.*



Se puede apreciar en la imagen que el tiempo en que el nivel es 100 *se encuentra entre los* 13 *y los* 14 *minutos. Esto podemos comprobarlo al evaluar la función en dichos números:*

$$h(13) = 24 + 27(13) - 6(13)^2 + \frac{(13)^3}{3} = 93.\overline{3}$$

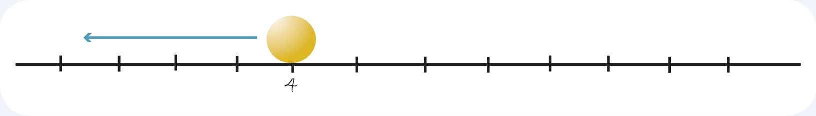
$$h(14) = 24 + 27(14) - 6(14)^2 + \frac{(14)^3}{3} = 140.\overline{6}$$

Los valores de la función nos hacen ver la cercanía del minuto 13 *más que al* 14 *para que el tanque se llene.*

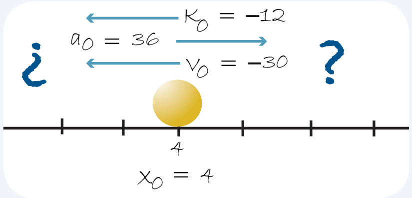
Si evalúas $h(13.1)$ *y* $h(13.2)$ *notarás que el valor de* 13.2 *minutos es una mejor aproximación para el tiempo exacto del llenado.*

PROBLEMA RESUELTO 2

Una partícula se está moviendo a lo largo de una línea recta horizontal de acuerdo a los siguientes datos: La razón con que cambia la aceleración es constante e igual a $k_0 = -12$ metros/segundo cúbico. La posición inicial de la partícula es $x_0 = 4$ metros, la velocidad inicial es $v_0 = -30$ metros/segundo y la aceleración inicial es $a_0 = 36$ metros/segundo cuadrado.



Podemos hacernos una primera idea de lo que va a suceder con el movimiento de la partícula: como su velocidad inicial es negativa, sabemos que al instante de comenzar a observar este evento $(t = 0)$ la partícula se dirigía hacia la izquierda. Pero la acción de la aceleración inicial positiva se opone a la acción de esta velocidad inicial negativa, ¿se regresa a la derecha? A su vez, la acción de la razón de cambio (constante) de la aceleración, que es negativa, se opone a la acción de la aceleración inicial positiva. ¿Volverá hacia la izquierda?



Para precisar esos eventos importantes del movimiento se requiere modelarlo mediante una **función**. El procedimiento matemático para lograrlo incluye la construcción de funciones a través de procesos de antiderivación.

a) Construye, de manera secuencial, las funciones de aceleración $a(t)$, velocidad $v(t)$ y posición $x(t)$ de la partícula. Explica tu procedimiento para construirlas.

Como la razón de cambio de la aceleración es constante

$$k_0 = -12$$

y la aceleración es su antiderivada, entonces

$$a(t) = 36 - 12t$$

donde consideramos la aceleración inicial dada por $a_0 = 36$

A partir de la aceleración, que es la razón de cambio de la velocidad (la derivada de la velocidad) construimos la función de velocidad antiderivando la aceleración y considerando que el valor inicial de la velocidad debe ser $v_0 = -30$

$$v(t) = -30 + 36t - 6t^2$$

A partir de la velocidad, que es la razón de cambio de la posición (la derivada de la posición) construimos la función de posición antiderivando la velocidad y considerando además que el valor inicial de la posición es $x_0 = 4$

$$x(t) = 4 - 30t + 18t^2 - 2t^3$$

Esta última función es el modelo matemático para representar el movimiento de la partícula.

b) Calcula de manera algebraica los instantes en que la aceleración es 0, y los instantes en que la velocidad es 0.

Igualamos a 0 la aceleración y resolvemos la ecuación lineal que se genera:

$$12t = 36$$
$$t = 3$$

Por tanto, en $t = 3$ la aceleración es 0, esto es $a(3) = 0$.

Igualamos a 0 la velocidad y resolvemos la ecuación cuadrática que se genera:

$$\begin{aligned} v(t) &= -30 + 36t - 6t^2 = 0 \\ &= -6t^2 + 36t - 30 = 0 \end{aligned}$$

Dividido entre -6 tenemos $t^2 - 6t + 5 = 0$, ecuación cuadrática cuyas soluciones se detectan fácilmente, o bien, siempre existirá la posibilidad de resolverle usando la fórmula general:

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}.$$

Por tanto, en $t = 1$ y $t = 5$ la velocidad es 0, esto es,

$$v(1) = v(5) = 0.$$

c) Construye la gráfica de la función velocidad $v(t)$.

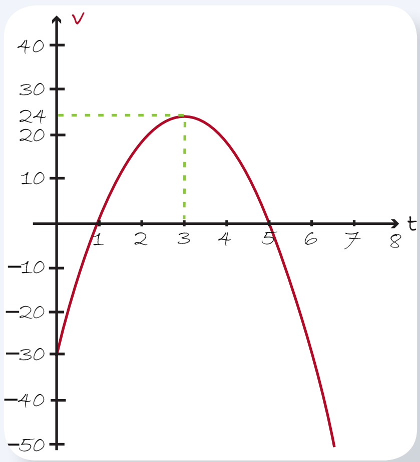
La gráfica de la función velocidad $v(t) = -30 + 36t - 6t^2$ es una parábola que cruza el eje vertical en el valor inicial $v(0) = -30$.

Sabemos además (por el inciso b)) que cruza el eje horizontal en $t = 1$ y $t = 5$ pues $v(1) = v(5) = 0$.

Para encontrar su vértice, sabemos que éste debe coincidir con el punto medio entre 1 y 5 porque se trata de una parábola, pero también corresponde con el instante donde la derivada de $v(t)$ es 0, esto es, donde $a(t) = 0$ que ya conocemos que es $t = 3$.

Por tanto, calculando $v(3) = -30 + 36(3) - 6(3)^2 = 24$ tenemos que las coordenadas del vértice son $(3, 24)$.

La gráfica la mostramos enseguida.



d) Construye la gráfica de la función de posición utilizando la información de la gráfica de velocidad.

La gráfica de la función de posición, que es la función cúbica

$$x(t) = 4 - 30t + 18t^2 - 2t^3$$

tiene valor inicial $x_0 = 4$, *donde cruza el eje vertical.*

Toma su valor mínimo en $t = 1$ *y su valor máximo en* $t = 5$, *ya que en ellos se observa que la gráfica de la derivada cruza el eje horizontal de valores negativos a positivos, en* $t = 1$ *y de valores positivos a negativos en* $t=5$.

Estos valores, mínimo y máximo, se calculan mediante la representación algebraica de la función:

$$x(1) = 4 - 30(1) + 18(1)^2 - 2(1)^3 = -10$$

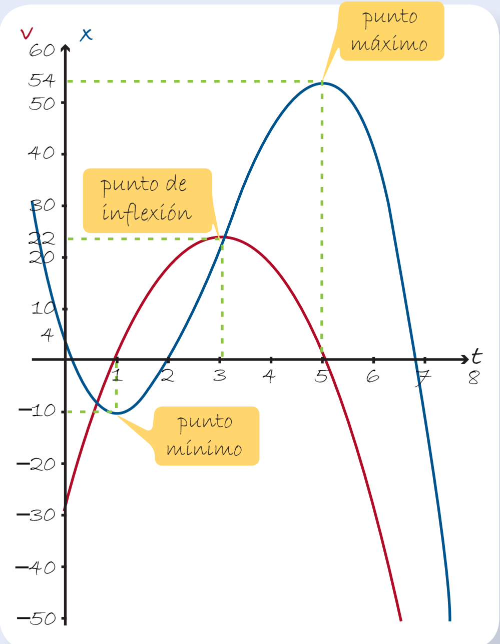
$$x(5) = 4 - 30(5) + 18(5)^2 - 2(5)^3 = 54$$

Por tanto, el punto mínimo es $(1,\ -10)$ *y el máximo es* $(5,\ 54)$.

Además, en $t = 3$, *donde tiene su punto máximo la derivada, la gráfica de la posición tiene un punto de inflexión; calculamos*

$$x(3) = 4 - 30(3) + 18(3)^2 - 2(3)^3 = 22$$

Por tanto, el punto de inflexión es $(3,\ 22)$. *Mostramos toda esta información en la siguiente gráfica.*



e) Describe ampliamente el movimiento de la partícula tomando en cuenta toda la información gráfica y numérica que la curva $x(t)$ contiene. Tu descripción debe incluir lo que sucede en cada instante que encontraste algebraicamente en el inciso *b*) de este problema.

Comenzamos a ver la partícula en la posición $x = 4$ metros y se movía hacia la izquierda cada vez más lento y continúa así hasta los $t = 1$ segundos en que se detiene al llegar a la posición $x = -10$ metros. En ese instante regresa hacia la derecha moviéndose cada vez más rápido y sigue así hasta los $t = 3$ segundos, instante en que iba hacia la derecha lo más rápido posible, de hecho llegó a la velocidad de 24 metros/segundo en ese instante en que se encontraba en la posición $x = 22$ metros. Sigue entonces hacia la derecha pero ahora cada vez más lento, hasta que a los $t = 5$ segundos se detiene nuevamente en la posición $x = 54$ metros y decide entonces seguir su movimiento hacia la izquierda cada vez más rápido hasta, perderla de vista.

¿Sabías que?...

La división sintética es un procedimiento algorítmico que permite dividir, de una forma compacta y simple, polinomios entre expresiones lineales del tipo $x - a$ donde a es un número racional, es decir a es el cociente de dos enteros donde el denominador no es 0, por supuesto.

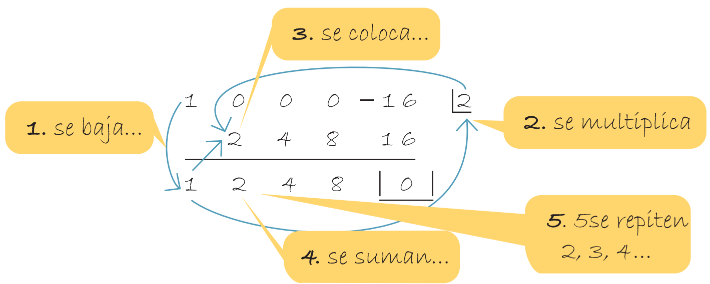
En vez de

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 2x^2 + 4x + 8 \\
\hline
x - 2 & x^4 - 16 \\
 & \underline{-x^4 + 2x^3} \\
 & \quad 2x^3 - 16 \\
 & \quad \underline{-2x^3 + 4x^2} \\
 & \qquad 4x^2 - 16 \\
 & \qquad \underline{-4x^2 + 8x} \\
 & \qquad\quad 8x - 16 \\
 & \qquad\quad \underline{-8x + 16} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Se usa el arreglo de los coeficientes de la ecuación en orden descendente según las potencias de x:

$$
\begin{array}{ccccc}
1x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & -16 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 0 & 0 & 0 & -16
\end{array}
$$

y se opera con él como sigue:



Cuando el residuo de la división es 0, la expresión lineal $x - a$ es un factor del polinomio, de modo que, en nuestro ejemplo se tiene la factorización:

$$x^4 - 16 = (x-2)\left(x^3 + 2x^2 + 4x + 8\right)$$

donde nuevamente puede aplicarse la división sintética en el factor cúbico... hazlo con -2 para que compruebes que $x^4 - 16 = (x-2)(x+2)\left(x^2 + 4\right)$

f) Al observar la gráfica puede pensarse que en el instante $t=2$ la partícula pasó por el origen de la recta en que se mueve, pues parece que la gráfica de posición cruza el eje horizontal ahí. También se observan otros dos cruces en ese eje, uno entre $t=0$ y $t=1$ y el otro cercano a $t=7$. Aplica el método de división sintética, o bien el algoritmo para dividir polinomios de tal modo que puedas precisar en forma exacta los instantes en que la partícula pasó por el origen de la recta en que se mueve.

Si $t=2$ es el lugar preciso donde la gráfica de $x(t)$ corta el eje horizontal, entonces $t=2$ debe ser solución de la ecuación cúbica

$$x(t)=0 \text{ esto es } 4-30t+18t^2-2t^3=0$$

Esta ecuación puede simplificarse al dividir entre -2:

$$\frac{4-30t+18t^2-2t^3}{-2}=\frac{0}{-2}$$

$$-2+15t-9t^2+t^3=0$$

esto es $\quad t^3-9t^2+15t-2=0.$

Para confirmar que $t=2$ es una raíz de esta ecuación, basta evaluarla en 2 y verificar que se obtiene el valor 0:

$$(2)^3-9(2)^2+15(2)-2=8-36+30-2=0$$

Esto nos afirma que la expresión cúbica tiene un factor lineal $(t-2)$ y otro cuadrático, que no conocemos por lo pronto, pero que podemos encontrar al menos de dos formas diferentes que nos conviene aquí recordar.

Una forma es realizar la división de polinomios con ese factor:

$$\begin{array}{r|l}
 & t^2-7t+1 \\ \hline
t-2 & t^3-9t^2+15t-2 \\
 & \underline{-t^3+2t^2} \\
 & \quad -7t^2+15t \\
 & \quad \underline{+7t^2-14t} \\
 & \qquad\qquad t-2 \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

factor cuadrático

residuo

Otra forma de haber llegado al factor cuadrático restante es utilizar la forma sintética de esta división de polinomios, que es conocida como división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -9 & 15 & -2 & \underline{2} \\
 & 2 & -14 & 2 & \\ \hline
\underbrace{1 \quad -7 \quad 1} & & & 0 &
\end{array}$$

coeficientes en orden de grado mayor a menor

raíz

residuo

coeficientes del factor cuadrático restante

Hemos logrado la factorización de la ecuación cúbica

$$t^3 - 9t^2 + 15t - 2 = (t-2)\left(t^2 - 7t + 1\right)$$

de donde, al igualar a 0 *cada factor, se obtienen las 3 soluciones de la ecuación:*

$$t - 2 = 0 \quad \text{luego} \quad t = 2, \text{ como ya sabíamos, y}$$

$$t^2 - 7t + 1 = 0 \text{ de donde, usando la fórmula general}$$

$$t = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49-4}}{2}$$

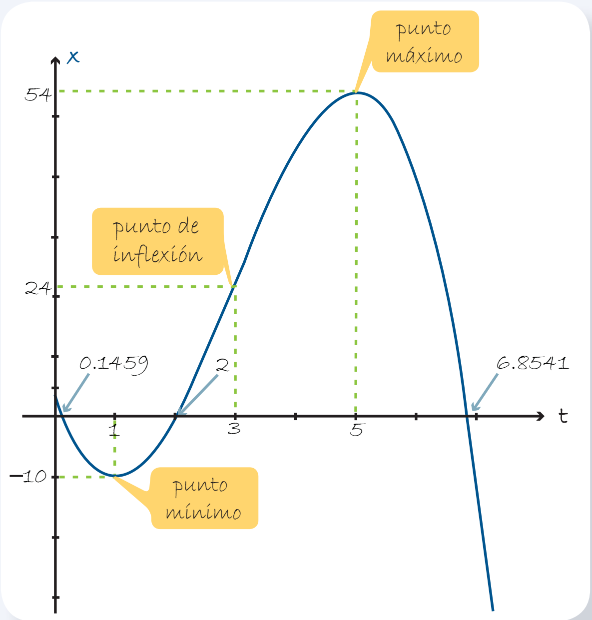
$$= \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{(9)(5)}}{2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

Si aproximamos a 4 *decimales tenemos que* $t \approx 6.8541$ *y* $t = 0.1459$, *así como* $t = 2$, *son las* 3 *raíces reales distintas de la ecuación cúbica*

$$t^3 - 9t^2 + 15t - 2 = 0.$$

Estas raíces se interpretan como los tres cortes con el eje horizontal de la posición; esto es, en esos tres instantes de tiempo se tiene que $x(t) = 0$, *y la partícula pasó por el origen (el* 0*) de la recta en que se está moviendo justo en esas tres ocasiones.*

Señalamos la nueva información en la gráfica de posición.



Problema Propuesto 1

En un tanque que tiene originalmente 12 centímetros de nivel de agua, se suministran dos tipos de líquido a través de dos llaves; la primera provoca el aumento del nivel del líquido A a una razón de cambio constante de 3 centímetros por minuto, y la segunda provoca que el nivel del líquido B aumente a razón variable de $2t$ centímetros por minuto. Se extrae la combinación del líquido a través de una llave de desagüe que actúa simultáneamente con las otras dos y de manera que la salida del líquido provoca una disminución del nivel a razón variable de t^2 centímetros por minuto. Esto hará que eventualmente, el tanque quede vacío en cierto instante.

a) Encuentra la función que modela la razón de cambio del nivel del líquido en el tanque, y luego, a partir de ella, encuentra la función que modela el nivel de líquido en el tanque.

Respuesta: $r(t) = 3 + 2t - t^2$

$h(t) = 12 + 3t + t^2 - \dfrac{t^3}{3}$

b) Grafica la función que modela a la razón de cambio del nivel y enseguida utilízala para graficar la función que modela el nivel del líquido en el tanque.

Respuesta: *Gráfica de* $r(t)$ *parábola cóncava hacia abajo. Corte eje vertical* $(0,3)$, *cortes eje horizontal* $(-1, 0)$ *y* $(3,0)$.

Gráfica de $h(t)$ *corta eje vertical* $(0,12)$.

Corte eje horizontal aproximadamente $(5.692,0)$.

Punto de inflexión $\left(1, \dfrac{47}{3}\right)$ *y punto máximo* $(3,21)$.

c) Narra el comportamiento del nivel hasta el instante en que se vacía, ¿puedes obtener el valor exacto en que lo hace?

Respuesta: *La solución no es un número racional.*

Valor aproximado $t \approx 5.692$.

Problema Propuesto 2

La función que da cuenta del nivel de agua h (en decímetros) con respecto al tiempo t (en minutos) en un tanque sobre el que actúan 3 llaves está dada por

$$h(t) = 14 + 17t + t^2 - 2t^3 \quad \text{decímetros.}$$

a) Precisa el nivel inicial (cuando $t = 0$) y además decide si el nivel estaba subiendo o bajando en ese instante. Justifica tu procedimiento.

Respuesta: $h(0) = 14$ *decímetros*

$h'(0) = 17$ *decímetros / minuto, el nivel sube* *b*) Si el tanque tiene una altura de 4 metros, decide si llegará un instante en que se desborde. ¿Cuál fue el máximo valor alcanzado por el nivel y en qué instante lo tuvo? Argumenta tu procedimiento.

Respuesta: *Nivel máximo* $h(1.858) \approx 36.21$ *decímetros, no se desborda.*

c) Utiliza un software de graficación para visualizar el comportamiento simultáneo del nivel y de su razón de cambio. ¿En qué instante que el nivel aumenta lo más rápido posible?

Respuesta: $t = \frac{1}{6}$ minuto

d) Apóyate en la gráfica para precisar en qué instante se vacía el tanque. Expresa tu procedimiento.

Respuesta: $t = \frac{7}{2} = 3.5$ minutos

¿Sabías que?...

La división sintética se aplica en las ecuaciones polinomiales de cualquier orden para encontrar las raíces (o soluciones) racionales de la ecuación.

Este procedimiento algorítmico es de tipo "ensayo y error" en el sentido de que uno prueba con diferentes números racionales hasta dar con el que lleva al residuo cero, lo que asegura que el número racional sea la raíz de la ecuación.

La teoría ha demostrado que el conjunto de los números racionales en los que debe probarse el procedimiento es finito. Si la ecuación la expresamos en la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

debes saber que toda raíz racional… si es que posee alguna… debe estar contenida en el conjunto de números que se obtienen al dividir un divisor del coeficiente a_0 entre un divisor del coeficiente a_n.

Por ejemplo para la ecuación:

$$2x^3 - 9x^2 + x + 12 = 0$$

Tenemos que los divisores de $a_n = 2$ son ± 1 y ± 2 y los divisores de $a_0 = 12$ son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 y ± 12

El conjunto que combina la división de los divisores de 12 entre los divisores de 2 es:

$$\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\right\}$$

que son bastantes números para probar por ensayo y error y encontrar cuál es la solución de la ecuación.

En este caso, si lo haces, encontrarás que las opciones -1, 4 y $\frac{3}{2}$ son raíces racionales de la ecuación, sin embargo habrá ecuaciones en que ninguna de las opciones funciona… pero las 2 raíces existen… y entonces… ¿dónde están?

Problema Propuesto 3

En un tanque cilíndrico actúan dos llaves que lo están llenando de agua, la primera con razón constante de 2 litros/minuto y la segunda con razón variable de $3t^2$ litros/minuto. Una tercera llave lo está vaciando con razón variable igual a $12t$ litros/minuto, donde t es el tiempo transcurrido (en minutos). En el instante $t = 0$ el volumen de agua es 32 litros.

a) Determina la función que da cuenta del volumen de agua cuando hayan transcurrido un número t arbitrario de minutos y la función de la razón de cambio del volumen de agua.

Respuesta: $V(t) = 32 + 2t - 6t^2 + t^3$ *litros* y $r(t) = 2 - 12t + 3t^2$

b) ¿Cuál es el volumen mínimo al que llega el tanque en el proceso de acción de las llaves?

Respuesta: *Volumen mínimo:* $V(3.8257) = 7.82$ *litros*

c) Grafica la función de la razón de cambio del volumen.

Respuesta: *Parábola cóncava hacia arriba que inicia en el punto* $(0,2)$ *y corta el eje* t *en* $(0.1743,0)$ *y* $(3.8257,0)$

d) Grafica en el mismo sistema coordenado la función del volumen de agua en el tanque.

Respuesta: *Cúbica que inicia en el punto* $(0,32)$*, tiene un punto máximo en* $(0.1743,32.17)$*, punto mínimo en* $(3.8257,7.82)$ *y no corta el eje* t *en valores positivos.*

e) Describe ampliamente lo que ocurre con el volumen de agua. ¿Se llenará el tanque?

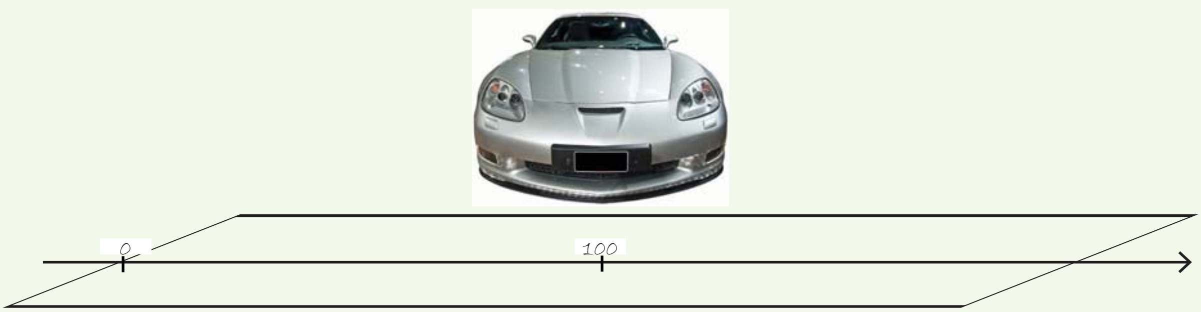
Respuesta: *De* 32 *litros, aumenta cada vez más lento hasta* 32.17 *litros y comenzó a disminuir cada vez más rápido, hasta los* 2 *minutos y continúa disminuyendo cada vez más lento hasta* 7.82 *litros y comienza en ese instante a aumentar cada vez más rápido hasta llenarse.*

Problema propuesto 4

El movimiento de un cochecito en una línea recta está modelado mediante la función cúbica

$$x(t) = 100 - 80t + 90t^2 - 30t^3$$

donde x representa la posición del coche con respecto al lugar al que se propone llegar, que se encuentra a 100 kilómetros de distancia. La posición x se mide en kilómetros y el tiempo t en horas.



a) Cuando comenzamos a observarlo, ¿en qué posición se encontraba y hacia dónde se dirigía, hacia la derecha o hacia la izquierda?

Respuesta: $x(0) = 100$
$v(0) = -80$, *a la izquierda.*

b) ¿En qué posición se encontraba justo al haber transcurrido una hora de observar su movimiento?

Respuesta: $x(1) = 80$

c) ¿Hacia dónde se dirigía en ese instante que señala la primera hora transcurrida del movimiento?

Respuesta: $v(1) = 10$, *a la derecha.*

d) Grafica la función de la velocidad del coche y comprueba tu respuesta al inciso anterior.

Respuesta: *Parábola cóncava hacia abajo, vértice* $(1, 10)$ *y corta el eje horizontal en* $t = \frac{2}{3}$ *y* $\frac{4}{3}$.

e) En el mismo sistema coordenado que graficaste la velocidad, grafica ahora la función de posición del coche.

Respuesta: *Cúbica con mínimo* $\left(\frac{2}{3}, \frac{700}{9}\right)$,
punto inflexión $(1, 80)$ *y máximo* $\left(\frac{4}{3}, \frac{740}{9}\right)$.

f) Describe lo que ocurrió con el coche desde el tiempo 0 hasta el tiempo (aproximado con una cifra decimal) en que llegó finalmente a su destino.

Respuesta: *Aproximadamente* 2.4 *horas* (2 *horas* 24 *minutos*).

Problema propuesto 5

La representación algebraica de una función es una versión compacta y concisa que carga en sí misma un cúmulo de información no visible a simple vista. De eso trata el problema que te proponemos a través de la siguiente historia.

Había una vez un cochecito que se movía sobre una línea recta y su función de posición era:

$$x(t) = 11t - 6t^2 + \frac{t^3}{3}$$

...y colorín colorado, este cuento se ha acabado.

a) Acabas de conocer la versión corta de la historia del movimiento del cochecito, y para conocer la versión larga de esta realiza todos los procedimientos algebraicos necesarios que se te indican:

- Deriva y obtén la función de aceleración $a(t)$.

Respuesta: $a(t) = v'(t) = -12 + 2t$

- Plantea la ecuación $a(t) = 0$ y resuélvela.

Respuesta: $t = 6$

- Plantea la ecuación $v(t) = 0$ y resuélvela.

Respuesta: $t = 1, 11$

- Calcula la $v(t)$ en el t donde $a(t) = 0$.

Respuesta: $v(6) = -25$

- Calcula la $x(t)$ en los t donde $v(t) = 0$ y donde $a(t) = 0$.

Respuesta: $x(1) = \frac{16}{3}$, $x(6) = -78$, $x(11) = -\frac{484}{3}$

- Plantea la ecuación $x(t) = 0$ y resuélvela.

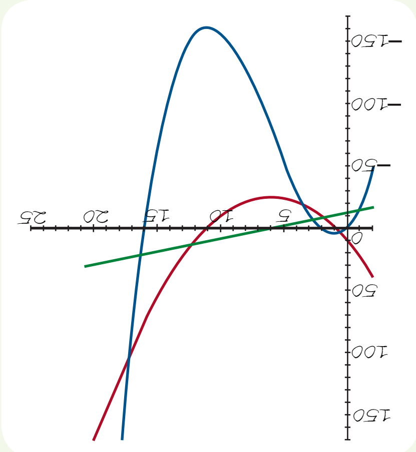
Respuesta: $x(t) = 11t - 6t^2 + \frac{t^3}{3}$, $t = 9 \pm 4\sqrt{3}$

b) Dibuja la gráfica de la aceleración en color verde.

c) Dibuja la gráfica de la velocidad en color rojo.

d) Dibuja la gráfica de la posición en color azul.

Respuesta:



e) Y de ahí... ¡completa la historia!:

Comenzamos a verlo a los $t = 0$ *segundos en la posición* $x_0 =$ __________ *metros y llevaba una velocidad de* $v_0 =$ __________ *metros/segundo. Desde entonces, hasta los* $t =$ __________ *segundos se movió hacia la derecha cada vez más lento hasta que se paró justo en la posición* $x =$ __________ *metros.*

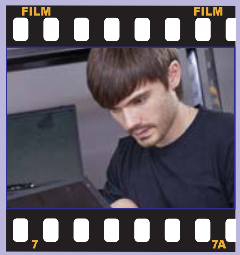
Comenzó en ese momento a trasladarse hacia la izquierda cada vez más rápido. Eran los $t =$ __________ segundos cuando lo vimos pasar por el origen de la recta en que se mueve.

Siguió hacia la izquierda y a los $t =$ __________ segundos era cuando iba para allá lo más rápido que podía. Estaba en ese momento en la posición $x =$ __________ metros y se movía hacia la izquierda con rapidez de __________ metros/segundo. Ahí empezó a disminuir su rapidez; ya quería regresarse. Total, fue hasta los $t =$ __________ segundos que se siguió moviendo hacia la izquierda cada vez más lento; se paró, justo en la posición $x =$ __________ metros. De nuevo entonces, inició su movimiento hacia la derecha cada vez más rápido. Cuando lo vimos pasar por el origen de la recta en que se mueve eran entonces los $t =$ __________ segundos y llevaba una velocidad de __________ metros/segundo. Y siguió trasladándose hacia la derecha, cada vez más rápido, y más rápido, y más rápido, ¡hasta que se perdió de nuestra vista!

... y colorín colorado... este cuento... se ha acabado.

Respuesta: $x = 0$, $v_0 = 11$, $t = 1$, $x = \frac{16}{3}$. $t = 9 - 4\sqrt{3}$, $t = 6$, $x = -78, 25$, $t = 11$. $x = -\frac{484}{3}$, $t = 9 + 4\sqrt{3}$, 73.5692.

¿Sabías que?...



Así como existe la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática, también existe una fórmula general para resolver una ecuación cúbica... pero su aplicación se complica ¡a más del triple!

Si la observas... lo entenderás, ya verás.

Para resolver

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Primero divides entre el coeficiente principal a_3 para convertirla en una ecuación con coeficiente principal 1, y ya teniéndola así, llamamos b, c, y d a los nuevos coeficientes,

$$x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

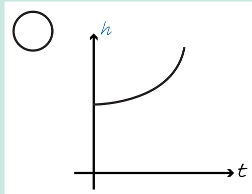
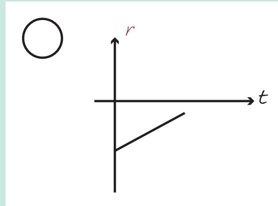
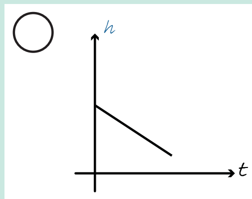
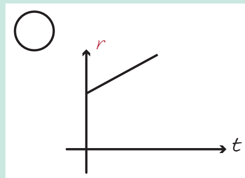
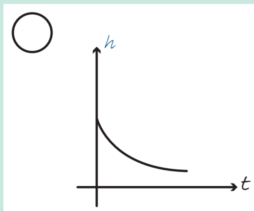
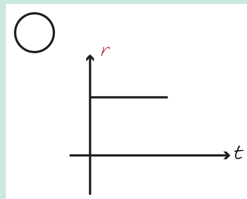
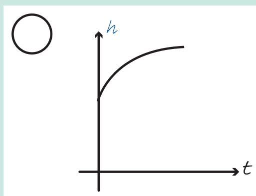
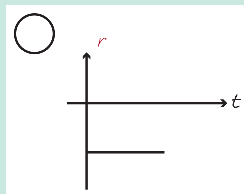
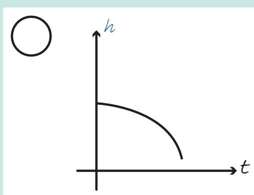
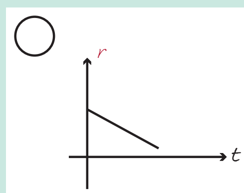
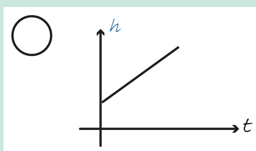
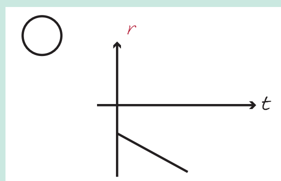
ahora sustituye los nuevos coeficientes b, c y d en la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{2b^3 - 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\left(\frac{2b^3 - 9bc + 27d}{54}\right)^2 + \left(\frac{3c - b^2}{9}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{2b^3 - 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\left(\frac{2b^3 - 9bc + 27d}{54}\right)^2 - \left(\frac{3c - b^2}{9}\right)^3}} - \frac{b}{3}$$

y... ¡listo!... ¿listo?

Problema 1.

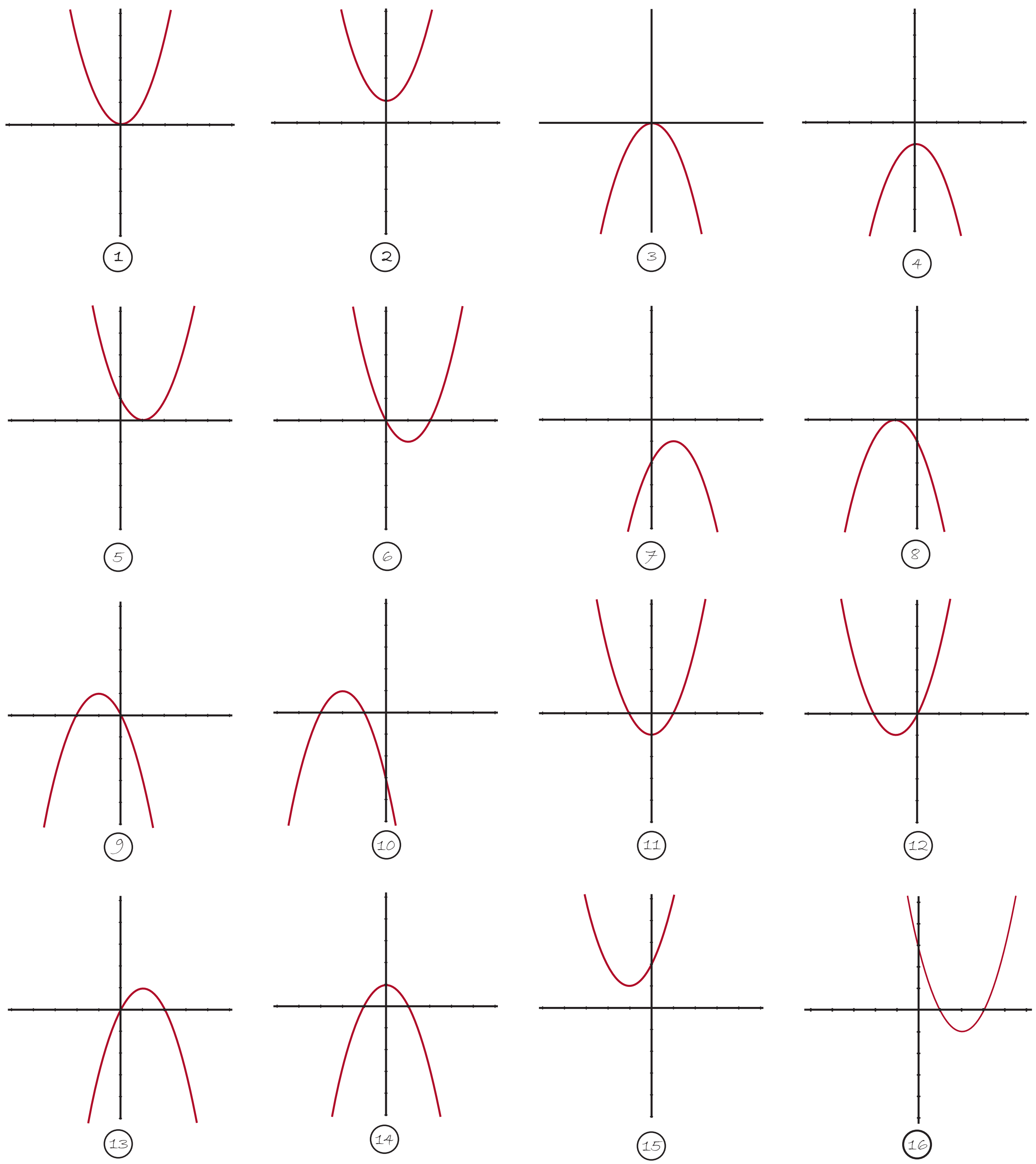
Relaciona cada tanque con sus correspondientes gráficas de nivel (2da. columna) y de razón de cambio de nivel (3er. columna) asignando el mismo número en estas gráficas. Supóngase que en cada caso, el flujo de la llave es constante.

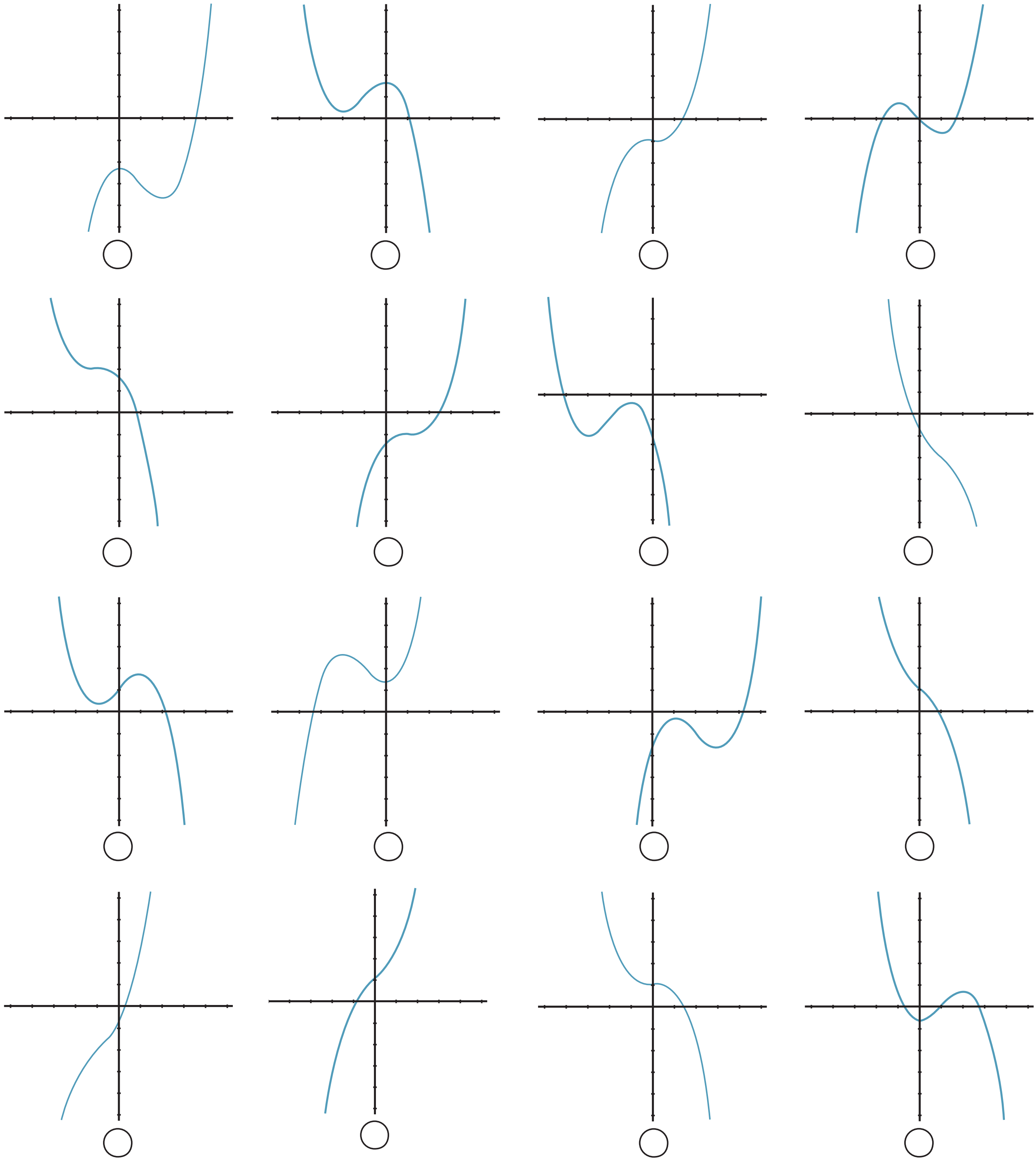
1er. columna	2da. columna	3er. columna
1 		
2 		
3 		
4 		
5 		
6 		

Respuesta: 2da. columna: 2, 1, 5, 6, 3, 4   3ra. columna: 5, 2, 4, 1, 6, 3

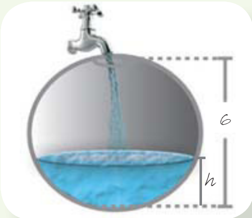
Problema 2.

Relaciona cada función cuadrática con la función cúbica correspondiente de la cual es su derivada.





Respuestas: 1-6, 2-9, 3-1, 4-11, 5-8, 6-5, 7-10, 8-7, 9-14, 10-12, 11-16, 12-4, 13-15, 14-2, 15-3, 16-13



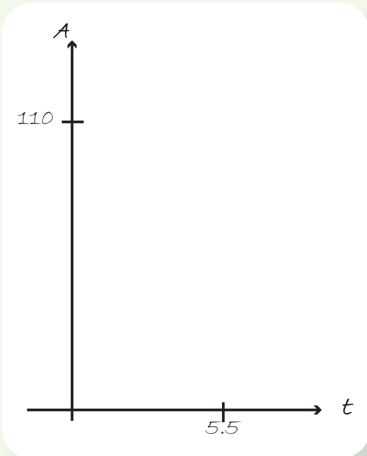
Problema 3

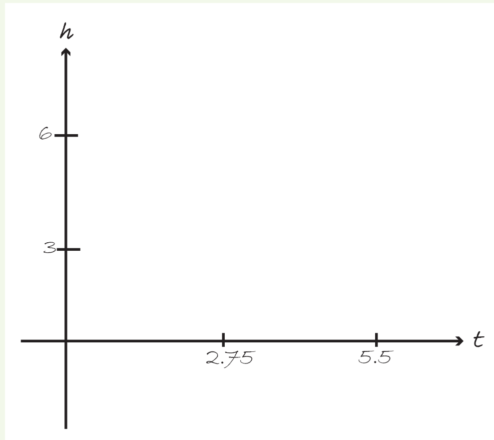
Una llave arroja agua en el barril mostrado en la figura. El agua fluye a razón constante de 20 litros por minuto. Supongamos que al inicio el barril está vacío, y que se llena después de haber pasado 5.5 minutos.

Dibuja por separado las gráficas con respecto al tiempo de:

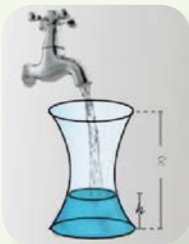
a) La cantidad A de agua en el tanque desde el inicio hasta que se llena

b) La altura h del nivel del agua, desde el inicio hasta que se llena el tanque.





Respuesta: *La cantidad de agua A aumenta a razón constante, su gráfica es una recta. La altura h del nivel aumenta cada vez más lento hasta la mitad y luego cada vez más rápido.*



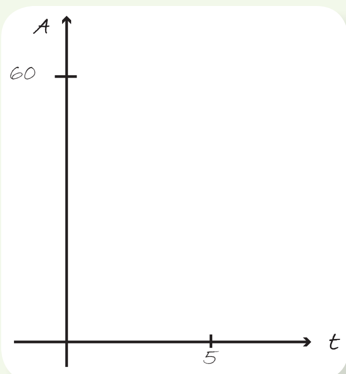
Problema 4

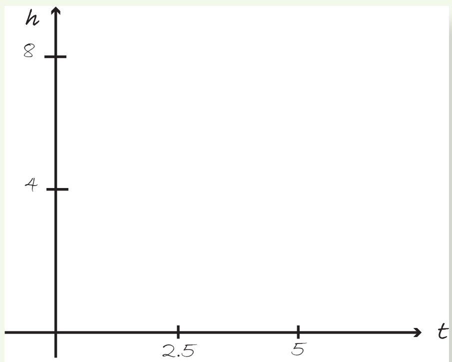
Una llave arroja agua en el barril mostrado en la figura. El agua fluye a razón constante de 12 litros por minuto. Supongamos que al inicio el barril está vacío, y que éste se llena después de haber pasado 5 minutos.

Dibuja por separado las gráficas con respecto al tiempo de:

c) La cantidad A de agua en el tanque desde el inicio hasta que se llena.

d) La altura h del nivel del agua, desde el inicio hasta que se llena el tanque.





Respuesta: La cantidad de agua A aumenta a razón constante su gráfica es una recta. La altura h del nivel aumenta cada vez más rápido hasta la mitad del tanque y después cada vez más lento.

PROBLEMA 5

Lee la historia del cochecito y realiza lo pedido.

Había una vez, un cochecito que se movía sobre una línea recta...

Parte del reposo, cuando estaba en la posición $x_o = 4$ metros.

Durante el primer minuto se movió hacia la derecha cada vez más rápido.

Entre el minuto 1 y el minuto 3 siguió hacia la derecha, pero trasladándose cada vez más lento.

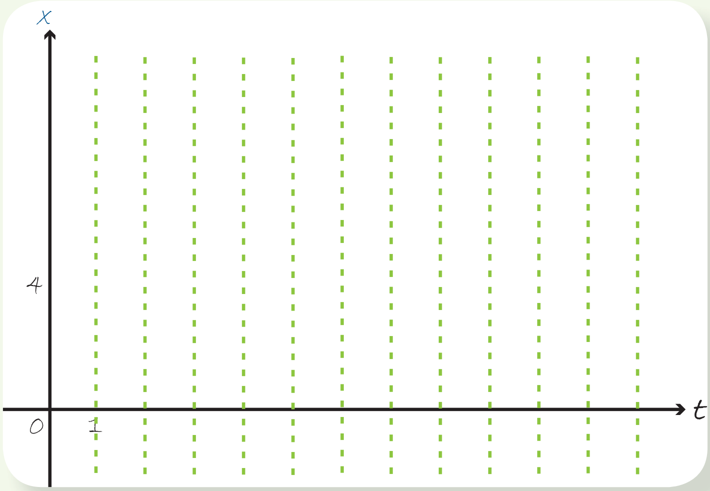
En ese instante 3 se paró, e inmediatamente se dirigió hacia la izquierda cada vez más rápido.

En el instante 8 pasó por el origen de coordenadas de la recta en que se mueve, dirigiéndose aún hacia la izquierda.

Justo en ese instante 8, decide ir cada vez más lento hacia la izquierda pues quería regresarse.

Total, durante los 3 a los 10 minutos se movió hacia la izquierda y precisamente en el instante $t = 10$ se paró para regresar hacia la derecha con una velocidad cada vez mayor… y mayor… y mayor… ¡hasta perderse!.. FIN

Realiza un dibujo de la gráfica de la función de posición *vs* tiempo del cochecito en el sistema coordenado. Observa que al no tener el modelo matemático representado algebraicamente, el dibujo que realizan personas diferentes puede verse diferente, sin embargo, hay características esenciales de él que se conservan independientemente de quien lo haya trazado.



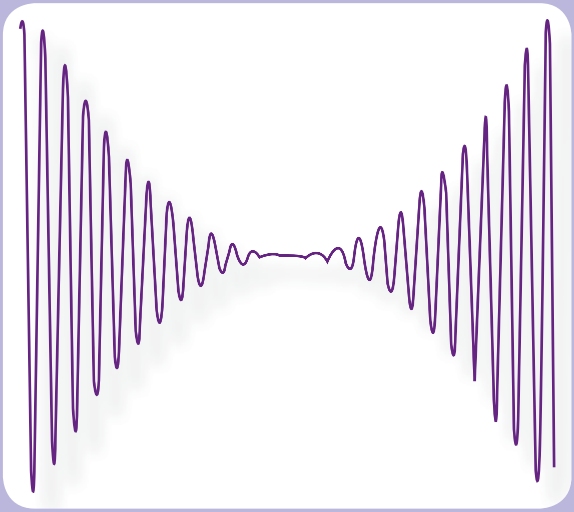
¿Sabías que?...

El hecho de que una función sea **derivable** tiene una implicación importante en su gráfica.

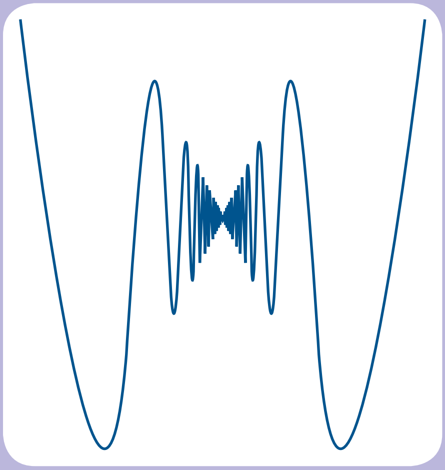
En el caso de las funciones polinomiales tenemos que son derivables en todos los valores de su dominio; esto asegura cierta condición de "suavidad" en el trazado de su gráfica. La curva, vista "de cerca" presenta un comportamiento prácticamente de recta.

Observa las siguientes gráficas para que distingas una curva derivable de una que no lo es.

Derivable en todas partes



Derivable en todas partes **excepto en el origen**



Más allá de las cúbicas

En esta sección queremos profundizar sobre los resultados que ya hemos visto y que se mantienen válidos para las funciones polinomiales en general. De hecho, su validez es en realidad una garantía cuando las funciones cumplen con la propiedad de tener su gráfica representada mediante una curva derivable, que a su vez es continua y cuya derivada también es una función continua.

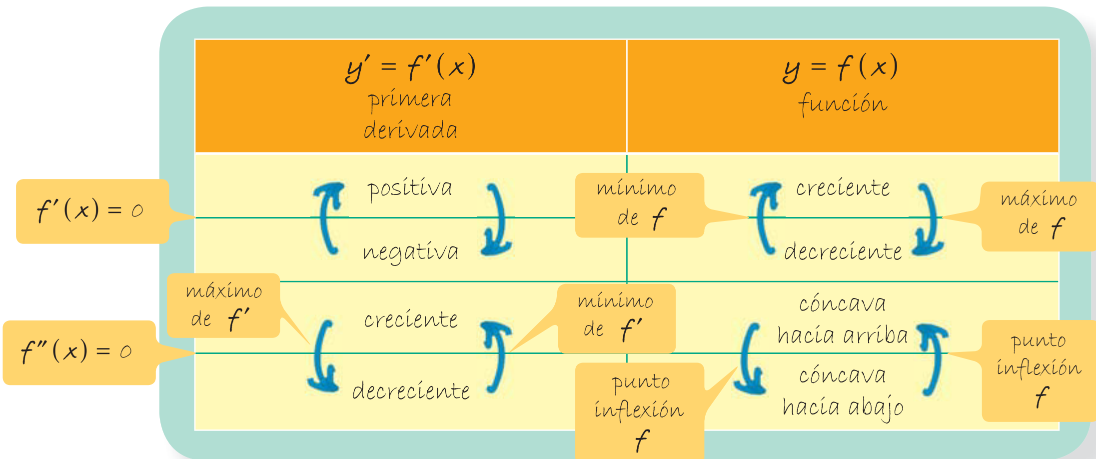
El caso de las funciones polinomiales incluye a las funciones lineal, cuadrática y cúbica que ya hemos tratado. Ellas, al igual que cualquier función polinomial de grado mayor o igual a cuatro, gozan de una condición especial: poseen su primera derivada continua, su segunda derivada continua, su tercera derivada continua y así sucesivamente. Efectivamente las derivadas de todos los órdenes de una función polinomial, al ser también funciones polinomiales, gozan de continuidad y de derivabilidad.

Para los fines del análisis cualitativo que hemos estudiado en los temas anteriores, nos conviene aquí aceptar la existencia y continuidad de la segunda derivada de la función para prolongar hasta ella nuestro conocimiento del comportamiento gráfico de puntos máximo, mínimo y de inflexión.

Recordemos la siguiente imagen donde relacionamos el comportamiento de la función $f'(x)$ con el de su primera derivada.

$y' = f'(x)$ primera derivada		$y = f(x)$ función
positiva	$\longleftrightarrow$	creciente
negativa	$\longleftrightarrow$	decreciente
creciente	$\longleftrightarrow$	cóncava hacia arriba
decreciente	$\longleftrightarrow$	cóncava hacia abajo

De esta tabla ya hemos inferido hechos importantes que relacionan los puntos máximo, mínimo y de inflexión de la función $y = f(x)$ con la gráfica de su razón de cambio, su derivada. Introducimos algunas flechas e información en la tabla para expresar estos hechos:



Observa los primeros dos renglones de la tabla para que distingas lo que te describimos enseguida:

En la columna de la primera derivada, observamos que si en cierto x se tiene que la derivada es 0 $\left(f'(x) = 0\right)$ y su gráfica cruza el eje horizontal, puede hacerlo de valores positivos a negativos, o bien, puede hacerlo de valores negativos a positivos (observa las flechas).

En el primero de los casos, la función $y = f(x)$ cambió de ser creciente a ser decreciente, lo que señala que en ese $\boldsymbol{x}$ debe darse un valor máximo de la función. En el segundo de los casos, la función $y = f(x)$ cambia de ser decreciente a ser creciente, lo que señala que en ese $\boldsymbol{x}$ debe darse un valor mínimo de la función. Ubicamos esto en la columna de la función.

Observa ahora los últimos dos renglones de la tabla para que distingas lo que te describimos enseguida:

En la columna de la primera derivada observamos que si en cierto x se tiene que esta derivada cambia de creciente a decreciente, entonces en ese x la gráfica de la derivada tiene un punto máximo, o bien si cambia de decreciente a creciente, entonces en ese x la gráfica de la derivada tiene un punto mínimo (observa las flechas). Cualquiera de estos dos casos señalan que la función $y = f(x)$ cambia la concavidad hacia arriba a concavidad hacia abajo, o viceversa, lo que implica que en ese x la función $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión. Ubicamos esto en la columna de la función.

En conclusión:
Los cortes con el eje horizontal de la gráfica de la derivada señalan los valores de x donde la función $y = f(x)$ tiene un máximo o mínimo.
Si la gráfica de la derivada cruza el eje horizontal de valores positivos a negativos, entonces se trata de un **máximo** de la función; y si cruza de valores negativos a positivos, se trata de un **mínimo** de la función.
Por otra parte, los puntos máximos y mínimos de la gráfica de la derivada señalan los valores donde la función $y = f(x)$ tiene sus **puntos de inflexión**.

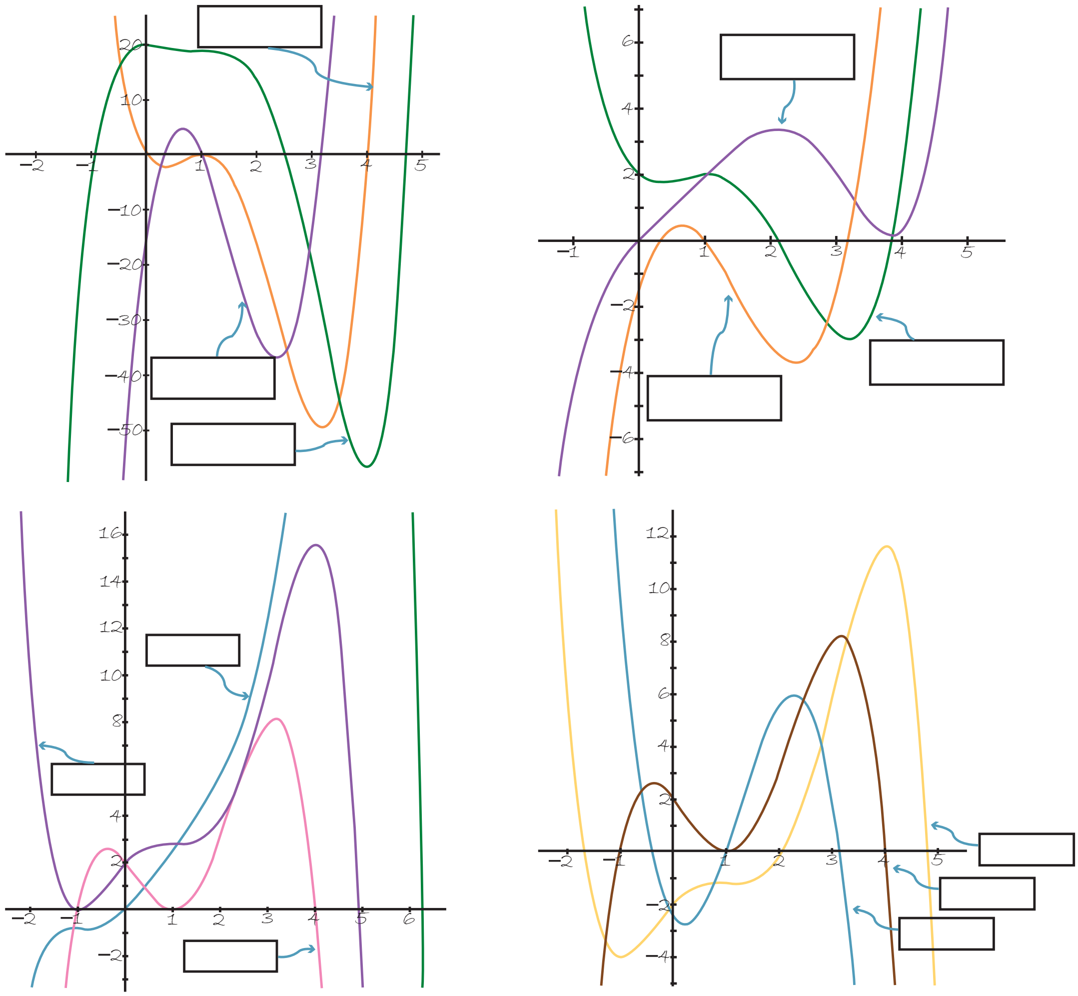
Aplica estos dos hechos al realizar la siguiente **práctica visual** de identificación de la gráfica de la función, su derivada, y la derivada de la derivada.

Nota importante: observa que "la primera derivada es a la función, lo que la segunda derivada es a la primera derivada".

Práctica de percepción visual

¿Cuál es cuál?

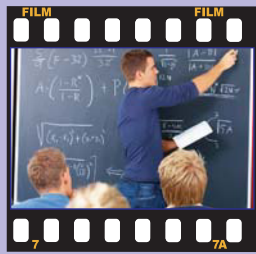
Observa las 3 gráficas en cada figura y decide cual es la función $f(x)$, cuál es su derivada $f'(x)$, y cuál es su segunda derivada $f''(x)$. Justifica tus decisiones con argumentos válidos.



Continuamos profundizando en nuestra tabla agregando ahora una tercera columna, pero lo hacemos del lado izquierdo, para dar cabida al comportamiento de la derivada de la derivada, esto es, la segunda derivada de la función:

$y'' = f''(x)$ segunda derivada	$y' = f'(x)$ primera erivada	$y = f(x)$ función
	positiva	creciente
	negativa	decreciente
positiva ⟷	creciente	cóncava hacia arriba
negativa ⟷	decreciente	cóncava hacia abajo

¿Sabías que?...



La inquietud por descubrir una solución general para resolver la ecuación cúbica captó la atención de matemáticos italianos de principios del siglo XVI. En esa época representaba un reto el crear nuevas matemáticas que trascendieron los logros de los antiguos griegos y árabes.

Se sabe que la solución algebraica general de la ecuación cúbica fue descubierta por Scipio del Ferro y sus discípulos en la Universidad de Bolonga, mas nunca publicó su solución, sólo lo comentó a algunos amigos.

Sin embargo, el descubrimiento fue conocido, y a su muerte, en 1539, un profesor veneciano apodado Tartaglia ("el tartamudo") redescubrió sus métodos manteniendo nuevamente el secreto. Pero reveló sus ideas al doctor Girolamo Cardano quien a pesar de haber jurado mantenerle en secreto, en 1545 publicó su Ars Magna, libro conciso de Álgebra donde dio a conocer plenamente el resultado.

A la fecha, la ecuación cúbica $x^3 + px + q = 0$ se asocia con la conocida como la fórmula Cardano:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

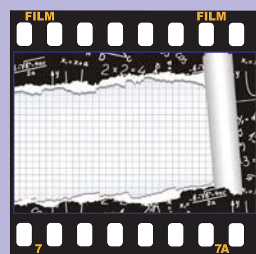
¿Sabías que?...

Contar con una "fórmula general" para resolver la ecuación polinomial de grado 5 o más... ¡no es posible!

En la historia de la Matemática han ocurrido eventos así... después de un arduo trabajo dedicado a dar respuesta a un problema, resulta ser que una perspectiva diferente del mismo es la que conduce al desarrollo de nuevas teorías y, de paso, se muestra que la solución de aquel problema original... es justamente "no tener solución".

Tal es el caso de la reflexión acerca de la solución algebraica de las ecuaciones. Se trata de la pregunta fundamental sobre por qué los métodos útiles para resolver ecuaciones de grado $n \leq 4$ no tienen éxito para $n > 4$

El trabajo de Lagrange al respecto le llevó a procedimientos que estimularon el trabajo de matemáticos como Abel y Galois, hoy conocidos en las ramás de la Matemática del Álgebra Abstracta y la Teoría de Grupos.



Los dos renglones que hemos introducido en esa tercer columna de $f''(x)$ nos permiten relacionar el crecimiento o decrecimiento de la primera derivada con el signo positivo o negativo de la segunda derivada, respectivamente.

Del arreglo que hemos hecho en la tabla podemos identificar una **estrategia algebraico/numérica** para determinar el comportamiento de la función en cuanto a crecimiento, decrecimiento y tipo de concavidad, con sólo detectar el signo (positivo o negativo) de la primera y de la segunda derivada. Lo establecemos enseguida:

Los dos renglones que hemos introducido en esa tercer columna de $f''(x)$ nos permiten relacionar el crecimiento o decrecimiento de la primera derivada con el signo positivo o negativo de la segunda derivada, respectivamente.

Del arreglo que hemos hecho en la tabla podemos identificar una **estrategia algebraico/numérica** para determinar el comportamiento de la función en cuanto a crecimiento, decrecimiento y tipo de concavidad, con sólo detectar el signo (positivo o negativo) de la primera y de la segunda derivada. Lo establecemos enseguida:

$y'' = f''(x)$ segunda derivada		$y' = f'(x)$ primera derivada	$y = f(x)$ función
		positiva	creciente
		negativa	decreciente
positiva	$\longleftrightarrow$	creciente	cóncava hacia arriba
negativa	$\longleftrightarrow$	decreciente	cóncava hacia abajo

Estrategia algebraica para conocer los intervalos donde la función $f(x)$ es **creciente** y donde es **decreciente**:

- Igualar la **primera derivada** a cero y resolver la ecuación generada.
- Ubicar esos valores en la recta numérica para detectar los diferentes intervalos en que ésta queda dividida.
- Elegir un valor numérico en cada uno de los intervalos generados y evaluar en él a la derivada.
- Asignar el signo de esa evaluación como el signo que mantiene la primera derivada en todo el intervalo correspondiente.
- En los intervalos con signo positivo, concluir que $f(x)$ es creciente, y en los intervalos de signo negativo, concluir que $f(x)$ es decreciente.

Estrategia algebraica para conocer los intervalos dónde la función $f(x)$ es **cóncava hacia arriba** y dónde es **cóncava hacia abajo**:

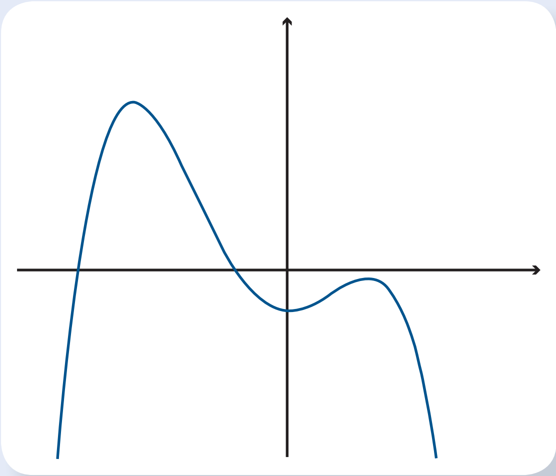
- Igualar la **segunda derivada** a cero y resolver la ecuación generada.
- Ubicar esos valores en la recta numérica para detectar los diferentes intervalos en que ésta queda dividida.
- Elegir un valor numérico en cada uno de los intervalos generados y evaluar en él a la segunda derivada.
- Asignar el signo de esa evaluación como el signo que mantiene la segunda derivada en todo el intervalo correspondiente.
- En los intervalos con signo positivo, concluir que $f(x)$ es cóncava hacia arriba, y en los intervalos de signo negativo, concluir que $f(x)$ es cóncava hacia abajo.

De hecho, con las estrategias nombradas tendremos "a la vista" los puntos máximo, mínimo y de inflexión. Aplicaremos estas estrategias completas para interpretar el comportamiento gráfico de funciones polinomiales de grado cuatro y cinco.

PROBLEMA DE GRAFICACIÓN 1.

Con un software de graficación se obtuvo la siguiente imagen para la función

$$y = f(x) = -x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 2$$



Una inspección visual de la figura nos dice que la gráfica tiene dos puntos máximos y un punto mínimo entre ellos; además debe haber dos puntos de inflexión entre los puntos máximos y el mínimo. También se observa que la gráfica es creciente, luego decrece, crece nuevamente y acaba decreciendo, y su concavidad cambia de abajo hacia arriba y acaba hacia abajo.

Al aplicar la estrategia algebraico/numérica determinaremos de la gráfica toda la información precisa al respecto de nuestra inspección visual y podremos explicitar numéricamente con detalle su comportamiento.

Siguiendo la estrategia planteada procedemos a calcular la función derivada e igualarla a cero:

Como $\quad f(x) = -x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 2$

entonces $\quad f'(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8x$

Igualamos a cero $\quad f'(x) = 0$

$$-4x^3 - 4x^2 + 8x = 0$$

y para resolver esta ecuación cúbica factorizamos

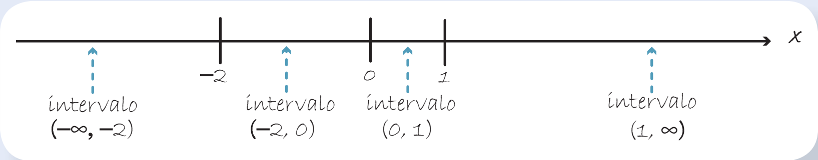
$$-4x\left(x^2 + x - 2\right) = 0$$

de donde cada factor se iguala a cero

$$-4x = 0 \text{ luego } x = \frac{0}{-4} = 0$$

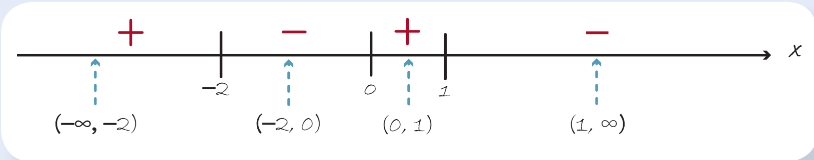
$$x^2 + x - 2 = 0 \text{ luego } x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Procedemos ahora a ubicar esos valores en la recta numérica observando que se determinan cuatro intervalos.

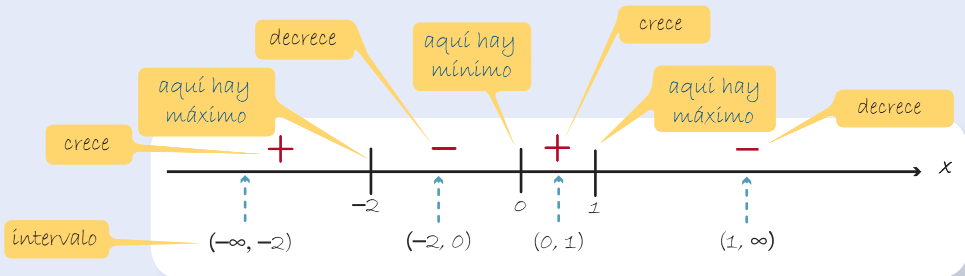


Para asignar el signo de la derivada en cada intervalo, elegimos algunos valores "cómodos" para evaluar en ellos:

$f'(-3) = 48$	(positivo)	$f'(1) = -8$	(negativo)
$f'(0.5) = 2.5$	(positivo)	$f'(2) = -32$	(negativo)



De hecho, el arreglo anterior podemos interpretarlo en términos del crecimiento/decrecimiento de la función $f(x)$ y tomar decisiones sobre los valores de x donde habrá máximos y/o mínimos relativos de la función:



Tenemos un valor máximo de $f(x)$ en $x = -2$, a saber,

$$f(-2) = -(-2)^4 - \frac{4}{3}(-2)^3 + 4(-2)^2 - 2 = \frac{26}{3}.$$

Tenemos un valor mínimo de $f(x)$ en $x = 0$, a saber, $f(0) = -2$.

También, otro valor máximo de $f(x)$, se da en $x = 1$, a saber,

$$f(1) = -(1)^4 - \frac{4}{3}(1)^3 + 4(1)^2 - 2 = -\frac{1}{3}.$$

Además, los intervalos donde $y = f(x)$ es creciente son $(-\infty, -2)$ y $(0, 1)$, mientras que los intervalos donde $y = f(x)$ es decreciente son $(-2, 0)$ y $(1, \infty)$.

Seguimos ahora con la estrategia para analizar el comportamiento de concavidad. Calculamos la segunda derivada:

Como $\qquad f'(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8x,$

entonces $\qquad f''(x) = -12x^2 - 8x + 8.$

Igualamos a cero:

$$f''(x) = 0$$
$$-12x^2 - 8x + 8 = 0,$$

y para resolver esta ecuación cuadrática aplicamos la fórmula general, pero no sin antes simplificar la ecuación dividiendo entre -4:

$$\frac{-12x^2 - 8x + 8 = 0}{-4}$$
$$3x^2 + 2x - 2 = 0$$

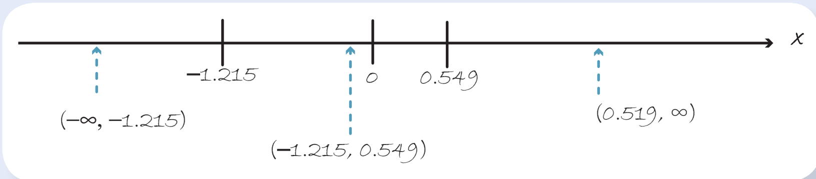
De ahí que

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

Obtenemos los dos valores que aproximamos a 3 decimales para facilitar su ubicación.

$$x = \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \approx -1.215 \qquad x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \approx 0.549$$

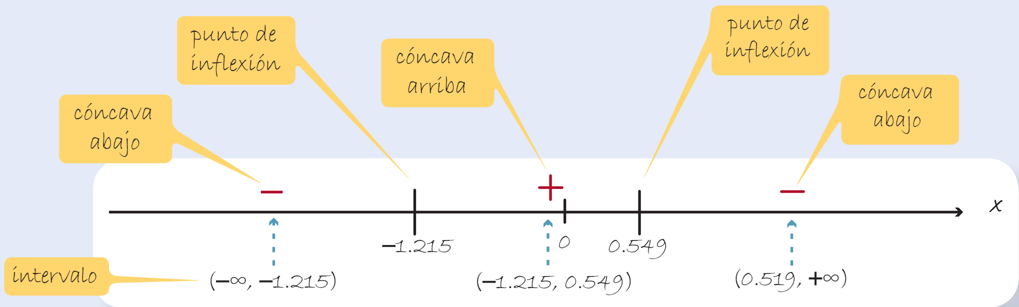
Ubicamos estos valores en la recta numérica determinando tres intervalos:



Al evaluar en números "sencillos" de estos intervalos, detectamos el signo de la segunda derivada en cada intervalo:

$f''(2) = -24$ (neg) $\qquad f''(0) = 8$ (pos) $\qquad f''(1) = -12$ (neg)

Ubicamos esta información en la recta, lo que nos informa además de los puntos de inflexión que se determinan con el cambio de concavidad.



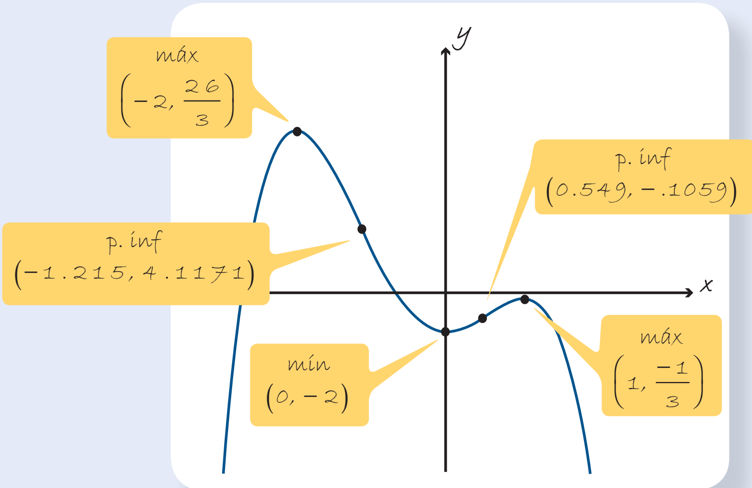
Tenemos dos puntos de inflexión:

en $\quad x \approx -1.215, \quad$ se obtiene $f(-1.215) \approx 4.1171$

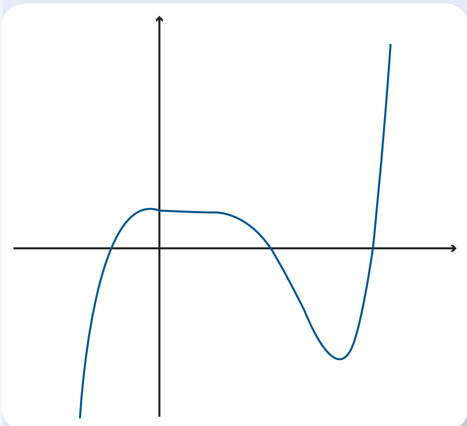
y en $\quad x \approx 0.549, \quad$ se obtiene $f(0.549) \approx -1.1059$

Además, el intervalo donde la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba es $(-1.215,\ 0.549)$, mientras que hay dos intervalos donde es cóncava hacia abajo, $(-\infty,\ -1.215)$ y $(0.549,\ \infty)$.

Terminamos colocando la información de los puntos importantes en la gráfica dada.



Problema de graficación 2.



Con un software de graficación se obtuvo la siguiente imagen para la función

$$y = f(x) = 20 - 8x^2 + 12x^3 - 6x^4 + \frac{4}{5}x^5$$

Una inspección visual de la figura, muestra que la gráfica tiene dos puntos máximos y dos puntos mínimos, ¿o no? Además parece haber al menos tres puntos de inflexión, ¿será?

Pero dejemos que sea nuestro conocimiento adquirido el que nos asegure lo que debemos ver.

Al aplicar la estrategia algebraico/numérica determinaremos toda la información explícita numéricamente y la colocaremos en la gráfica.

Procedemos a calcular la función derivada e igualarla a cero:

como $\quad f(x) = 20 - 8x^2 + 12x^3 - 6x^4 + \frac{4}{5}x^5$

entonces $\quad f'(x) = -16x + 36x^2 - 24x^3 + 4x^4.$

Para resolver esta ecuación de grado cuatro, primero factorizamos x, que es un factor que tienen en común todos los términos. Incluso un factor 4 lo puede acompañar:

$$4x\left(-4 + 9x - 6x^2 + x^3\right) = 0$$

ahora igualamos a cero cada factor:

$$4x = 0, \text{ de donde } x = \frac{0}{4} = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$$

Para resolver esta ecuación cúbica que nos falta, debemos encontrar por inspección una solución racional de ella, pero esto no es difícil de hacer sabiendo que la solución debe ser un factor del coeficiente 4. Probamos que $x = 1$ es solución de la ecuación cúbica con la división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & 9 & -4 & \underline{1} \\ & 1 & -5 & 4 & \\ \hline 1 & -5 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

La ecuación cuadrática restante es:

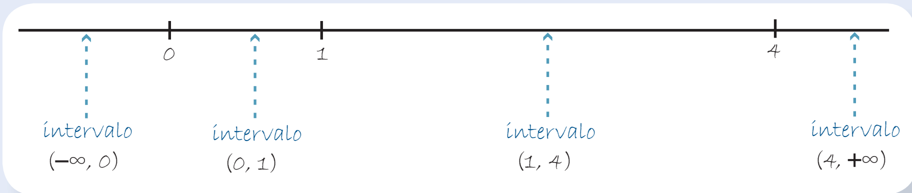
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

cuyas soluciones pueden obtenerse incluso factorizando

$$(x-4)(x-1) = 0 \quad \text{de donde} \quad x = 1 \ \text{ y } \ x = 4$$

Por lo tanto $f'(x) = 0$ en $x = 0$, $x = 1$ (raíz doble) y $x = 4$.

Acomodamos estos valores en la recta numérica de los números reales e identificamos cuatro intervalos:



El signo de la derivada en cada uno de estos intervalos lo asignamos al evaluar en algún valor de x contenido en ellos que nos resulte "cómodo" para hacer las operaciones:

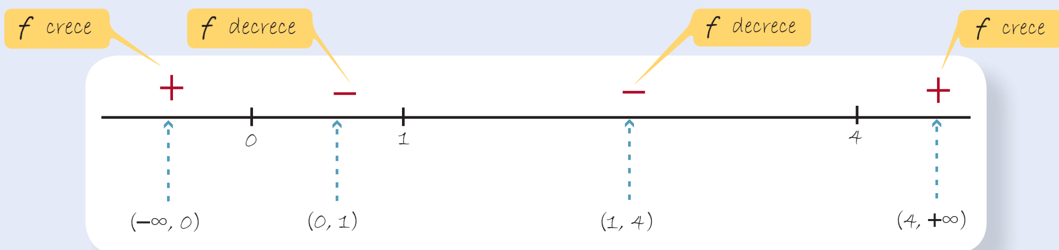
Para $(-\infty, 0)$ calculamos $f'(-1) = 80$, positivo.

Para $(0, 1)$ calculamos $f'(0.5) = -1.75$, negativo.

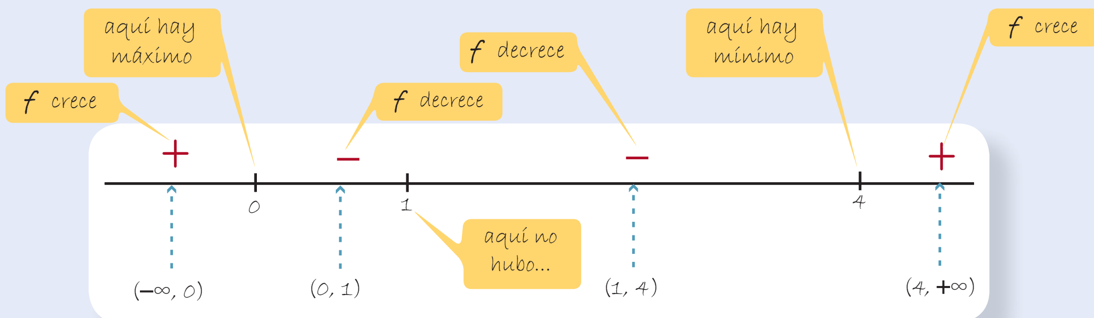
Para $(1, 4)$ calculamos $f'(1) = -16$, negativo.

Para $(4, +\infty)$ calculamos $f'(5) = 320$, positivo.

Esto determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función $y = f(x)$,



De hecho el cambio de signo en la derivada nos informa de un máximo y un mínimo de la función, como establecemos en seguida.



Concluimos que en $x = 0$ se tiene un valor máximo, $f(0) = 20$ y en $x = 4$ se tiene un valor mínimo, $f(4) = -56.8$.

Además, la función $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(4, +\infty)$, mientras que es decreciente en el intervalo $(0, 4)$.

Observa que si bien en $x = 1$ se obtuvo que la derivada es 0, sin embargo ahí no resultó un punto máximo ni mínimo, pues la derivada no cambió de signo en él.

Para obtener la información relativa a la concavidad de $f(x)$, obtenemos su segunda derivada y le igualamos a cero:

$$f''(x) = -16 + 72x - 72x^2 + 16x^3 = 0$$

Debemos resolver la ecuación cúbica

$$16x^3 - 72x^2 + 72x - 16 = 0$$

que conviene dividir entre 8 para simplificar

$$2x^3 - 9x^2 + 9x - 2 = 0$$

De este modo es sencillo identificar la solución $x = 1$, con la que podemos realizar la división de polinomios para obtener el factor cuadrático restante.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 7x + 2 \\ \hline
x - 1 & 2x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \\
 & -2x^3 + 2x^2 \\ \hline
 & -7x^2 + 9x \\
 & 7x^2 - 7x \\ \hline
 & 2x - 2 \\
 & -2x + 2 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Por tanto,

$$2x^3 - 9x^2 + 9x - 2 = (x-1)\left(2x^2 - 7x + 2\right)$$

y así, la ecuación cúbica se resuelve al igualar a cero cada factor:

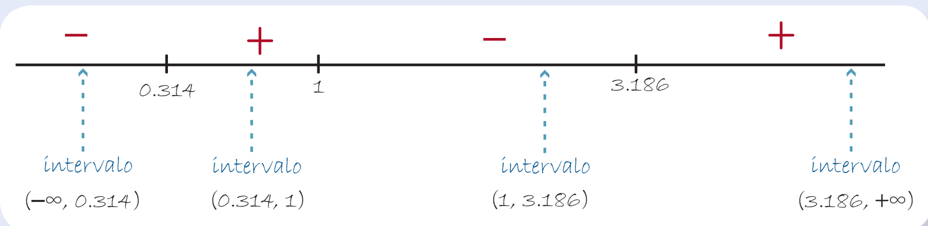
$$x - 1 = 0 \quad \text{de donde} \quad x = 1$$

$$2x^2 - 7x + 2 = 0 \ \text{ de donde } \ x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(2)(2)}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4}$$

Aproximando a tres decimales tenemos

$$x = \frac{7 - \sqrt{33}}{4} \approx 0.314 \qquad\qquad x = \frac{7 + \sqrt{33}}{4} \approx 3.186$$

Ubicamos en la recta numérica las tres soluciones determinándose cuatro intervalos.



Identificamos el signo de la segunda derivada en cada uno de esos cuatro intervalos al evaluar en un elemento de ellos:

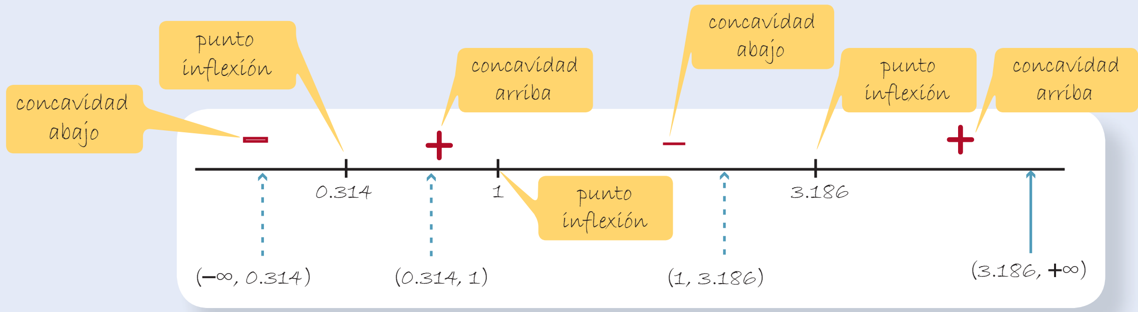
En $(-\infty, 0.314)$ calculamos $f''(0) = -16$, negativo.

En $(0.314, 1)$ calculamos $f''(0.5) = 4$, positivo.

En $(1, 3.186)$ calculamos $f''(2) = -32$, negativo.

En $(3.186, +\infty)$ calculamos $f''(4) = 144$, positivo.

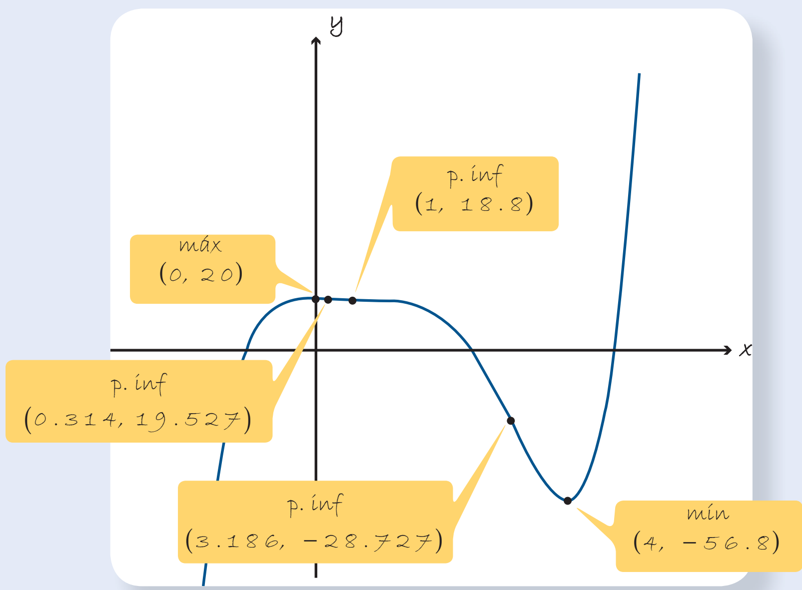
Colocamos el signo en cada intervalo confirmando con ello la existencia de tres puntos de inflexión.



Los intervalos de concavidad hacia abajo de la gráfica de $f(x)$ se identifican con el signo negativo, y los de concavidad hacia arriba con el signo positivo.

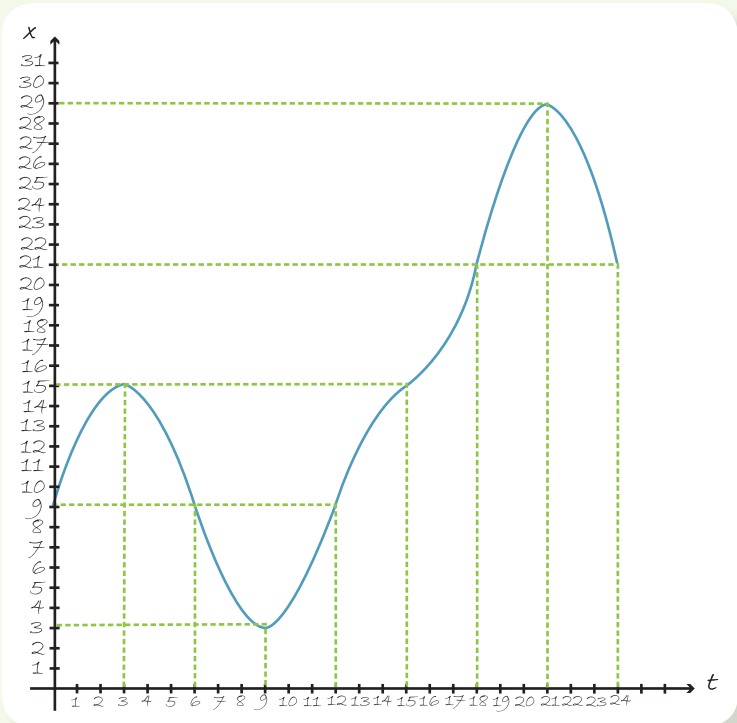
Los puntos de inflexión aproximados a tres cifras decimales son $(0.314, 19.527)$, $(1, 18.8)$ y $(3.186, -28.727)$.

Terminamos colocando la información que hemos obtenido en la grafica original.



Problema 1

En la figura siguiente se muestra la gráfica de la función de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta.



a) Determina los intervalos en que la velocidad es positiva.

Respuestas: (0, 3) y (9, 21).

b) Determina los intervalos en que la velocidad es negativa.

Respuestas: (3, 9) y (21, 24).

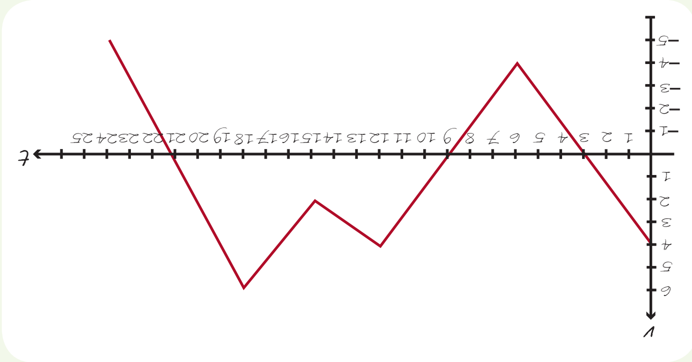
c) Determina los intervalos en que la velocidad es creciente.

Respuestas: (6, 12) y (15, 18).

d) Determina los intervalos en que la velocidad es decreciente.

Respuestas: (0, 6), (12, 15) y (18, 24).

e) Supongamos que la curva se construye con partes de funciones cuadráticas (parábolas). En el mismo sistema coordenado donde está la gráfica de posición, dibuja la gráfica de la velocidad con la mayor precisión que te sea posible.

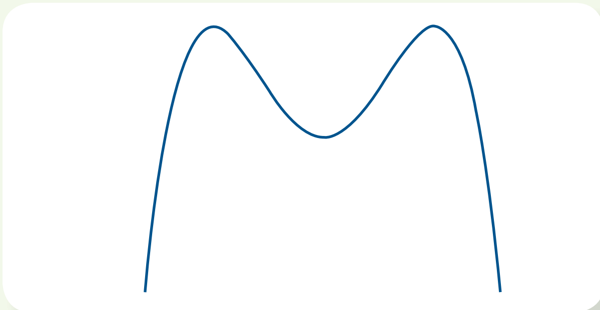


Respuesta:

Problema Propuesto 2

Con un software de graficación obtuvimos la siguiente imagen para la función

$$y = f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1.$$



Aplica la estrategia algebraica vista en este tema para determinar la información del comportamiento de la función. Debes terminar situando en la gráfica un sistema coordenado adecuado y señalando sobre la curva los puntos máximo, mínimo y de inflexión que se tengan, así como sus coordenadas.

Completa:

Intervalos de crecimiento: ______________________________

Intervalos de decrecimiento: ______________________________

Intervalos de concavidad hacia arriba: ______________________________

Intervalos de concavidad hacia abajo: ______________________________

Punto(s) máximo(s): ______________________________

Punto(s) mínimo(s): ______________________________

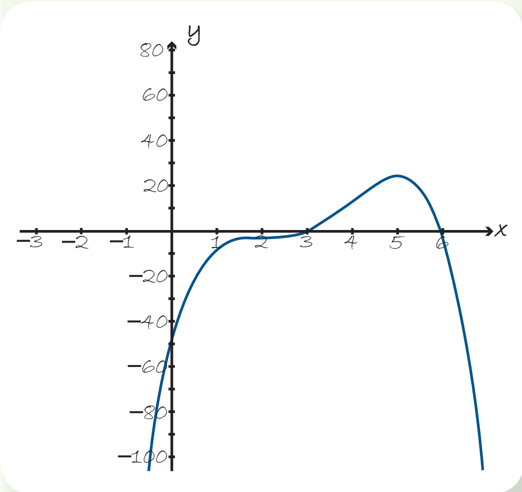
Punto(s) de inflexión: ______________________________

Respuestas: C: $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$; D: $(-1, 0)$, $(1, \infty)$; CH↑: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

CH↓: $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$; Máx: $(-1, 0)$, $(1, 0)$; Mín: $(0, -1)$;

PINF: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{4}{9}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{4}{9}\right)$.

Problema Propuesto 3



Con un software de graficación obtuvimos la siguiente imagen para la función

$$y = f(x) = -x^4 + 12x^3 - 48x^2 + 80x - 51$$

Aplica la estrategia algebraica vista para determinar la información del comportamiento de la función. Debes terminar señalando en la curva los puntos máximo, mínimo y de inflexión con sus coordenadas.

Completa:

Intervalos de crecimiento: ______________________________

Intervalos de decrecimiento: ______________________________

Intervalos de concavidad hacia arriba: ______________________________

Intervalos de concavidad hacia abajo: ______________________________

Punto(s) máximo(s): ______________________________

Punto(s) mínimo(s): ______________________________

Punto(s) de inflexión: ______________________________

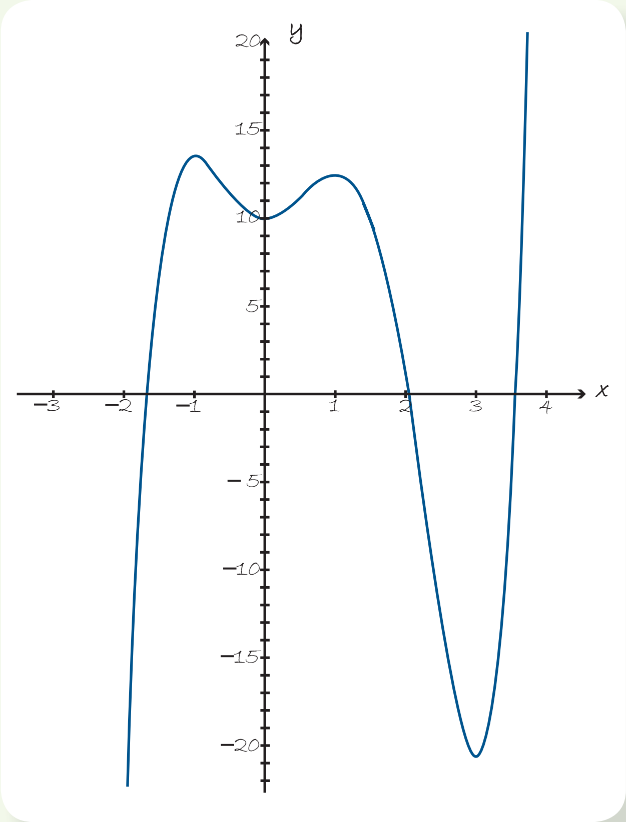
Respuestas: C: $(-\infty, 5)$; D: $(5, \infty)$; CH↑: $(2, 4)$; CH↓: $(-\infty, 2)$, $(4, \infty)$; Máx: $(5, 24)$; Mín: No tiene; PINF: $(2, -3)$, $(4, 13)$.

Problema Propuesto 4

Con un software de graficación obtuvimos la siguiente imagen para la función

$$f(x) = 10 + 6x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 3x^4 + \frac{4}{5}x^5 .$$

Aplica la estrategia algebraica para determinar la información del comportamiento de la función. Debes terminar señalando en la curva los puntos máximo, mínimo y de inflexión y sus coordenadas.



Completa:

Intervalos de crecimiento: ____________________

Intervalos de decrecimiento: ____________________

Intervalos de concavidad hacia arriba: ____________________

Intervalos de concavidad hacia abajo: ____________________

Punto(s) máximo(s): ____________________

Punto(s) mínimo(s): ____________________

Punto(s) de inflexión: ____________________

Respuestas: C: $(-\infty,\ -1),\ (0,\ 1),\ (3,\ \infty)$; D: $(-1,\ 0),\ (1,\ 3)$;

CH↑: (no racionales) $(-0.6073,\ 0.5309),\ (2.3263,\ \infty)$;

CH↓: (no racionales) $(-\infty,\ -0.6073),\ (0.5309,\ -2.3263)$;

Máx: $\left(-1,\ \frac{203}{15}\right),\ \left(1,\ \frac{187}{15}\right)$; Mín: $(0,\ 10),\ \left(3,\ \frac{103}{5}\right)$;

PINF: (no racionales) $(-0.6073,\ 12.0374),\ (0.5309,\ 11.2870),\ (2.3263,\ -7.6713)$.

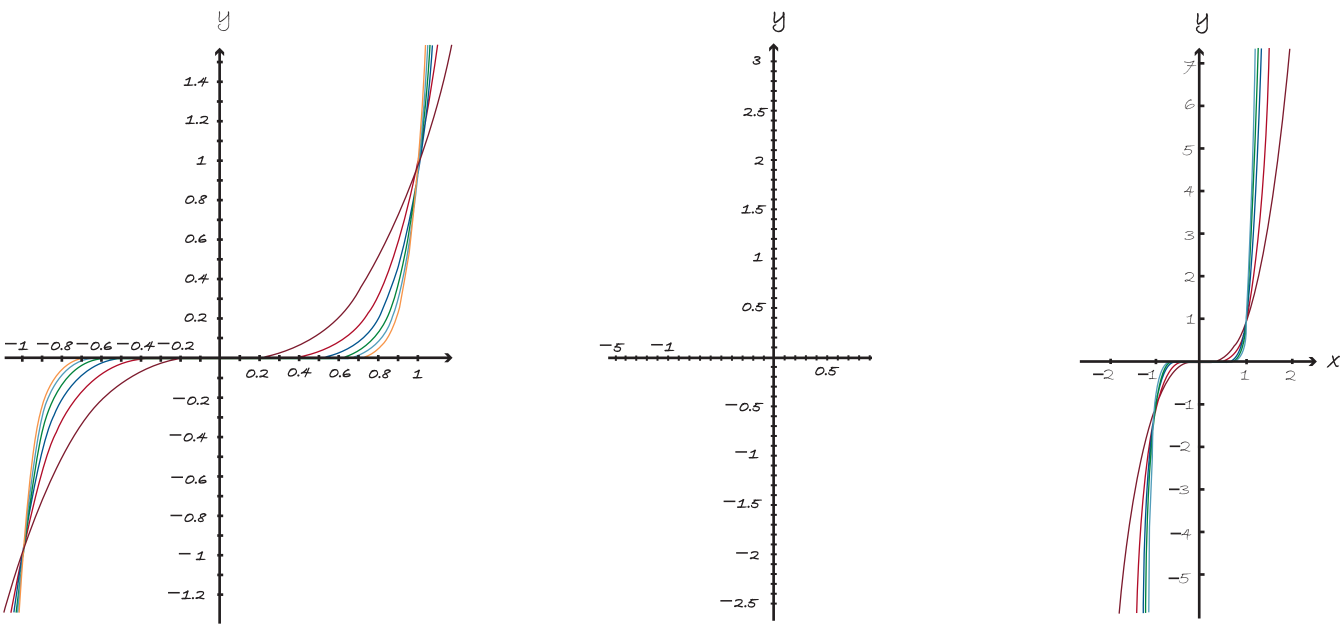
El comportamiento al infinito

El contacto que hemos tenido con las funciones polinomiales nos ha permitido conocerles al grado de precisar aquellos puntos que son clave para discernir su comportamiento: máximos y mínimos relativos, y puntos de inflexión. Todo esto ha sido posible gracias al conocimiento de su razón de cambio: la derivada de la función. En este apartado sólo queremos agregar un complemento al análisis hecho cuya utilidad será más evidente en los temas por venir.

Más que considerar el caso general, resulta conveniente que primeramente sinteticemos resultados sobre el comportamiento de funciones polinomiales básicas, distinguiendo entre ellas cuando el grado (el mayor de los exponentes) sea un número par o sea un número impar.

Observa la siguiente secuencia de imágenes con el comportamiento de las funciones potencia $y = f(x) = x^n$ cuando n es impar. La secuencia muestra el verlas cada vez un poco más "de lejos".

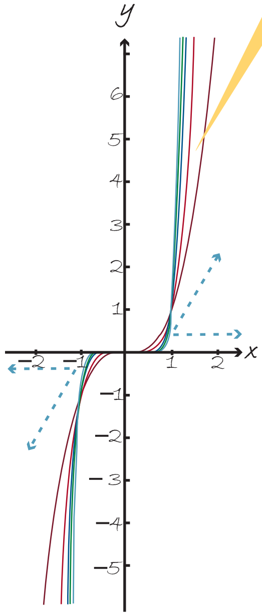
Caso impar



Podríamos decir, entre otras cosas, que todas las funciones potencia de grado impar "comienzan y acaban igual".

Introduciremos un lenguaje para hacer referencia a esta característica propia de las funciones. Observa la figura siguiente pensando que recorres la curva desde el origen hacia la derecha, y después desde el origen hacia la izquierda.

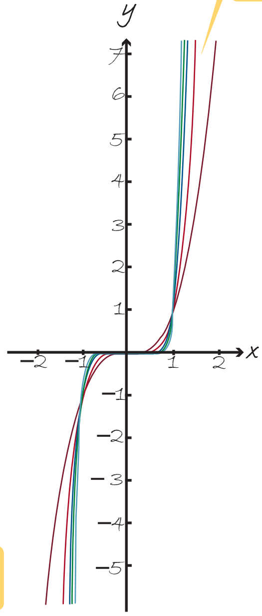
cuando x crece indefinidamente, y crece indefinidamente también



Para las funciones polinomiales, decir "x crece indefinidamente" significa que x toma valores positivos cada vez mayores, esto es, más hacia la derecha, según el eje x horizontal.

Por su parte, al decir que "x decrece indefinidamente" significa que x toma valores cada vez menores, esto es, más hacia la izquierda y luego, necesariamente negativos.

$\lim\limits_{x \to \infty} y = \infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \infty$

cuando x decrece indefinidamente, y decrece indefinidamente también

De ahora en adelante escribiremos

$x \to \infty$ (se lee "x tiende a infinito") para "x crece indefinidamente"

y $x \to -\infty$ (se lee "x tiende a menos infinito") para "x decrece indefinidamente".

Utilizaremos el símbolo

$$\lim_{x \to \pm\infty} y$$

para relacionar la tendencia de y en relación con x.

¡TOMA NOTA!

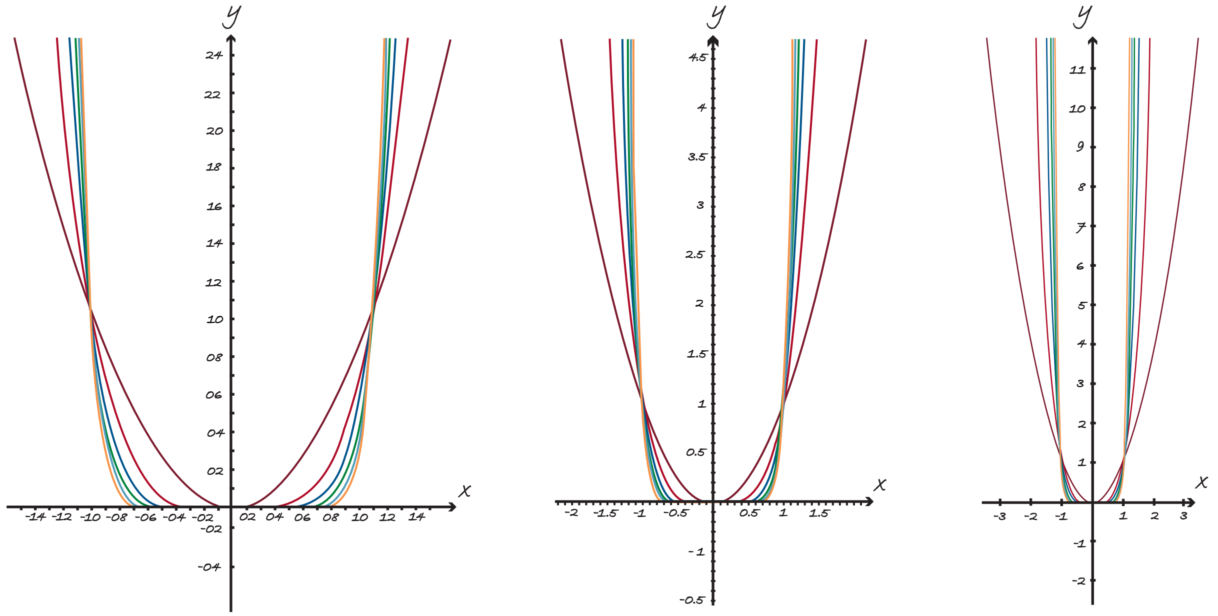
Uno escribe
∞
y se entiende que es
$+\infty$
lo mismo que si
uno escribe 8
y se entiende +8...
Y cuando se trate de
los negativos
escribiremos el símbolo
"−": como en $-\infty$ y −8.

Observa ahora la secuencia de imágenes con el comportamiento de las funciones potencia

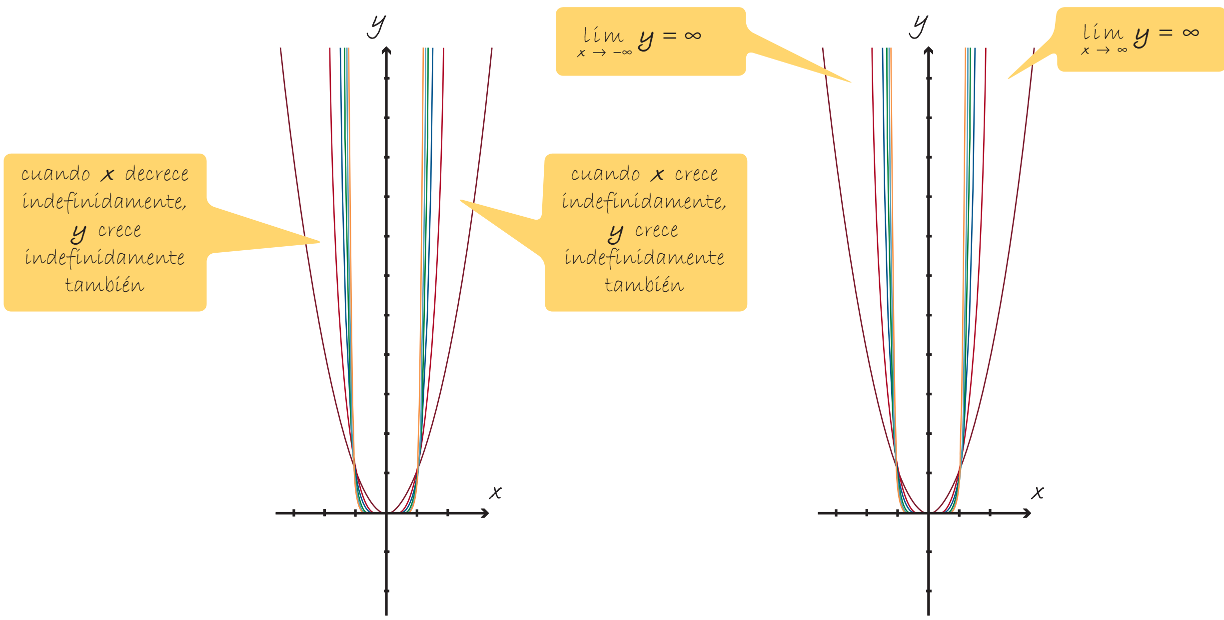
$$y = f(x) = x^n$$

cuando n es par, vistas cada vez un poco más "de lejos".

Caso par



Para el caso de las funciones de grado par tendríamos lo siguiente:



Hablaremos de **límites al infinito** para analizar el comportamiento de la función $y = f(x)$ en valores de x que crecen o decrecen indefinidamente.

El **límite** de y cuando x tiende a **infinito** se refiere a la tendencia de los valores de y cuando x tiende a ∞ y a $-\infty$.

Para el caso de las funciones potencia general tenemos las cuatro manifestaciones del comportamiento al infinito expresadas simbólicamente como

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Este **comportamiento al infinito** es información adicional que vamos a poder agregar en nuestro análisis de la función polinomial

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

aparte de saber sobre sus cortes con el eje x, sus puntos máximos y mínimos y puntos de inflexión. Veremos enseguida cómo trabajar con este caso general.

La estrategia algebraica que ya hemos puesto en acción para detección de máximos, mínimos y puntos de inflexión, contempla el resolver ecuaciones polinomiales de diferentes grados. Esto, aunado al Teorema Fundamental del Álgebra, nos permite, plantear algunas consecuencias importantes que queremos hacer patentes ahora.

Piensa en afirmaciones como las siguientes:

- Una función polinomial de grado 7:
  - puede cortar el eje horizontal máximo en... a lo más... 7 lugares, pero mínimamente lo hace una vez.
  - tiene ... a lo más... 3 máximos y 3 mínimos, pero pudiera no tener ninguno.
  - tiene ... a lo más... 5 puntos de inflexión, pero mínimamente tiene uno.
- Una función polinomial de grado 8:
  - puede cortar el eje horizontal en ... a lo más... 8 lugares, pero pudiera ser que no lo corte nunca.
  - tiene ... a lo más... 7 máximos y mínimos... pero lo menos que podría tener es un máximo o bien un mínimo.
  - tiene ... a lo más 6 puntos de inflexión, pero pudiera no tener ninguno.

Afirmaciones como las anteriores se apoyan en resultados teóricos sobre el número de soluciones reales (racionales, irracionales o complejas) que tiene una ecuación polinomial de grado n, sobre las soluciones imaginarias (o complejas) que aparecen siempre por pares, y sobre el orden de una solución, que puede ser distinto, puede ser orden doble, triple, etcétera.

¡TOMA NOTA!

La palabra
límite
en el lenguaje cotidiano
tiene un significado
de restricción o de
frontera de algo.

¡TOMA NOTA!

La palabra
límite
en el lenguaje matemático
permite analizar
la tendencia
de un
comportamiento
numérico.

¿Sabías que?...

En la teoría formal se conoce como el Teorema Fundamental del Álgebra un hecho que a nuestros ojos pareciera simple:

Toda ecuación algebraica de grado n, con n natural y con coeficientes reales, tiene al menos una raíz y por tanto tiene exactamente n raíces en el conjunto de números complejos.

La importancia radica en que no es necesaria la creación de nuevos números para dar solución a este tipo de ecuaciones. Podríamos decir que con los números complejos $\mathbb{C}$ nos basta...

La primera demostración rigurosa de este teorema la presenta el matemático alemán Gauss en 1801, y tanto le gustaba este teorema que más tarde dio otras dos demostraciones.

De este modo, los cortes con el eje: máximos, mínimos y puntos de inflexión, conforman una información gráfica que incluye un conjunto **finito** de puntos. Es por esto que podemos imaginar y capturar su aparición en la gráfica dentro de una "ventana" lo suficientemente grande como para que el comportamiento de la gráfica fuera de ella, quede evidente a nuestra vista.

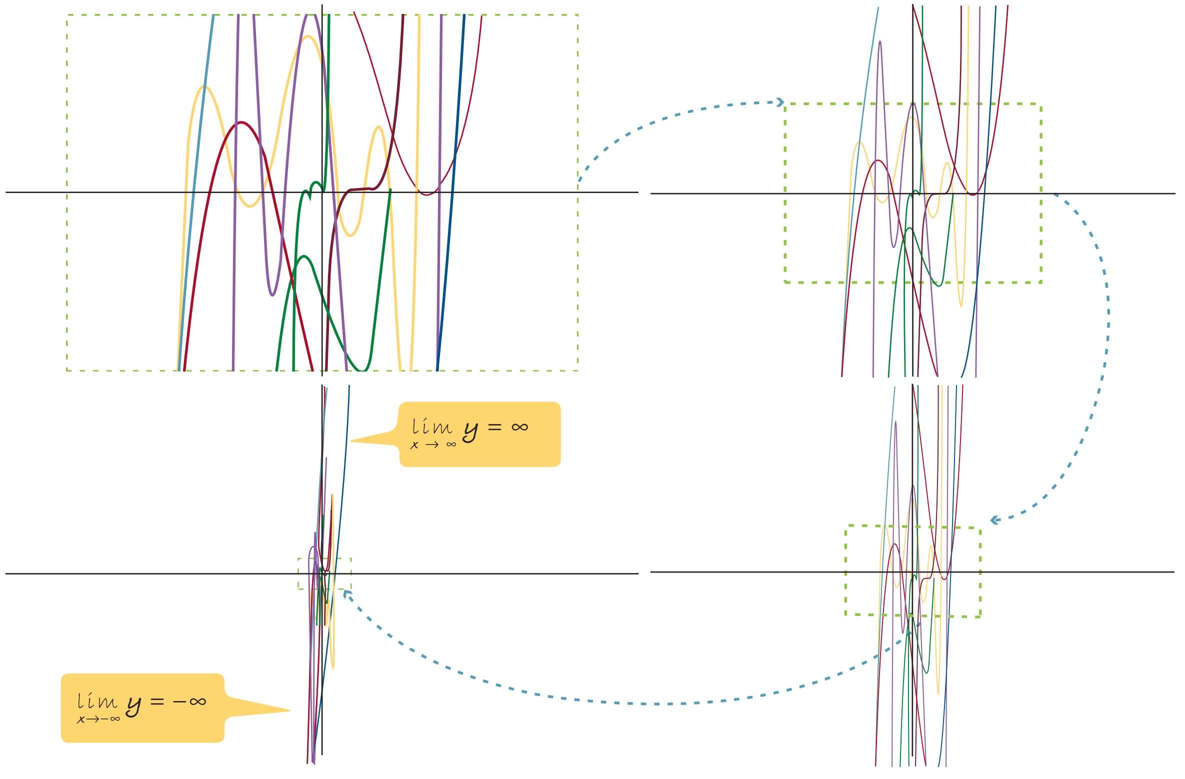
En lo que sigue observarás diferentes funciones polinomiales de grado impar y de grado par por separado. Intentaremos transmitirte visualmente lo que hemos comentado en el párrafo anterior.

Las siguientes secuencias de imágenes las hemos realizado con un software de graficación, introduciendo siete funciones polinomiales que cumplan con la condición expresada como subtítulo de la secuencia y que señala el signo de a_n y la opción del grado n de ser par o impar.

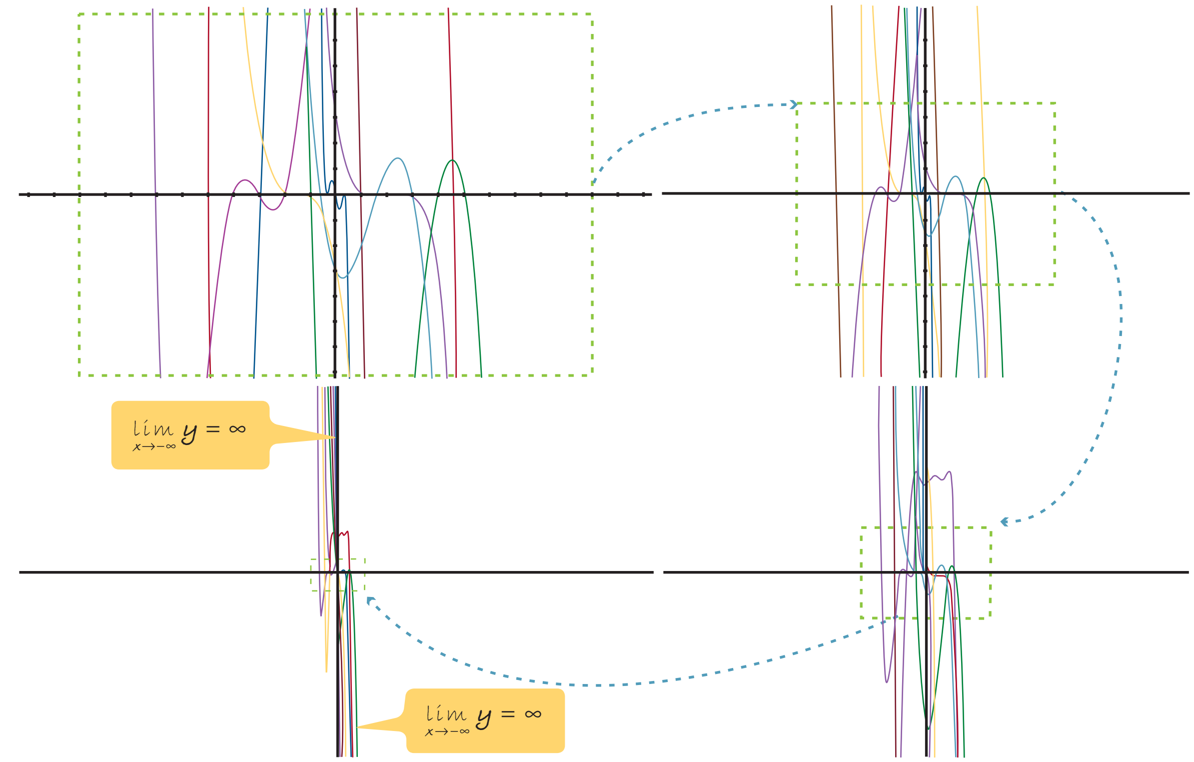
Además, con la ventaja que ofrece el software, hemos podido accionar una instrucción para producir cierto efecto de alejarse, viendo las gráficas cada vez más "de lejos".

La "ventana" punteada señala nuestra intención de **encerrar** los cortes con el eje, máximos y mínimos, así como los puntos de inflexión de cada una de las gráficas. El efecto en las imágenes de estar viendo la ventana (rectángulo punteado) cada vez más pequeña es la consecuencia del **alejamiento**.

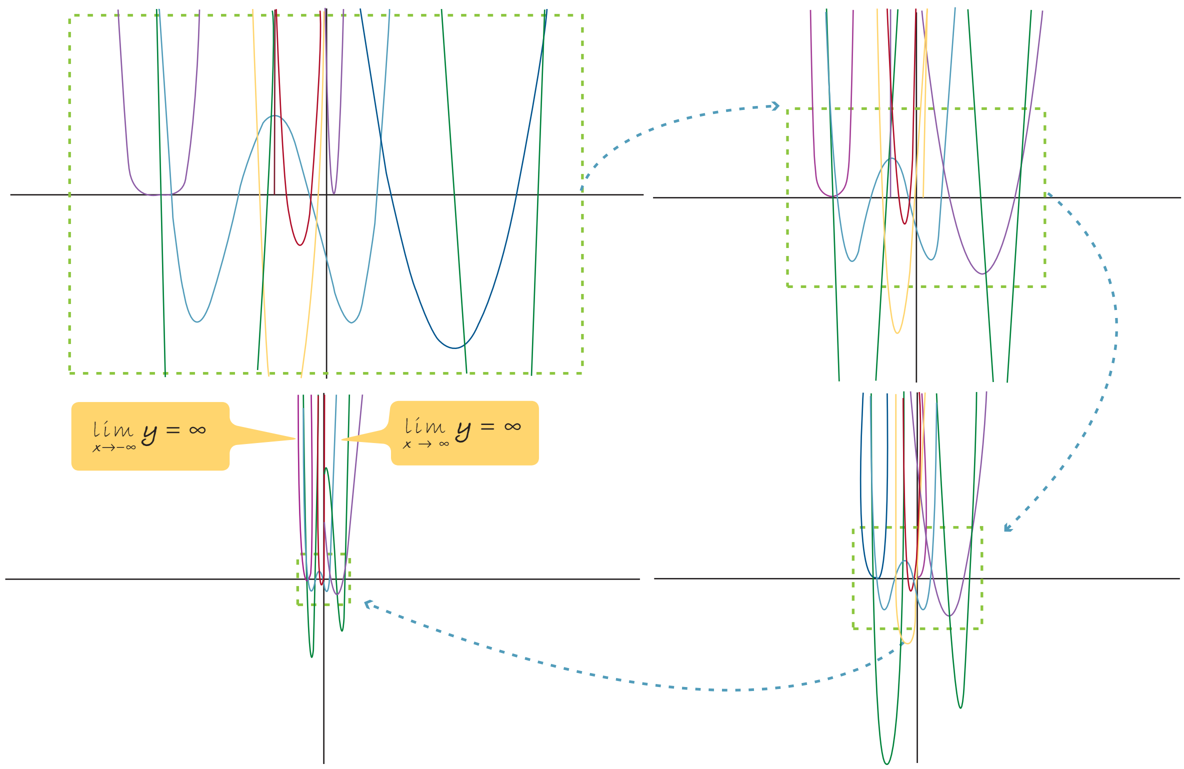
Caso n impar y a_n positivo

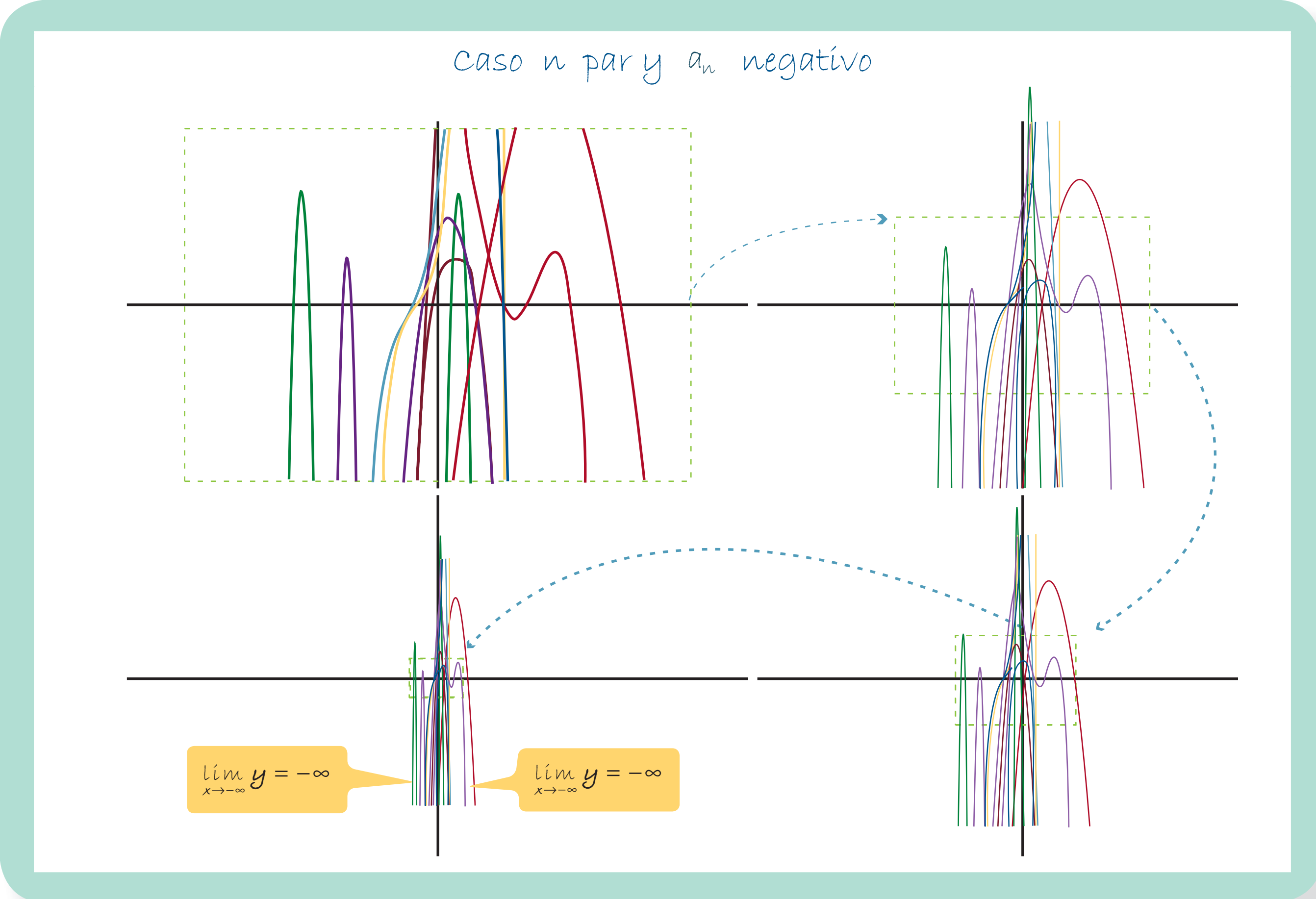


Caso n impar y a_n negativo



Caso n par y a_n positivo





Tomando en cuenta lo anterior, podemos trabajar expresiones generales de funciones polinomiales

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

y realizar el análisis de su **comportamiento al infinito.** Confiando en la certeza de una "ventana" lo suficientemente amplia como para "ver de lejos" la gráfica habiendo encerrado sus cortes, máximos, mínimos y puntos de inflexión, podemos igualar su comportamiento al infinito con el comportamiento al infinito de la función polinomial básica que consiste de sólo el término principal, $y = a_n x^n$.

De este modo, estamos visualizando procedimientos para el cálculo de límites al infinito como sigue:

$$\lim_{x\to\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n,$$

y la respuesta de estos límites resulta ser el símbolo ∞ o $-\infty$ según la tendencia de x a valores positivos o negativos, al signo del coeficiente a_n y al hecho de tener la potencia n par o impar.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} -5x^8+6x-3=\lim_{x\to\infty} -5x^8=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} -7-8x^5+6x^7=\lim_{x\to-\infty} 6x^7=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{50}}{500}-20000=\lim_{x\to\infty} \frac{x^{100}}{100}=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 80+800x^3-8000x^8+x^{10}=\lim_{x\to-\infty} x^{10}=\infty$$

¡TOMA NOTA!

La expresión $2n$ con $n \in \mathbb{N}$ representa a todos los **números pares**… al multiplicar por 2 cualquier número natural se producen todos los pares.
La expresión $2n+1$, con $n \in \mathbb{N}$ representa a todos los **números impares**… ya que estos son siempre… el "siguiente" de un número par.

Calcula los siguientes límites aplicando la técnica que hemos justificado visualmente.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 - 5x^2 - 6x + 8 =$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{3}{5}x^3 + 7x - 10 =$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} -x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 4 =$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{9}{4}x^4 - x^2 =$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x =$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{5}{7}x^5 + x^4 - x^3 + x^2 =$

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{10} + 4x^5 + 20 =$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} x^6 + 6x^3 - 18 =$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{9}x^9 - 10000 =$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} -0.005x^{12} + 500x^3 - 2 =$

11. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^6 - 2x^5 - 3x^4 =$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^{11} - 100x^{10} + 1 =$

13. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{21} + 300000 =$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} -0.1x^{35} + 0.2x^{25} - 0.3x^{15} =$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{10}x^{100} - \frac{1}{20}x^{20} + \frac{1}{40} =$

16. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^{2022} + 2000x^2 + 22 =$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{2n} - x^n + x^2 + 1 =$

18. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^{2n} + x^{2n-1} =$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{2n+1} - x^n + x^2 =$

20. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^{2n+1} - x^{2n} - 1 =$

Respuestas:

1) ∞, 2) ∞, 3) $-\infty$, 4) ∞, 5) $-\infty$, 6) $-\infty$, 7) $-\infty$, 8) ∞, 9) ∞, 10) $-\infty$, 11) ∞, 12) ∞, 13) $-\infty$, 14) $-\infty$, 15) ∞, 16) ∞, 17) ∞, 18) $-\infty$, 19) ∞, 20) ∞.

Otra cara de los polinomios.

Deseamos culminar con este tema presentándote "otra cara" de las funciones polinomiales, una que expresa algebraicamente la estrecha relación que existe entre la función y sus sucesivas derivadas. Para mostrártela, te proponemos que sigas la secuencia enseguida, que estará aplicada a una función polinomial concreta, de grado cinco.

Partimos de la función:

$$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 10x - 5$$

Evaluamos $f(0)$:

$$f(0) = -5$$

Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3 + 6x^2 - 6x + 10$$

Evaluamos $f'(0)$:

$$f'(0) = 10$$

Dividimos $f'(0)$ entre 1! :

$$\frac{f'(0)}{1!} = \frac{10}{1!} = \frac{10}{1} = 10$$

Calculamos $f''(x)$:

$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 + 12x - 6$$

Evaluamos $f''(0)$:

$$f''(0) = -6$$

Dividimos $f''(0)$ entre 2! :

$$\frac{f''(0)}{2!} = -\frac{6}{2!} = -\frac{6}{2} = -3$$

Calculamos $f'''(x)$:

$$f'''(x) = 180x^2 - 120x + 12$$

Evaluamos $f'''(0)$:

$$f'''(0) = 12$$

Dividimos $f'''(0)$ entre 3! :

$$\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{12}{3!} = \frac{12}{6} = 2$$

Calculamos $f^{(4)}(x)$:

$$f^{(4)}(x) = 360x - 120$$

Evaluamos $f^{(4)}(0)$:

$$f^{(4)}(0) = -120$$

Dividimos $f^{(4)}(0)$ entre 4!:

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{120}{4!} = -\frac{120}{24} = -5$$

Calculamos $f^{(5)}(x)$:

$$f^{(5)}(x) = 360$$

Evaluamos $f^{(5)}(0)$:

$$f^{(5)}(0) = 360$$

Dividimos $f^{(5)}(0)$ entre 5!:

$$\frac{f^{5}(0)}{5!} = \frac{360}{5!} = \frac{360}{120} = 3$$

Notarás que las derivadas sucesivas, después de la quinta ya son todas iguales a 0.

¡Ya acabamos!

¡Toma nota!

En el lenguaje coloquial el símbolo "!" expresa admiración... ¡ah! Pero en Matemáticas, se lee "factorial". Decir 3! significa multiplicar los números naturales que preceden al 3, incluyéndolo:

$3! = (3)(2)(1) = 6$

Otro ejemplo:

$7! = (7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 5040$

¡Toma nota!

Para denotar a las derivadas sucesivas de una función... se acostumbra utilizar números, pero dentro de un paréntesis. De este modo encontrarás:

$f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}, f^{(7)}$

para las derivadas superiores de orden 1 a 7 de $f(x)$.

Observa ahora los resultados numéricos de las acciones realizadas:

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = 3 \qquad \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -5 \qquad \frac{f^{3}(0)}{3!} = 2$$

$$\frac{f^{2}(0)}{2!} = -3 \qquad \frac{f^{(1)}(0)}{1!} = 10 \qquad f(0) = -5$$

Observa nuevamente la función polinomial de la cual partimos

$$y = f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 10x - 5$$

Si pones atención a sus coeficientes reconocerás que

$$f(x) = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + f(0).$$

Y si aceptas la notación matemática para

$$0! = 1 \quad \text{y} \quad f(0) = f^{0}(0)$$

podrás reconocer a la función polinomial en la forma

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{5} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 10x - 5\,,$$

definitivamente esta es "otra cara" de la función.

No se trata de una casualidad, sino de un hecho contundente en la teoría del Cálculo; las funciones con las que hemos estado trabajando son así, llevan la herencia de su comportamiento en sus mismos coeficientes.

Te invitamos a probar este hecho con la función polinomial que inventes en este momento... ¡te tiene que resultar!

1.6 Valor Exacto del Cambio Acumulado: Modelo Exponencial

En este tema se introduce un modelo matemático distinto en respuesta a la problemática de predicción que nos ocupa, en correspondencia con un contexto real donde el modelo polinomial ya no resulta adecuado para su análisis. Las condiciones que plantea el contexto real permitirán remarcar la importancia de acceder a procesos infinitos que, a su vez, se convierten en objeto de estudio para la teoría del Cálculo. El procedimiento numérico que se ha implementado con uso de tecnología vendrá nuevamente a ser la ocasión para analizar la situación problema que será planteada como eje en este tema, y nuevamente, su solución se verá acompañada de resultados que introducen al Cálculo como la rama de la Matemática que estudia el cambio y la variación. Una vez que el modelo exponencial sea generado, nuevas formas de representación algebraica aparecen en el lenguaje matemático y su manipulación correcta será considerada para el desarrollo de la competencia de uso del lenguaje simbólico en el planteo y solución de problemas.

Situación Problema 1.6

Cuando se coloca un cultivo de bacterias en un medio sin limitaciones de recursos, ni interacciones con otras especies, y sin factores que pongan en riesgo su existencia, el tamaño del cultivo hipotéticamente va siempre en aumento.

Sea $M(t)$ la masa del cultivo en el tiempo t, medido en días, y sea $M(0) = M_0$ la masa inicial, medida en gramos.

El contexto real planteado requiere el análisis de la forma en que crece la magnitud de interés, la masa del cultivo. Al respecto, no resulta inesperado pensar que la razón de cambio de M depende de la misma cantidad M. Estamos ante un caso en donde la razón de cambio $M'(t)$ de la masa con respecto al tiempo es **proporcional** a la masa misma, esto es:

$$M'(t) = kM(t) \quad \text{gramos/día}$$

con k una constante numérica.

a) Argumenta por qué el modelo polinomial no es un modelo matemático adecuado a esta situación.

La expresión que muestra la relación entre la magnitud y su razón de cambio, a saber $M'(t) = kM(t)$ *asegura que un modelo polinomial no satisface dicha condición porque la derivada de una función polinomial de grado* n, *es una función polinomial de grado* n-1.

b) Para analizar el comportamiento de la magnitud M y asociarle un modelo matemático, consideraremos primeramente el caso más simple en la expresión de proporcionalidad entre la masa y su razón de cambio: cuando $k = 1$ y se tiene la igualdad

$$M'(t) = M(t)$$

Aproxima la masa del cultivo en el quinto día cumplido, considerando que $M_0 = 1$ gramo y $k = 1$ Considera además intervalos de tiempo de $\Delta t = 1$ y elige siempre el extremo izquierdo de cada subintervalo para fijar el valor de la razón de cambio constante. Razona numérica y gráficamente sobre el procedimiento de aproximación realizado.

Haremos uso del procedimiento numérico que hemos empleado ya en el caso del modelo polinomial, donde consideraremos que la razón de cambio de la magnitud se mantenga constante en cada subintervalo de división del tiempo de cinco días.

Para $\Delta t = 1$ *día, tenemos cinco subintervalos:* $[0,1]$ $[1,2]$ $[2,3]$ $[3,4]$ *y* $[4,5]$ *que representan los* 5 *días transcurridos. En cada uno de ellos consideramos que la razón de cambio se mantenga constante e igual al valor de la misma asignado según el extremo izquierdo de cada subintervalo:* $M'(0)$, $M'(1)$, $M'(2)$, $M'(3)$ *y* $M'(4)$... *observa que este último valor se mantiene desde* $t = 4$ *hasta acabar en* $t = 5$.

En el arreglo que haremos en una hoja de cálculo los subintervalos deben entenderse entre renglón y renglón:

aquí $M(0) = 1$

aquí $M(1) \approx M(0) + M'(0)\,\Delta t$

	t	$M(t) = M'(t)$	$M'(t)\,\Delta t$	Δt
$[0, 1]$	0	1	1	1
$[1, 2]$	1	2	2	
$[2, 3]$	2	4	4	
$[3, 4]$	3	8	8	
$[4, 5]$	4	16	16	
	5	32		

Observamos que la segunda columna va generando los valores aproximados consecutivos de la magnitud $M(t)$ *renglón a renglón. El primero de estos es* $M(0) = 1$ *que es el dato inicial de la cantidad de masa* $M_0 = 1$ *También se usa este como el valor de la razón de cambio constante para el intervalo* $[0,1]$ *ya que* $M'(t) = M(t)$.

En el segundo renglón se genera $M(1) \approx 2$ *al utilizar el hecho fundamental de que*

$$M(1) \approx M(0) + M'(0)\,\Delta t = 2$$

A su vez, este valor se usa como el valor de la razón de cambio constante para el intervalo $[1,2]$ *y con él se genera el tercer renglón* $M(2) \approx 4$ *al utilizar el hecho de que*

$$M(2) \approx M(1) + M'(1)\,\Delta t = 4$$

De nueva cuenta este último valor se usa como el valor de la razón de cambio constante para el intervalo $[2,3]$ *y con él se genera el cuarto renglón* $M(3) \approx 8$ *al utilizar el hecho de que*

$$M(3) \approx M(2) + M'(2)\,\Delta t = 8$$

Tomando este último como el nuevo dato de la razón de cambio, se genera el valor de

$$M(4) \approx M(3) + M'(3)\,\Delta t = 16$$

y finalmente con este último valor considerado como $M'(4) \approx 16$ *se genera el valor buscado a los* 5 *días:*

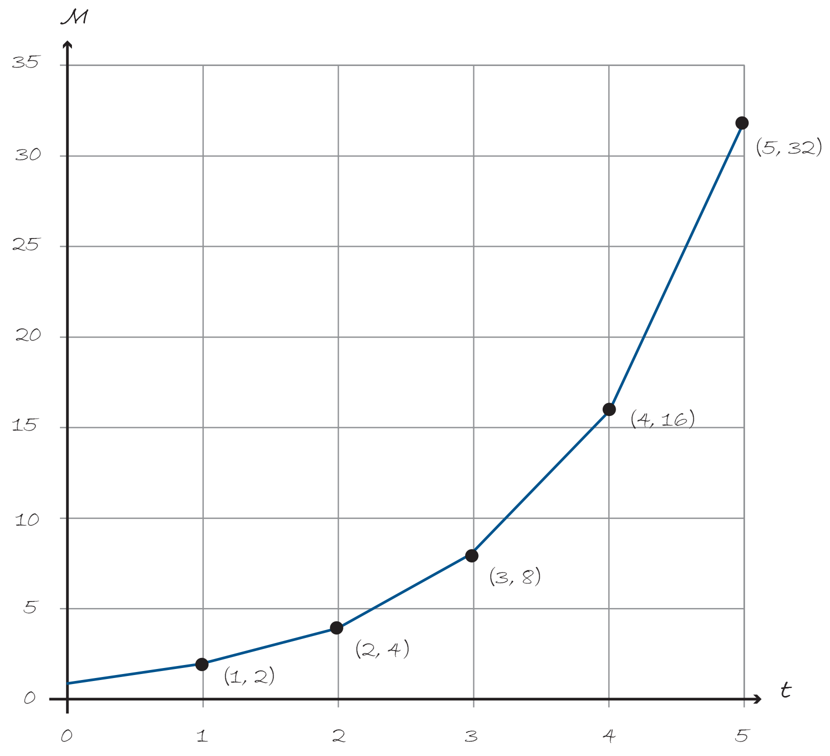
$$M(5) \approx M(4) + M'(4)\,\Delta t = 32$$

La primera aproximación de la masa de bacterias, habiendo transcurrido 5 *días, es de* 32 *gramos.*

Reflexionando sobre el valor numérico obtenido podemos argumentar que como la masa está en aumento, y su razón de cambio es numéricamente igual a ella, entonces cada vez que elegimos el extremo izquierdo del subintervalo para asignar el valor constante de la razón de cambio, estamos eligiendo un valor ***menor*** *del que realmente se tiene en cada instante contenido en ese subintervalo.*

Por eso podemos asegurar que la aproximación de la masa de bacterias que hemos obtenido, 32 *gramos, es* ***menor*** *que el valor real de la masa a los* 5 *días transcurridos.*

Aún y cuando las operaciones las realicemos con calculadora, una ventaja de utilizar la hoja de cálculo en computadora es que podemos interactuar con ella pidiendo una gráfica que represente automáticamente lo que la tabla numérica nos presenta. El hecho de considerar la razón de cambio constante en cada subintervalo se corresponde en la gráfica con la unión de los puntos consecutivos por medio de segmentos de recta. De este modo, lo que se obtiene es una línea quebrada que une los puntos $(t,\ M(t))$ *para* $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *y* 5*, donde la segunda coordenada representa el valor aproximado de la masa de cultivo a los* t *días transcurridos.*



c) Obtén una mejor aproximación para la masa en el quinto día transcurrido pero ahora considerando subintervalos de tiempo de $\Delta t = 0.1 = \frac{1}{10}$ de día. Utiliza el recurso tecnológico de la hoja de cálculo que permita además obtener la gráfica que una los puntos consecutivos obtenidos con segmentos de recta.

Procedemos a mejorar la aproximación utilizando la hoja de cálculo haciendo el cambio de $\Delta t = 0.1$ y accionando las fórmulas previamente introducidas hasta generar los renglones para llegar al valor de $t = 5$ días.

En esta ocasión obtenemos una tabla de 50 renglones, donde nuevamente cada celda en la segunda columna se obtiene de la celda anterior, al agregarle al valor aproximado de $M(t)$ en esa celda, el valor aproximado del cambio acumulado en el subintervalo, y que se tiene calculado en la tercera columna. Observa la tabla y lo que en ella te indicamos para evocar el proceso numérico.

t	$M(t) = M'(t)$	$M'(t)\Delta t$	Δt
0.0	1.000	0.100	0.1
0.1	1.100	0.110	
0.2	1.210	0.121	
0.3	1.331	0.133	
0.4	1.464	0.146	
0.5	1.611	0.161	
0.6	1.772	0.177	
0.7	1.949	0.195	
0.8	2.144	0.214	
0.9	2.358	0.236	
1.0	**2.594**	0.259	
1.1	2.853	0.285	
1.2	3.138	0.314	
1.3	3.452	0.345	
1.4	3.797	0.380	
1.5	4.177	0.418	
1.6	4.595	0.459	
1.7	5.054	0.505	
1.8	5.560	0.556	
1.9	6.116	0.612	
2.0	**6.727**	0.673	
2.1	7.400	0.740	
2.2	8.140	0.814	
2.3	8.954	0.895	
2.4	9.850	0.985	
2.5	10.835	1.083	
2.6	11.918	1.192	
2.7	13.110	1.311	
2.8	14.421	1.442	
2.9	15.863	1.586	

$1.949 = 1.772 + 0.177$
$M(0.7) \approx M(0.6) + M'(0.6)\,\Delta t$
$M(0.7) \approx 1.949$

$6.727 \approx 6.116 + 0.612$
$M(2) \approx M(1.9) + M'(1.9)\,\Delta t$
$M(2) \approx 6.727$

$30.913 \approx 28.102 + 2.810$
$M(3.6) \approx M(3.5) + M'(3.5)\,\Delta t$
$M(3.6) \approx 30.913$

$117.391 \approx 106.719 + 10.672$
$M(5) \approx M(4.9) + M'(4.9)\,\Delta t$
$M(5) \approx 117.391$

t	$M(t) = M'(t)$	$M'(t)\Delta t$	Δt
3.0	**17.449**	1.745	
3.1	19.194	1.919	
3.2	21.114	2.111	
3.3	23.225	2.323	
3.4	25.548	2.555	
3.5	28.102	2.810	
3.6	30.913	3.091	
3.7	34.004	3.400	
3.8	37.404	3.740	
3.9	41.145	4.114	
4.0	**45.259**	4.526	
4.1	49.785	4.979	
4.2	54.764	5.476	
4.3	60.240	6.024	
4.4	66.264	6.626	
4.5	72.890	7.289	
4.6	80.180	8.018	
4.7	88.197	8.820	
4.8	97.017	9.702	
4.9	106.719	10.672	
5.0	**117.391**		

Nota. En la tabla encuentras celdas con los números en un tono mostaza en las que el cálculo de $M(t)$ *no resulta exactamente igual a la suma de los números en las dos celdas del renglón anterior. Esta es una consecuencia del número de decimales que se usa en las aproximaciones, algo que debemos esperar al utilizar los recursos computacionales. No obstante, observa las celdas donde te explicitamos las operaciones numéricas que se están realizando, algunas sí resultan exactas y otras no.*

La segunda aproximación de la masa de bacterias al haber transcurrido 5 *días es de* 117.4 *gramos. Era de esperarse que este valor fuese mayor que el obtenido anteriormente, pues se acerca más al valor exacto; pero nuevamente la aproximación sigue siendo menor que este último.*

Observarás que, en general, podemos expresar la relación entre las celdas consecutivas de la columna para $M(t)$ *como*

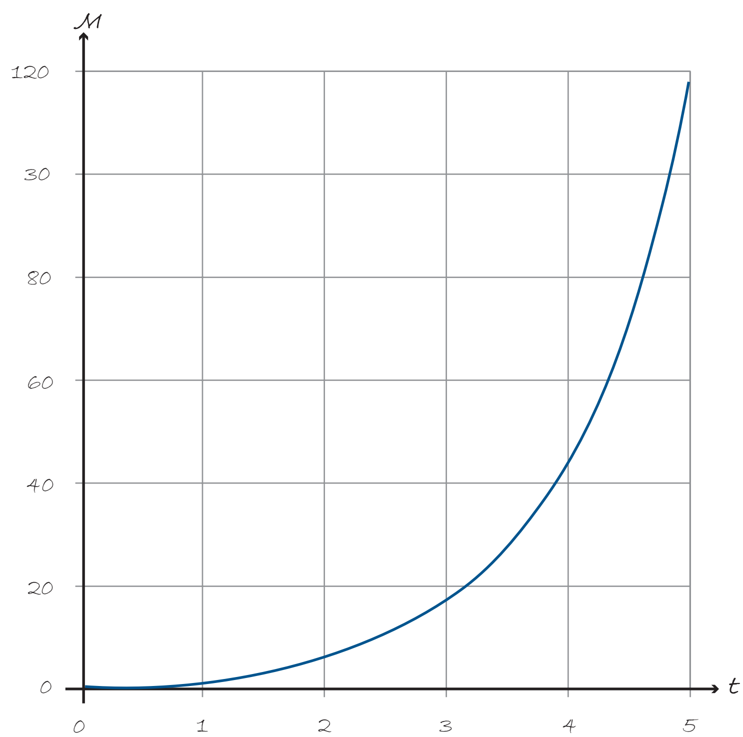
$$M\left(t_{final}\right) = M\left(t_{inicial}\right) + \Delta M\left[t_{inicial},\ t_{final}\right]$$

$$M\left(t_f\right) \approx M\left(t_i\right) + M'\left(t_i\right)\Delta t$$

donde en la última expresión estamos usando los subíndices i para señalar "inicial" y f para señalar "final". Observa que la igualdad se convierte en "pseudo igualdad" (aproximación) porque estamos aproximando el cambio de la magnitud, en el intervalo, $\Delta M\left[t_i, t_f\right]$ *mediante el cálculo de* $M'\left(t_i\right)\Delta t$ *donde se ha supuesto que el valor de la razón de cambio* $M'\left(t_i\right)$ *se mantiene constante en todo el intervalo* $\left[t_i, t_f\right]$.

Podemos entresacar en la tabla nuevos valores aproximados para la masa a los 1, 2, 3, 4 *y* 5 *días transcurridos, los que hemos señalado resaltando la celda completa en tono mostaza. Pero es preferible que aprovechemos los* 50 *cálculos hechos por el recurso tecnológico y produzcamos con él una gráfica de los* 50 *puntos unidos por segmentos de recta, manifestando con esto nuestro conocimiento de un cambio uniforme en cada uno de los* 50 *subintervalos, y esto debido a haber mantenido la razón de cambio constante en ellos.*

Al utilizar el recurso de la hoja de cálculo obtenemos una gráfica como la siguiente.



Notarás que la cantidad de segmentos rectos es prácticamente imperceptible. Este es un efecto visual que debemos considerar en la graficación; esta última es una práctica que tenemos "a la mano" hoy en día gracias a estos recursos tecnológicos... los puntos consecutivos están tan cercanos en la imagen que no podemos distinguir su unión y se percibe prácticamente una curva en vez de una línea quebrada de 50 *piezas.*

d) Obtén una mejora de la aproximación de la masa al quinto día utilizando intervalos de tiempo de $\Delta t = 0.01 = \frac{1}{100}$ de día. Grafica los puntos $(t, M(t))$ obtenidos y mejora la imagen visual del comportamiento de la masa en el tiempo.

Con la ventaja de la hoja de cálculo es sencillo mejorar la aproximación. Enseguida presentamos "pedazos" de la tabla generada donde captamos nuevos valores alrededor de los números naturales del 1 *al* 5.

Elegimos algunas celdas para ilustrar algebraicamente las operaciones numéricas que realiza el recurso tecnológico. Observa las igualdades y seudo igualdades a la derecha de cada "pedazo" copiado del archivo electrónico.

t	$M(t) = M'(t)$	$M'(t)\Delta t$	Δt
0.00	1.00000	0.01000	0.01
0.01	1.01000	0.01010	
0.02	1.02010	0.01020	

0.98	2.65152	0.02652
0.99	2.67803	0.02678
1.00	**2.70481**	0.02705
1.01	2.73186	0.02732
1.02	2.75918	0.02759

$M(1.01) = M(1) + \Delta M[1, 1.01]$
$M(1.01) \approx M(1) + M'(1)\,\Delta t$

$M(4) = M(3.99) + \Delta M[3.99, 4]$
$M(4) \approx M(3.99) + M'(3.99)\,\Delta t$

3.98	52.46948	0.52469
3.99	52.99418	0.52994
4.00	**53.52412**	0.53524
4.01	54.05936	0.54059
4.02	54.59995	0.54600

1.98	7.17186	0.07172
1.99	7.24358	0.07244
2.00	**7.31602**	0.07316
2.01	7.38918	0.07389
2.02	7.46307	0.07463

$M(2) = M(1.99) + \Delta M[1.99, 2]$
$M(2) \approx M(1.99) + M'(1.99)\,\Delta t$

4.98	141.92018	1.41920
4.99	143.33938	1.43339
5.00	**144.77277**	

$M(5) = M(4.99) + \Delta M[4.99, 5]$
$M(5) \approx M(4.99) + M'(4.99)\,\Delta t$

2.98	19.39856	0.19399
2.99	19.59254	0.19593
3.00	**19.78847**	0.19788
3.01	19.98635	0.19986
3.02	20.18621	0.20186

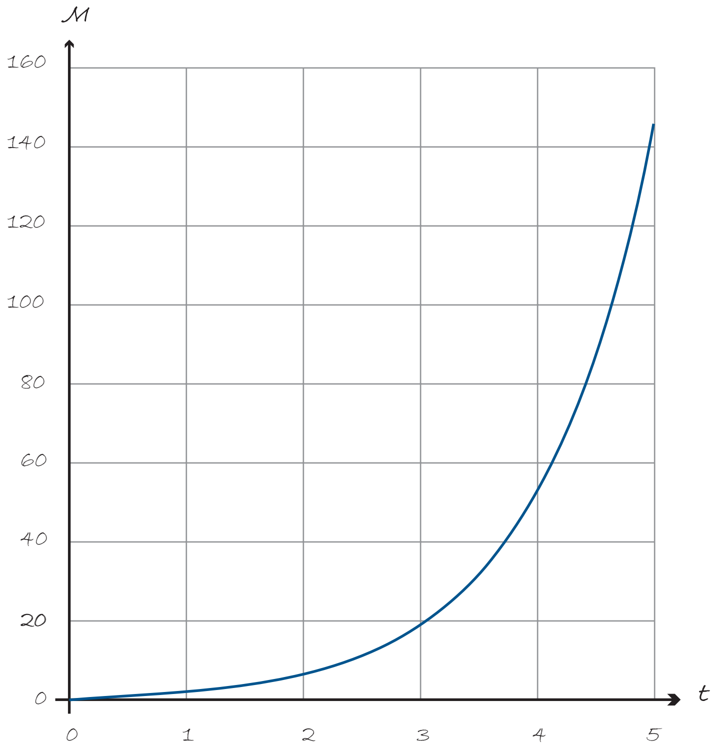
$M(2.99) = M(2.98) + \Delta M[2.98, 2.99]$
$M(2.99) \approx M(2.98) + M'(2.98)\,\Delta t$

El nuevo valor de la aproximación de la masa a los 5 días transcurridos es 144.773 gramos; necesariamente mayor que el de la aproximación anterior, y aún manteniéndose menor que el valor exacto.

La gráfica que obtenemos con el recurso tecnológico representa la unión con segmentos de recta de 500 puntos $(t, M(t))$ generados. Es evidente el comportamiento de una curva "suave" que es creciente y cóncava hacia arriba manifestando lo que el contexto real nos presenta: un crecimiento de la masa cada vez más rápido.

Sin embargo, ya sabemos que la función que estamos buscando no puede ser modelada exactamente por una función polinomial...

¿Cuál será entonces la "fórmula" de esta curva?



Generalización a partir de la situación problema 1.6.

Construcción del modelo exponencial en base e.

En este apartado realizaremos el análisis de la situación problema 1.6 para generar resultados sobre el nuevo modelo matemático que está siendo necesario construir para estudiar contextos reales como el crecimiento poblacional, el crecimiento de capital, y la desintegración radioactiva.

Estas situaciones tienen la particularidad de involucrar magnitudes cuyo "ritmo" de crecimiento (razón de cambio o derivada) en un tiempo t, es proporcional al valor mismo de la magnitud en ese tiempo. Interesa predecir valores de magnitudes como la cantidad de población, la cantidad de capital, y la cantidad de masa del material radioactivo.

Para abordar la situación de manera general digamos que $y(t)$ representa a la magnitud de interés en el tiempo t, y que $y'(t)$ es su derivada; entonces, la relación de proporcionalidad entre $y'(t)$ y $y(t)$ la podemos expresar de la siguiente manera:

$$y'(t) = k\,y(t)$$

donde la constante k tiene un significado específico, según sea el fenómeno de que se trate; puede referirse a la tasa de crecimiento poblacional, la tasa de interés o la tasa de descomposición radioactiva en nuestros contextos.

El procedimiento numérico que hemos estado aplicando nos permite obtener valores aproximados de la magnitud de interés. Para ello ha sido necesario contar con un valor inicial de y, digamos $y(0) = y_0$ que representa, según sea el contexto particular, el dato de población inicial, o el capital inicial, o la cantidad inicial de masa. A partir de la información del valor y_0 y la ecuación que expresa la proporcionalidad entre la magnitud y su razón de cambio,

$$y'(t) = k\,y(t)$$

hemos obtenido sucesivos valores aproximados de la magnitud y con la ayuda de un recurso tecnológico como la hoja de cálculo, donde implementamos sin dificultades el procedimiento numérico.

Ahora buscamos construir la fórmula para $y(t)$ es decir, buscamos su representación algebraica. Para lograrlo debemos aplicar el procedimiento pero de una manera simbólica; no generaremos valores numéricos, sino expresiones algebraicas en las cuales nos propondremos observar cierta regularidad de tal modo que podamos inferir la fórmula para $y(t)$.

Para concretar este propósito consideremos en un contexto formal (ausente de significado) la situación problema siguiente:

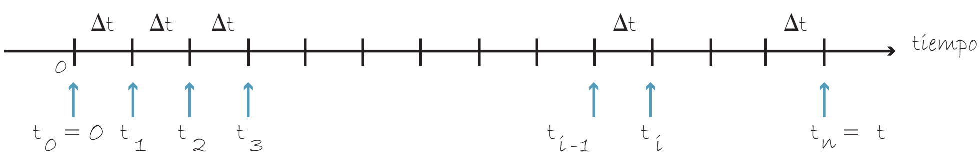
Situación Problema Adicional

Construir un modelo matemático para la magnitud y que cumple con la condición inicial $y(0) = y_0$ y con la ecuación diferencial $y'(t) = y(t)$ (lo cual corresponde al caso en que $k = 1$ en la ecuación $y'(t) = k\,y(t)$

Nuestro ***primer propósito*** *en esa dirección:*

Obtener un ***valor aproximado*** *de la magnitud* $y(t)$ *a partir de la información anterior y utilizando simbólicamente el procedimiento numérico ya practicado.*

Iniciemos subdividiendo el intervalo de 0 *a* t *en* n *subintervalos de igual longitud, por tanto,* $\Delta t = \dfrac{t}{n}$



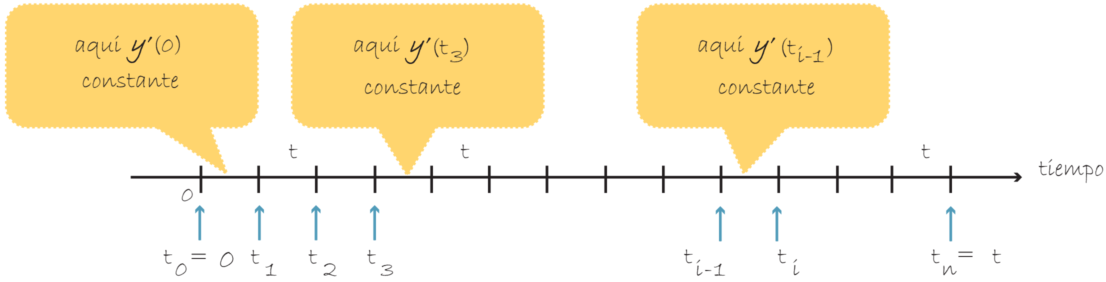
¡TOMA NOTA!

Una **ecuación diferencial** es una ecuación... que incluye **derivadas.**

¡TOMA NOTA!

Así como en la ecuación $x^2 - 1 = 0$ la solución son los números $x = \pm 1$ que la satisfacen... en la ecuación diferencial $y'(t) = k\,y(t)$ la solución es la fórmula de la función $y(t)$ que satisface la ecuación.

En cada uno de los n subintervalos consideraremos la razón de cambio constante e igual al valor de ésta en el extremo izquierdo del subintervalo.



En la siguiente tabla indicamos las operaciones que introdujimos al recurso tecnológico y las realizamos dejándolas expresadas en forma algebraica. Observa que cada celda de la segunda columna representa un valor aproximado de la magnitud $y(t)$ el cual se calcula al sumar las dos celdas superiores, la de la segunda columna, que señala el valor anterior de la magnitud (que ahora se vuelve el inicial) más la aproximación del cambio de la magnitud en el intervalo en consideración y que se calcula en la tercera columna. Sigue el orden de las flechas en la tabla para que compruebes la aplicación del procedimiento y verifiques las operaciones algebraicas de factorización que deben realizarse.

valor de la magnitud = razón de cambio de la magnitud

aproximación del cambio

t	$y(t) = y'(t)$	$\Delta y \approx y'(t)\Delta t$	Δt
0	y_0	$y_0 \Delta t$	$\frac{t}{n}$
t_1	$y_0 + y_0 \Delta t$ $= y_0(1+\Delta t)$	$y_0(1+\Delta t)\Delta t$	
t_2	$y_0(1+\Delta t) + y_0(1+\Delta t)\Delta t$ $= y_0(1+\Delta t)(1+\Delta t)$ $= y_0(1+\Delta t)^2$	$y_0(1+\Delta t)^2\,\Delta t$	
t_3	$y_0(1+\Delta t)^2 + y_0(1+\Delta t)^2\,\Delta t$ $= y_0(1+\Delta t)^2(1+\Delta t)$ $= y_0(1+\Delta t)^3$	$y_0(1+\Delta t)^3\,\Delta t$	
t_4	$y_0(1+\Delta t)^3 + y_0(1+\Delta t)^3\,\Delta t$ $= y_0(1+\Delta t)^3(1+\Delta t)$ $= y_0(1+\Delta t)^4$	$y_0(1+\Delta t)^4\,\Delta t$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
t_{n-1}	$y_0(1+\Delta t)^{n-1}$	$y_0(1+\Delta t)^{n-1}\,\Delta t$	
$t_n = t$	$y_0(1+\Delta t)^n$		

¡TOMA NOTA!

Esto es factorizar:

$$a + ac = a(1+c)$$
$$ab + abc = ab(1+c)$$
$$ab^2 + ab^2c = ab^2(1+c)$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$ab^n + ab^nc = ab^n(1+c)$$

¡TOMA NOTA!

Esto es factorizar:

$$y_0(1+\Delta t) + y_0(1+\Delta t)\Delta t$$
$$= y_0(1+\Delta t) + y_0(1+\Delta t)\Delta t$$
$$= y_0(1+\Delta t)1 + y_0(1+\Delta t)\Delta t$$
$$= y_0(1+\Delta t)(1+\Delta t)$$
$$= y_0(1+\Delta t)\,(1+\Delta t)$$
$$= y_0(1+\Delta t)^2$$

Al momento, habiendo seguido el procedimiento expresado en forma algebraica en la tabla, contamos con la aproximación del valor de la magnitud en la expresión:

$$y(t) \approx y_0 (1 + \Delta t)^n$$

y nuestro primer propósito está cumplido. Pero... ¿cómo llegar al valor exacto?

Nuestro **segundo propósito:**

Manipular algebraicamente la aproximación obtenida y establecer la igualdad con $y(t)$ en términos matemáticos y de modo tal que quede expresada sólo en función del valor de t, que si bien es un valor fijo, a su vez, es un valor arbitrario.

Es entendible que en orden de arribar eventualmente al cálculo del valor exacto, optemos por simplificar la expresión matemática y ayudarnos así a visualizar una estrategia adecuada para seguir.

Recordando que:

$$\Delta t = \frac{t}{n}$$

sustituimos esto en la expresión que aproxima a $y(t)$

$$y_0 (1 + \Delta t)^n = y_0 \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

Analicemos esta última expresión; estarás de acuerdo en que para lograr llegar al valor exacto necesitamos hacer que el valor de n sea cada vez mayor, produciendo una mayor cantidad de subintervalos. Observa que a medida que n crece, esto es $n \to \infty$ con $n \in \mathbb{N}$, tenemos que la cantidad $\Delta t = \frac{t}{n}$ tiende a cero, luego es equivalente decir $\Delta t \to 0$ que $n \to \infty$

Para establecer la igualdad con $y(t)$ lo hacemos en términos del proceso de límite porque buscamos la tendencia en el comportamiento de los valores numéricos cuando $\Delta t \to 0$ o $n \to \infty$

$$y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} y_0 (1 + \Delta t)^n = \lim_{n \to \infty} y_0 \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

La expresión de $y(t)$ está definida matemáticamente, pero tenemos un nuevo problema porque no se trata de una "fórmula" que podamos manipular de manera simple.

En el afán de esclarecer la fórmula de $y(t)$ deberemos precisar el valor del **límite**, esto es, debemos reconocer la tendencia numérica de la expresión:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

cuando n crece indefinidamente en los números naturales y para cada valor de t, por lo pronto, positivo.

¡TOMA NOTA!

La toma de decisiones correctas hace uso del razonamiento que va más allá de lo inmediato, planteando en el presente aquél futuro que se busca alcanzar. Las **matemáticas** son así...

¡TOMA NOTA!

La palabra **inferir** en el lenguaje cotidiano da la idea de sacar una consecuencia o concluir un resultado. Y en Matemáticas... ¡también!

*Nuestro **tercer propósito:***

Discernir qué pasa con esos valores numéricos, cada vez que un valor de t esté fijo. Consideremos la expresión:

$$y_0\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$$

y pensemos primeramente en el valor al que tiende cuando $t = 1$ De esta forma, tenemos que:

y_0 *no depende del límite*

$$y(1) = \lim_{n\to\infty} y_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = y_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Vale la pena que te des un momento para pensar detenidamente en la expresión:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

y te preguntes: ¿qué valor numérico se estará representando con ella?... ¿lo tienes?

La respuesta inmediata puede ser el 1, esa es la más común, pero no te confíes, enseguida haremos un análisis del comportamiento numérico representado... puedes esperar algunas sorpresas.

Primeramente utilicemos nuestro recurso computacional de la hoja de cálculo para realizar operaciones con diferentes valores de n. Generemos una tabla con los valores de n en la columna izquierda, y en la columna derecha los valores de la expresión por analizar. De la tabla que te presentamos en la siguiente página,es posible observar cierta tendencia en los sucesivos números

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

cuando n es un número cada vez más y más grande. Fíjate en el comportamiento de estos números en la columna B y observa que no se acercan a 1 y tampoco dejan la impresión de estar creciendo indefinidamente... aunque crecen.

¡TOMA NOTA!

Cuando usamos en el lenguaje simbólico

$\lim\limits_{n\to\infty} \boxed{\text{algo}}$

se trata de **inferir** la **tendencia** de los valores numéricos... ¿a dónde se acercan?

¡TOMA NOTA!

No creas que la **intuición** la desarrollamos siempre con un buen **fundamento.**

¡TOMA NOTA!

Si $n \to \infty \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{n} \to 0$

$\Rightarrow\; 1+\dfrac{1}{n} \to 1$

$\Rightarrow\; \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to 1$

¡ES FALSO!

¡Toma nota!

En la educación básica
conocimos la letra
e
como la segunda vocal...
y ahora, además de eso,
¡es un número!
... y uno muy especial...

¡Toma nota!

Si usaste
la hoja de cálculo y
"arrastras" lo suficiente
las columnas...
verás que llega el momento
en que el número es 1...
¡Cuidado con las
limitaciones de los
recursos computacionales!

¡Toma nota!

Con el proceso numérico
que hemos analizado
el número
de Euler recibe su:
"carta de ciudadanía"
en los números reales:
$e \in \mathbb{R}$

¡Toma nota!

e es el número
al que **converge**
la sucesión creciente
y acotada
$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \quad n \in \mathbb{N}.$

A	B
n	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.25
3	2.37037037
4	2.44140625
5	2.48832
⋮	⋮
29011	2.718234981
29012	2.718234982
29013	2.718234984
29014	2.718234986
29015	2.718234987
29016	2.718234987
⋮	⋮

n crece indefinidamente

tendencia de los valores $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

*Más bien pareciera ser que se acercan cada vez más entre sí como "amontonándose" en un lugar. El número al que tienden los valores de esa cantidad cuando $n \to \infty$ se expresa con la letra "e" y es conocido como el **número de Euler.***

Observa que con él se informa la tendencia numérica de la sucesión de valores

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \cdots$$

donde al número 1 se le suma el recíproco del número n, el cual crece indefinidamente, y el resultado de la suma se eleva a la potencia n, que crece indefinidamente.

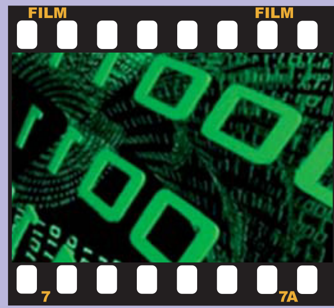
*En términos de la teoría formal, estamos ante la presencia de una sucesión de números (los de la columna B) que está creciendo y que está acotada; es una sucesión convergente. El número al que **converge** la sucesión lo representamos en forma compacta y exacta como e, y tiene una cantidad infinita de decimales. Se trata de un número real que es irracional, por tanto, con expansión decimal infinita y no periódica.*

Podemos sintetizar esa tendencia respondiendo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

¿es ésta la respuesta que estabas esperando?...

¿Sabías que?...



Toda sucesión de números reales creciente (o decreciente) y acotada es convergente.

Este poderoso resultado teórico asegura la existencia de un número real al que tienden los términos de la sucesión.

El valor numérico al que se acercan es justamente "el límite" de la sucesión.

Así por ejemplo, puedes estar seguro de afirmaciones como las siguientes:

- La sucesión $.9, .99, .999, \ldots$
  es una sucesión creciente y acotada cuyo límite es 1, aunque cada elemento de la sucesión es menor que 1.
- La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$
  es una sucesión decreciente y acotada cuyo límite es 0, aunque cada elemento de la sucesión es mayor que 0.
- La sucesión $.3, .33, .333, .3333, \ldots$
  es una sucesión creciente y acotada cuyo límite es $\frac{1}{3}$ aunque cada elemento de la sucesión es menor que $\frac{1}{3}$
- La sucesión $3.0, 3.1, 3.12, 3.125, 3.1250, 3.12500, \ldots$
  es una sucesión creciente y acotada cuyo límite es 3.125, y a este valor se llega desde el cuarto término de la sucesión.
- La sucesión $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
  no es ni creciente ni decreciente, aunque si es acotada.
  No es convergente, pues $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe (no representa un número).
- La sucesión $-1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots$
  es decreciente, pero no es acotada.
  Tampoco es convergente, $\lim_{n\to\infty} -n = \infty$ (no existe, no es un número).

¡TOMA NOTA!

¿Una aproximación de e?
2.7182818284
5904523536
0287471352
6624977572
4709369995
...¿suficiente?

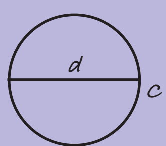
Existen números reales irracionales que han dejado una profunda huella en el pensamiento matemático, uno de ellos es e, otro que seguramente debes de conocer es π De ahora en adelante ya puede ¡y debe! ser una respuesta familiar para ti el límite que define al número e...

¿Sabías que?...

El número que conocemos como π expresa la relación que existe entre el perímetro de un círculo y su diámetro.

Se trata de un número real que es irracional, su expansión decimal es infinita y no es periódica.

Tu calculadora científica posee internamente una cantidad de dígitos finitos para reconocer y operar con el número π.



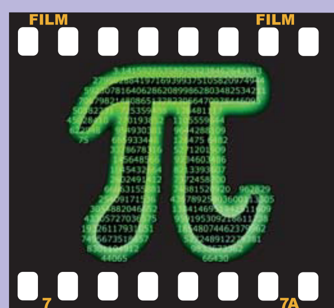
$$\frac{c}{d} = \pi$$

Si en este momento obtienes con ella un número como 3.141592654 estarás aproximando el número exacto π con 10 cifras decimales.

Ciertamente ese número no es π, ésta afirmación la argumentamos por la igualdad de ese número con un número racional:

$$3.141592654 = \frac{3141592654}{1000000000}$$

El número que la calculadora te da es el cociente de dos enteros; por tanto, no es π, porque π es un número irracional y es imposible que sea igual al cociente de dos enteros (no es número racional).



¿Sabías que?...

- ✓ Se "descubre" el número e con **Bernoulli** (1654–1705) en su estudio del problema particular del llamado interés compuesto.
- ✓ Pero **Napier** (1550–1617) inventó antes los logaritmos para simplificar los cálculos aritméticos y ahí aparecieron dificultades prácticas por la presencia de la constante e.
- ✓ **Leibniz** (1646–1716) en una carta a **Huygens** usa esta constante en sus cálculos.
- ✓ Pero es **Euler** (1707–1783) quien comienza a utilizar la letra e para identificar a esta constante… y esa es la forma en que se popularizó.
- ✓ **Euler** conocía el número e a 18 dígitos decimales en 1748…
- ✓ Y para el 2010 **Kondo** y **Yee** nos han proveído de 5 000 000 000 000 dígitos con uso de recursos computacionales… "naturalmente".

FILM FILM

$$e^{i\pi}+1=0$$

7 7A

Para que aprendas a reconocer a (e), visualiza la "manifestación" de este número tan especial como te proponemos en seguida:

potencia = número que $\to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

$1+\dfrac{1}{\text{número que} \to \infty}$

número que $\to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

$1+$ recíproco de número que $\to \infty$

recíproco de número que $\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

$1+$ número que $\to 0$

Si reconociste el patrón de comportamiento en el límite anterior, estarás de acuerdo en que podemos reescribir el número de Euler en diferentes formas:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{2m}=e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\Delta x\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=e \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\left(1+2\Delta x\right)^{\frac{1}{2\Delta x}}=e$$

¡TOMA NOTA!

La palabra **recíproco de algo** en Matemáticas indica la división de 1 entre ese **algo**…

Recíproco de 2 $\to \dfrac{1}{2}$

Recíproco de $x \to \dfrac{1}{x}$

Recíproco de $\dfrac{1}{a} \to \dfrac{1}{\frac{1}{a}}=a$

¡TOMA NOTA!

Puedes aproximar e con la "suma"

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

que es una … **serie convergente**.

¡TOMA NOTA!

No todas las series convergen…

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

¡no representa un número! … se dice **divergente**.

Regresando a nuestro objetivo de identificar la "fórmula" para $y(t)$ *podemos decir que al momento hemos calculado* $y(1) = e$. *Veamos ahora lo que ocurre para* $y(2)$*:*

$$y(2) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n}$$

Este límite no tiene el patrón de comportamiento del límite que define al número de Euler por el simple hecho de que falta un 2 *dividiendo el exponente* n.

Podemos agregar ese 2 *sin afectar la cantidad original así:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{2n}{2}}$$

y pensando que $\dfrac{2n}{2} = \dfrac{n}{2}(2)$ *podemos expresar*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{2}$$

Viendo esta expresión... a excepción del exponente 2*, reconocemos el número de Euler. Considerando el límite y la expresión dentro del paréntesis rectangular, tenemos:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{2} = e^{2}$$

Por lo tanto, $y(2) = e^{2}$

De la misma manera es válido operar el límite que define $y(3)$

$$y(3) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n}$$

al que le falta un 3 *dividiendo al exponente para completar el número de Euler.*

Pensando que $\dfrac{3n}{3} = \dfrac{n}{3}(3)$ *hacemos:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{3n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{3} = e^{3}$$

Por tanto, $y(3) = e^{3}$ *y ya estarás esperando que* $y(4) = e^{4}$ *y así podemos generar el patrón de comportamiento en los límites anteriores, infiriendo que*

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_0\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n} = y_0\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n} = y_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{t}}\right]^{t} = y_0\, e^{t}$$

¡TOMA NOTA!

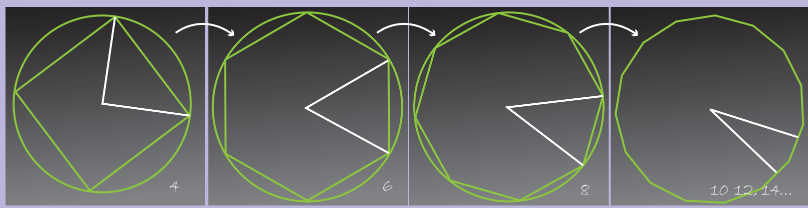
La habilidad en el manejo del lenguaje simbólico en Matemáticas requiere del ingenio en el uso de artificios para "disfrazar" expresiones como:

$$5 \rightarrow \frac{5}{2}(2) \qquad \frac{5}{6}(6) \qquad \frac{5}{t}(t)$$

$$x^{5} \rightarrow x^{\frac{5}{2}(2)} \qquad x^{\frac{5}{6}(6)} \qquad x^{\frac{5}{t}(t)}$$

¿Sabías que?...

Podemos obtener aproximaciones del número π si consideramos el perímetro de los polígonos regulares con un número par de lados que están inscritos en el círculo de radio unitario. Cada vez que aumentamos el número de lados, el polígono regular "se parece cada vez más" al círculo. Observa la figura.

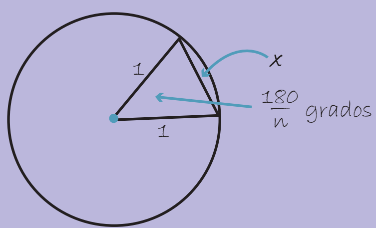


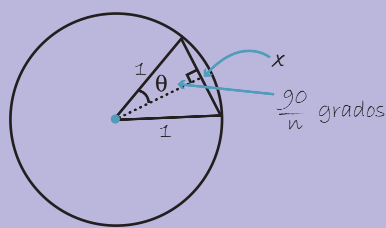
Como el radio del círculo es 1, entonces, su perímetro es $C = 2\pi(radio) = 2\pi(1) = 2\pi$.

Aproximaremos entonces la mitad del perímetro para que nuestro acercamiento sea al número π.

Supongamos trazado uno de los lados del polígono inscrito de $2n$ lados. Lo llamamos x en la figura que sigue y trazamos los radios que llegan a sus extremos.

Observa que si el número de lados es $2n$ el ángulo central es $\dfrac{360}{2n} = \dfrac{180}{n}$ grados.





Si partimos en 2 el triángulo isósceles cuyos lados iguales son los dos radios del círculo, estaremos produciendo un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos θ igual a la mitad del ángulo central.

De este modo $\theta = \dfrac{90}{n}$ y así calculamos el seno del ángulo θ al dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa.

Como el cateto es la mitad de x y la hipotenusa es el radio 1, entonces

$$\frac{\frac{x}{2}}{1} = \operatorname{sen}\theta \quad \text{y de ahí que} \quad x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{90}{n}\right)$$

Nos falta sumar los lados del polígono para aproximar a π. Podemos multiplicar por el número de lados del polígono, que es $2n$, pero como estamos aproximando la mitad del perímetro del círculo, entonces la multiplicación la hacemos por n.

De ahí que

$$\text{Semiperímetro polígono } (2n \text{ lados}) = 2n\ \operatorname{sen}\left(\frac{90}{n}\right)$$

Podemos esperar que a medida que n crece indefinidamente, el valor del número

$$2n\ \operatorname{sen}\left(\frac{90}{n}\right)$$

se acerque al número π... ¿será?

¿Sabías que?...

En agosto del 2010, Shigeru Kondo, ingeniero en sistemas japonés, y Alexander Yee, estudiante de ciencias computacionales, alcanzaron el record del cálculo del valor del número π a ¡5 billones de cifras decimales!

Les tomó 90 días calcularlo en la casa del ingeniero utilizando una computadora de escritorio con 20 discos duros externos adaptados a ella.

Ha sido en las últimas décadas que la cantidad de dígitos de números como π y e ha aumentado vertiginosamente, no sólo es posible por el alto desempeño en las nuevas computadoras, sino además, por la mejora de algoritmos utilizados que ha llevado a los autores a experimentar un inolvidable placer personal.

Pero veamos nosotros lo que tenemos "a la mano", veamos que el recurso de la hoja de cálculo nos ayude en esta conjetura de aproximar π con el semiperímetro del polígono de $2n$ lados mediante la sucesión $2n\,\mathrm{sen}\left(\frac{90}{n}\right)$

Cuando introduzcas la fórmula para calcular $2n\,\mathrm{sen}\left(\frac{90}{n}\right)$ en la hoja de cálculo, ten la precaución de traducir el ángulo $\frac{90}{n}$ a su medida en radianes, pues está expresada en grados... basta usar los comandos del software.

El archivo que nosotros hemos generado nos arroja los siguientes datos:

n	sen (90/n)	$2n$ sen (90/n)
3	0.5	3.00000000000000
4	0.382683432	3.06146745892072
5	0.309016994	3.09016994374947
99	0.015865964	3.14146083929197
100	0.015707317	3.14146346236413
101	0.015551812	3.14146600791088
999	0.00157236804758	3.14159135907402
1000	0.001570796	3.14159136166176
2000	0.00078539808265	3.14159233060775
99000	0.00001586662956	3.14159265345798
100000	0.00001570796327	3.14159265346060
101000	0.00001555243888	3.14159265346315
5511000	0.00000028502927	3.14159265358975
5512000	0.00000028497756	3.14159265358975
5513000	0.00000028492587	3.14159265358975

Observamos que, por más que aumentamos el número de celdas, y con él, el número de lados del polígono, la hoja de cálculo llega al límite de su capacidad, ofreciéndonos un valor de π exacto a 15 dígitos: 3.14159265358979.

La limitación del recurso habla de la riqueza de aspectos en la naturaleza del concepto de número. Vale la pena tomar conciencia de estos aspectos y no obviar, en nuestra interacción con la Matemática, el profundo poder de su expresión.

Un consejo: cuando utilices el número π en tus procedimientos, deja que el recurso tecnológico que utilices te brinde la mejor aproximación que maneja internamente de él, no le limites tú tecleando el tradicional 3.1416 porque eso ya es el recuerdo obsoleto de un pasado donde el poder de cómputo no era el que actualmente tenemos a nuestro alcance cotidiano.

Conclusión:

La magnitud $y(t)$ cuya derivada es ella misma, esto es, $y'(t) = y(t)$ y que tiene un valor inicial y_0 donde $y_0 = y(0)$ está representada mediante la fórmula:

$$y(t) = y_0\, e^t$$

Si en esta expresión consideramos que el valor inicial es $y_0 = 1$ y que la variable t se sustituye por x,. se obtiene la representación algebraica formal que se identifica como la fórmula de la función exponencial natural:

$$y = f(x) = e^x$$

la cual es una función que goza de la peculiar característica de que su derivada. . . ¡coincide con ella misma!

$$f'(x) = f(x) = e^x$$

Este nuevo modelo matemático se une al modelo polinomial para ampliar el espectro de herramientas matemáticas que tenemos para el estudio de situaciones donde interesa predecir el valor de una magnitud de la cual se conoce su razón cambio o se conoce la relación que guarda la magnitud con su razón de cambio.

Solución de la ecuación diferencial $y'(t) = k\, y(t)$

Hasta ahora hemos encontrado la función $y(t) = y_0\, e^t$ que resuelve la ecuación diferencial $y'(t) = y(t)$ con la condición inicial $y(0) = y_0$

Esta expresión la hemos construido a través de aplicar el procedimiento numérico de aproximación, manteniendo la razón de cambio constante en intervalos de tiempo cada vez más pequeños y calculando el cambio acumulado de la magnitud, lo cual es posible conociendo que

$$y'(t) = y(t)$$

Aplicar el proceso de límite representa una nueva forma de pensar, lo que nos llevó a considerar la efectividad de un proceso infinito de aproximación para predecir los valores exactos de la magnitud que se comporta de acuerdo a dicha ecuación, diferencial.

Es así que arribamos a la nueva función $y(t) = y_0\, e^t$ cuya fórmula ya no es como las fórmulas de funciones potencia. Aún y cuando se trata ciertamente de elevar un número a una potencia, es notorio que esa potencia es justamente la variable de la que depende la magnitud; la potencia varía en los números reales.

La variable está en el exponente... de ahí el nombre de la función **exponencial**. Por su parte, el número en la base es tan especial en su naturaleza, que ha sido reconocido en el medio matemático como el "número de Euler"... de ahí la elección "e", y con ello se agrega al nombre de este modelo la palabra "natural".

¿Pero qué hay de la ecuación diferencial original? En ella se expresa la proporcionalidad entre la magnitud y su razón de cambio:

$$y'(t) = k\,y(t)$$

Este caso general podemos tratarlo igual, accionando el procedimiento de aproximación; salvo que la variante que debemos considerar es incluir una nueva columna para calcular la razón de cambio, porque ahora ésta es igual a un múltiplo de la magnitud.

Observa la siguiente tabla donde la nueva información la hemos intercalado en la tabla original del caso $y'(t) = y(t)$.

Siguiendo las flechas llegarás a darte cuenta que al final del proceso aparece un factor k multiplicando a Δt

t	$y(t)$	$y'(t) = k\,y(t)$	$\Delta y \approx y'(t)\Delta t$
0	y_0	$k y_0$	$k y_0 \Delta t$
t_1	$y_0 + k\,y_0\,\Delta t$ $= y_0(1+k\Delta t)$	$k y_0(1+k\Delta t)$	$k y_0(1+k\Delta t)\Delta t$
t_2	$y_0(1+k\Delta t) + k\,y_0(1+k\Delta t)\Delta t$ $= y_0(1+k\Delta t)(1+k\Delta t)$ $= y_0(1+k\Delta t)^2$	$k y_0(1+k\Delta t)^2$	$k y_0(1+k\Delta t)^2\,\Delta t$
t_3	$y_0(1+k\Delta t)^2 + k y_0(1+k\Delta t)^2\,\Delta t$ $= y_0(1+k\Delta t)^2(1+k\Delta t)$ $= y_0(1+k\Delta t)^3$	$k y_0(1+k\Delta t)^3$	$k y_0(1+k\Delta t)^3\,\Delta t$
t_4	$y_0(1+k\Delta t)^3 + k y_0(1+k\Delta t)^3\,\Delta t$ $= y_0(1+k\Delta t)^4$	$k y_0(1+k\Delta t)^4$	$k y_0(1+k\Delta t)^4\,\Delta t$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_{n-1}	$y_0(1+k\Delta t)^{n-1}$	$k y_0(1+k\Delta t)^{n-1}$	$k y_0(1+k\Delta t)^{n-1}\,\Delta t$
$t_n = t$	$y_0(1+k\Delta t)^n$		

aparece el factor k en Δt

Estamos entonces ante la situación de esclarecer la tendencia numérica de los valores de

$$y_0(1+k\,\Delta t)^n \quad \text{cuando} \quad \Delta t \to 0$$

o de un modo equivalente, haciendo $\Delta t = \frac{t}{n}$ cuando n tiende a ∞.

El valor de $y(t)$ se expresa como

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n$$

Separando el valor y_0 que no depende del límite tenemos

$$y(t) = y_0 \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n$$

Después de trabajar anteriormente con el límite que define al número de Euler, es relativamente simple identificar lo que debemos hacer en la expresión para que en ella "aparezca" este número...

Algebraicamente es válido escribir

$$n = \frac{k\,t\,n}{k\,t} = \frac{n}{k\,t}(k\,t)$$

y utilizamos esto en la expresión:

$$\left(1+\frac{k\,t}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{k\,t}{n}\right)^{\frac{n}{k\,t}(k\,t)} = \left[\left(1+\frac{k\,t}{n}\right)^{\frac{n}{k\,t}}\right]^{(k\,t)}$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k\,t}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{k\,t}{n}\right)^{\frac{n}{k\,t}}\right]^{k\,t} = e^{k\,t}$$

y así, finalmente obtenemos:

$$y(t) = y_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k\,t}{n}\right)^{n} = y_0\, e^{k\,t}$$

SÍNTESIS:

El lenguaje simbólico en Matemáticas: Modelo Exponencial

Volvamos a la variable x para sintetizar lo aprendido en el contexto formal.

Modelo Exponencial

El modelo matemático que cumple la ecuación diferencial

$$y'(x) = k\,y(x) \quad \text{con condición inicial} \quad y(0) = y_0$$

es la función exponencial natural:

$$y(x) = y_0\, e^{kx}$$

Su razón de cambio, o derivada, la dicta la misma ecuación diferencial:

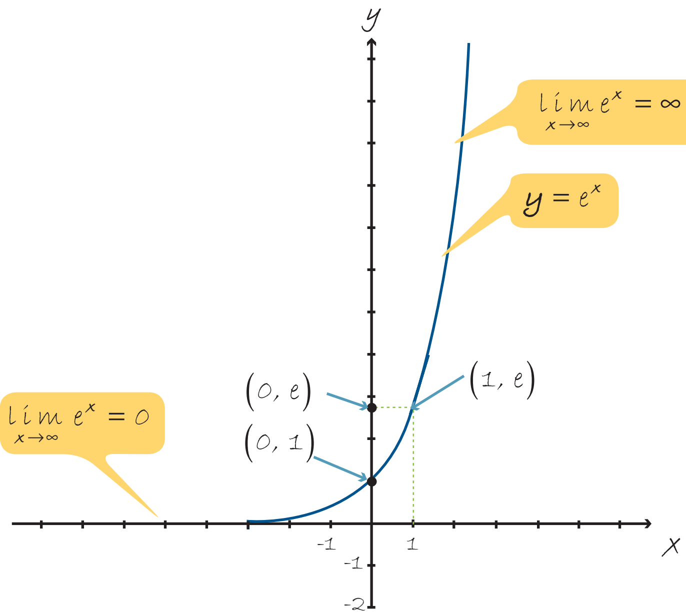
$$y'(x) = k\,y(x) = k\,y_0\, e^{kx}$$

La última expresión nos provee de un procedimiento algorítmico para derivar este tipo de funciones, a saber, multiplicar la misma función por k, el coeficiente de x en el exponente.

Aspectos visuales de la función exponencial

En este apartado haremos uso de un software de graficación para caracterizar el comportamiento grafico de la función exponencial. Conviene que
tengas un recurso tecnológico para graficación “a la mano”, de modo que compruebes lo que estaremos obteniendo. **Características de** $y = e^x$ **y algunos efectos gráficos.**

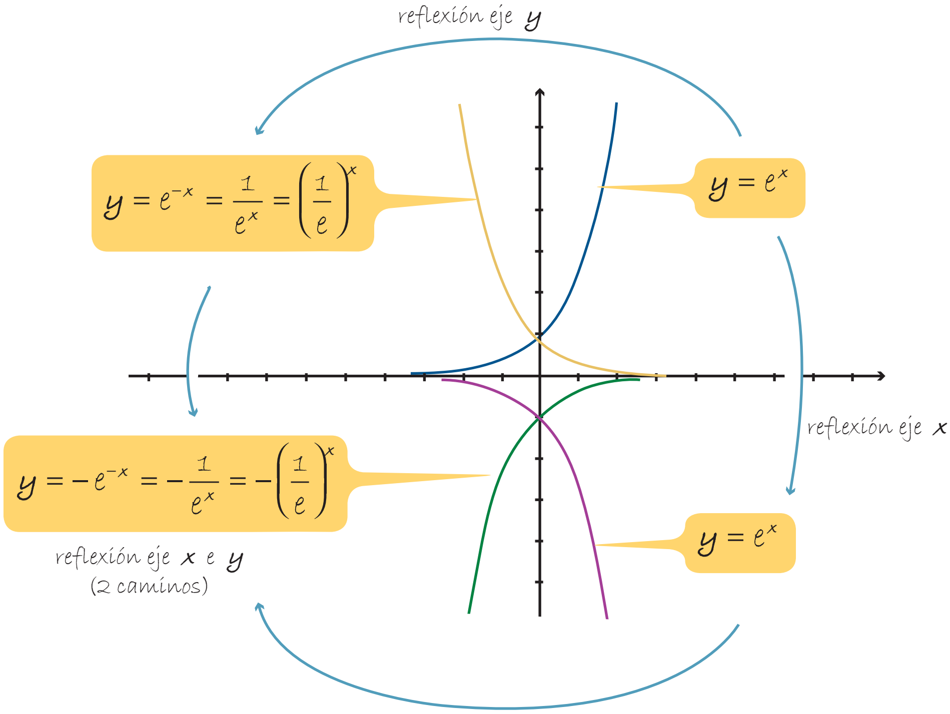
La gráfica de la función exponencial la podemos reconocer al utilizar un software de graficación cualquiera. Conservando la misma escala en ambos ejes, obtenemos:



Hemos identificamos en la gráfica los hechos siguientes:

- $e^x > 0$ en todo $x \in$
- $e^0 = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- si $x > 0$ $e^x > 1$
- Dominio: $\mathbb{R}$
- Gráfica creciente
- $e^x = 0$ no tiene solución
- $e^1 = e$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- si $x < 0$ $e^x < 1$
- Imagen $(0, \infty)$
- Concavidad hacia arriba

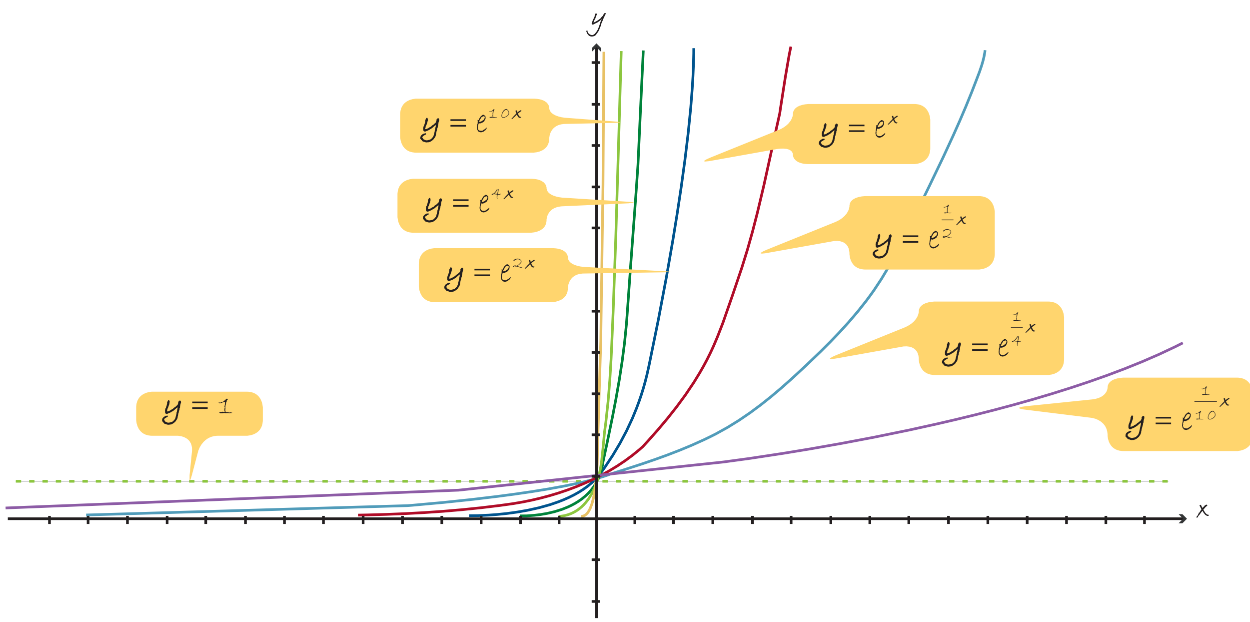
Ligeros cambios de signo en la expresión de la función provocan cambios en la gráfica que se nombran como **reflexiones** respecto a los ejes coordenados.



En la siguiente imagen se pueden identificar las afectaciones que provoca en la gráfica la presencia del parámetro k positivo que multiplica al exponente x en la función, expresada como:

$$y = e^{kx}$$

Observa la diferencia cuando $k > 1$ y cuando $0 < k < 1$



El parámetro k entre 0 y 1 provoca que la curva exponencial, llamémosla "básica", $y = e^x$ muestre un crecimiento más lento. En cambio, el parámetro k mayor que 1, provoca que la curva exponencial "básica" $y = e^x$ muestre un crecimiento más rápido.

Observa que independientemente del valor de k, mientras este sea positivo, tenemos que

$$\lim_{x \to \infty} e^{kx} = \infty$$

Esta expresión sigue mostrando el crecimiento característico del comportamiento exponencial aunque este haya sido “amortiguado” cuando el parámetro k sea menor que 1.

Además

$$\lim_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$$

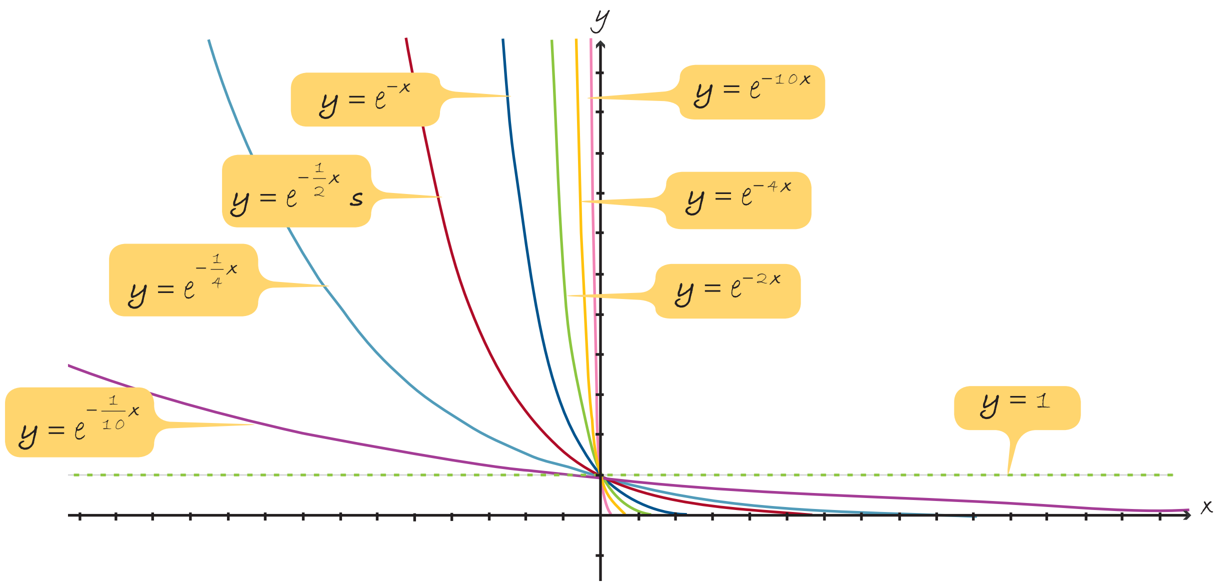
y esta expresión muestra la existencia de una **asíntota horizontal** en el eje x para todas estas curvas.

Cualquiera de los comportamientos de estas gráficas se refiere como “crecimiento exponencial”.

En cambio, cuando el parámetro k es negativo $k < 0$ en $y = e^{kx}$ ocurre lo que ocurrió en la reflexión con respecto al eje y, pues realmente el exponente kx es menor que 0 cuando x es positivo, y mayor que cero cuando x es negativo. La siguiente imagen es una reflexión respecto al eje y de las gráficas en la imagen anterior; los exponentes tienen un signo negativo... observa el comportamiento.

¡TOMA NOTA!

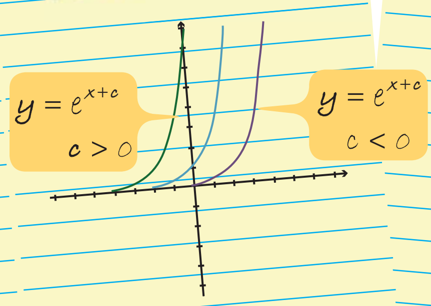
En el diccionario dice que en el **crecimiento exponencial** el ritmo aumenta cada vez más rápidamente. Pero no es exclusivo del modelo exponencial... ¿o sí?



¡TOMA NOTA!

Si la función base $y = e^{x}$ se afecta con el parámetro c sumando a x: $y = e^{x+c}$ la gráfica se **traslada horizontalmente.**

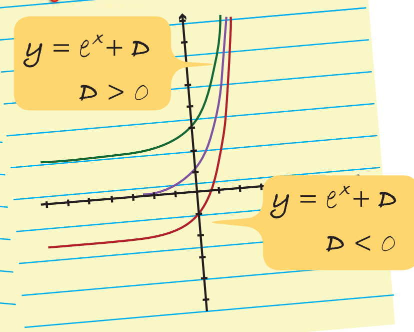
¡TOMA NOTA!



¡TOMA NOTA!

Si la función base $y = e^{x}$ se afecta con el parámetro D sumando a e^{x} $y = e^{x} + D$ la gráfica se **traslada verticalmente.**

¡TOMA NOTA!



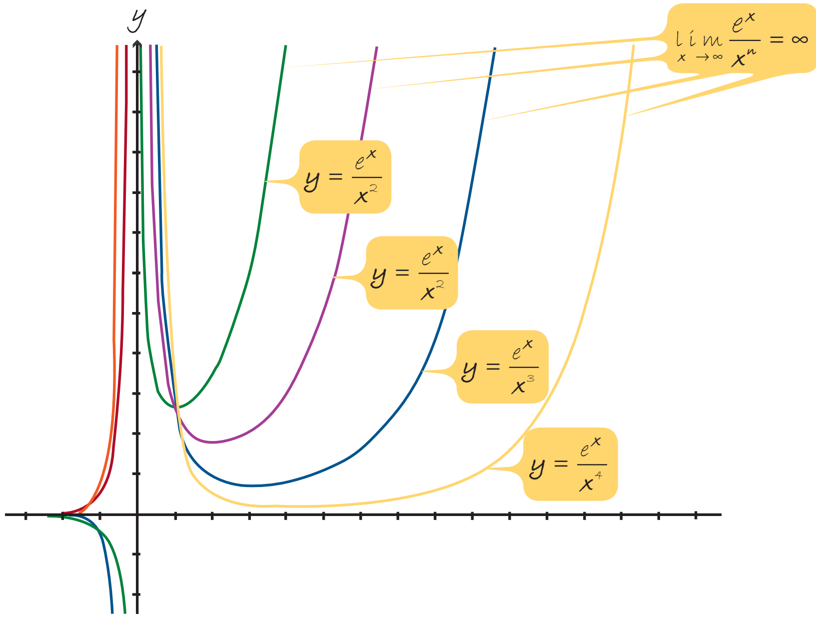
Similitudes y diferencias entre $y = e^x$ y $y = x^n$

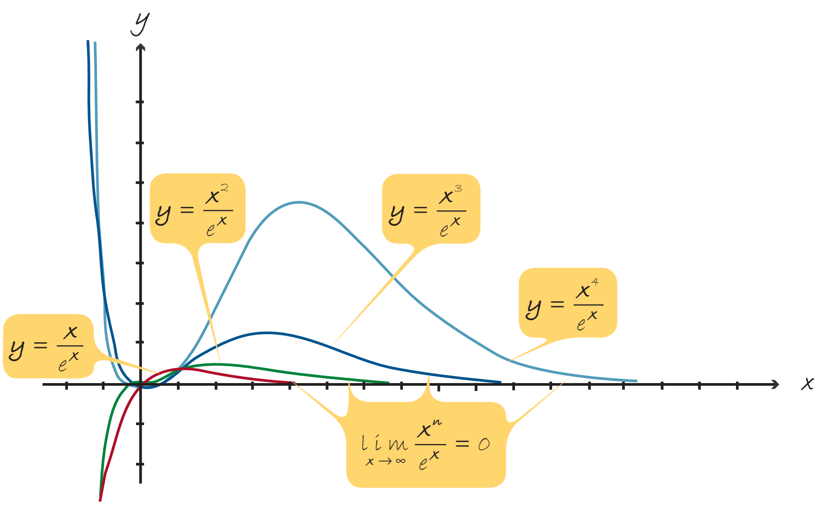
Las funciones potencia natural $y = x^n$ también crecen indefinidamente cuando x lo hace; eso lo observamos en el tema 1.5 anterior. Sin embargo, la manera de crecer se diferencia de la manera exponencial de crecer. En cierta forma un crecimiento exponencial "domina" al crecimiento de las funciones potencia. Esto se expresa matemáticamente a través de la tendencia de los cocientes siguientes.

Si observas las siguientes gráficas podrás entender que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$





y si observas las siguientes gráficas entenderás que, complementariamente al límite anterior se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Aplicación: La función exponencial en contextos reales

Caso 1. Crecimiento exponencial como modelo del crecimiento de población

Navegando en internet nos dimos a la tarea de recopilar información acerca de la población mundial en este siglo XXI, preocupados por el panorama que se nos presenta en cuanto a la sobrepoblación de nuestro planeta. Después de recorrer varias páginas pudimos consensuar la siguiente tabla:

Año	Población (millones)
2000	6085
2001	6162
2002	6239
2003	6315
2004	6391
2005	6467
2006	6544
2007	6621
2008	6698
2009	6775
2010	6852

a) Construye un modelo exponencial

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

que pueda representar algebraicamente el comportamiento numérico que la tabla presenta.

Si los datos se modelan con una función del tipo $y(t) = y_0 e^{kt}$ *el valor* y_0 *representa el dato inicial, en nuestro caso, el del año* 2000. *Podemos pensar que ese año se asocia con el tiempo* $t = 0$ *de modo que al escribir* $y(0) = y_0 = 6852$ *interpretaremos lo reportado en el año* 2000.

Ciertamente no es tan directo detectar el valor de la constante k *de proporcionalidad entre* $y(t)$ *y su derivada* $y'(t)$, *la que aparece en el modelo* $y(t) = y_0 e^{kt}$ *afectado el exponente en la ecuación diferencial* $y'(t) = k\,y(t)$. *Para llegar a determinar el valor de* k, *vale la pena imaginar los datos en la forma general siguiente:*

t	Año	Población (millones)	Valor en el modelo $y(t) = y_0 e^{kt}$
0	2000	6085	y_0
1	2001	6162	$y_1 = y_0 e^{k(1)}$
2	2002	6239	$y_2 = y_0 e^{k(2)}$
3	2003	6315	$y_3 = y_0 e^{k(3)}$
4	2004	6391	$y_4 = y_0 e^{k(4)}$
5	2005	6467	$y_5 = y_0 e^{k(5)}$
6	2006	6544	$y_6 = y_0 e^{k(6)}$
7	2007	6621	$y_7 = y_0 e^{k(7)}$
8	2008	6698	$y_8 = y_0 e^{k(8)}$
9	2009	6775	$y_9 = y_0 e^{k(9)}$
10	2010	6852	$y_{10} = y_0 e^{k(10)}$

Observa que al realizar la división de un dato de población entre el dato anterior se encuentra un patrón de comportamiento:

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{y_0 e^{k(1)}}{y_0} = e^k$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_0 e^{k(2)}}{y_0 e^{k(1)}} = e^{2k-k} = e^k$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{y_0 e^{k(3)}}{y_0 e^{k(2)}} = e^{3k-2k} = e^k$$

$$\frac{y_4}{y_3} = \frac{y_0 e^{k(4)}}{y_0 e^{k(3)}} = e^{4k-3k} = e^k$$

El patrón es que esas divisiones dan igual al mismo número, e^k.

Estamos identificando que una tabla numérica refleja el tipo de modelo exponencial cuando las divisiones entre un dato y su anterior resultan iguales o prácticamente iguales. Es importante notar que los valores del tiempo donde se captura la información están igualmente espaciados, esta fue una condición necesaria para que se diera el patrón que hemos identificado.

Podemos realizar las divisiones con los datos de la tabla buscando la regularidad esperada.

¡Toma nota!

Una sucesión de números

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n, \ldots$

se dice que está en **progresión geométrica** si:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ldots$$

¡es constante!

Año	Población (millones)	Relación $\frac{y_n}{y_{n-1}}$
2010	6852	1.011365314
2009	6775	1.011495969
2008	6698	1.011629663
2007	6621	1.011766504
2006	6544	1.011906603
2005	6467	1.011891723
2004	6391	1.012034838
2003	6315	1.012181439
2002	6239	1.012495943
2001	6162	1.012654067
2000	6085	

Si consideramos que las diferencias obtenidas en las divisiones pueden resultar normales en la práctica, podemos proponer un modelo exponencial fijando el valor de la columna de divisiones en 1.012. Hacemos esto optando por 3 decimales y habiendo calculado el promedio de los valores en dicha columna.

Proponemos entonces que

$$e^{k} = 1.012$$

y sólo falta... despejar k... aunque cabe decir que, matemáticamente hablando, el modelo puede ser representado al momento por

$$y(t) = y_0 e^{kt} = 6852\left(e^{k}\right)^{t} = 6852(1.012)^{t}$$

b) La ONU ha expresado que para el año 2050 la población mundial andará entre los 7700 y los 11200 millones de habitantes, donde lo más probable sea una cantidad cercana a los 9400 millones. Utiliza el modelo construido en el inciso anterior y tu calculadora científica para comparar con estos datos.

Predecir el valor de la población mundial en el año 2050 equivale a evaluar el modelo construido en $t = 50$ esto es,

$$y(50) = 6852(1.012)^{50}$$

Toda calculadora científica posee una instrucción para elevar un número real a una potencia real; comúnmente se hace mediante una tecla titulada y^x Utilizando una calculadora obtenemos el valor

$$\begin{aligned} y(50) &= 6852(1.8156227889433) \\ &= 12440.64734983949 \end{aligned}$$

Podríamos redondear y decir que $12{,}440$ millones y medio es la predicción para el año 2050 que resulta de aplicar el modelo construido. Seguramente estamos de acuerdo en que en el transcurrir del tiempo aparecerán factores que alteran lo que el modelo predice.

La estimación de la ONU no puede basarse en el modelo tan simple que hemos determinado. De hecho, que el valor que propone la ONU, cercano a 9400 millones, sea menor que el que nuestro modelo predice, es motivo de "tranquilidad"... claro, tranquilidad entre comillas, porque la problemática de la sobrepoblación del planeta es una realidad más complicada de lo que podamos plantear aquí.

¿Sabías que?...

El 11 de julio se ha declarado como el Día Mundial de la Población porque tal día de 1987 la cifra de habitantes en el mundo llegó a los 5 mil millones.

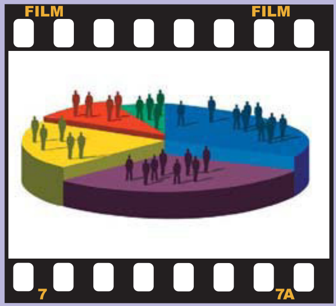
En 1989 el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD) propuso la conmemoración de este simbólico día que recuerda la importancia de los problemas demográficos que nos competen como humanos responsables de un desarrollo sustentable y de la promoción de los derechos humanos.

Si piensas que 12 años después, en 1999, se alcanzaron los 6 mil millones, y que éste número continúa creciendo a un ritmo de 80 millones por año, seguramente coincidirás en la necesidad de crear conciencia de la responsabilidad mutua por la toma de decisiones sobre nuestro mundo que tenga presentes las necesidades de todos los que lo habitamos.

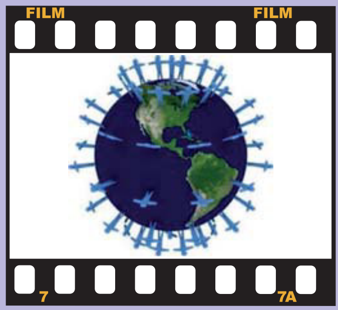
Ha habido una disminución de la mortalidad sin precedentes; la esperanza de vida al nacer aumentó de 30 a 67 años entre los años 1800 y 2005. Los casi 7000 millones en el 2010 complican los propósitos de este nuevo milenio de reducir la pobreza, hambre y enfermedades, y de aumentar el nivel de educación en países en desarrollo.

A juicio de los expertos, las cifras de mortalidad materna e infantil siguen siendo aún demasiado altas, y la generación de personas mayores aumenta en el futuro. Se ha observado en países como Noruega una fuerte tendencia hacia el envejecimiento activo. La jubilación parece ser transformada en una "tercera edad" que llevada "en buena forma" permite a estos adultos redescubrirse como emprendedores útiles a la sociedad.

Está siendo un factor importante para la salud de nuestra sociedad, el acceder a un abandono gradual de la vida laboral. Esto puede ser posible a través del empleo "institucionalizado" a tiempo parcial, para las personas mayores… pero la pregunta es… ¿estamos preparados para ello?



¿Sabías que?...



Malthus (1766-1834), economista inglés, predijo una crisis en nuestro planeta debida a la gran demanda de recursos alimenticios que se requerirían para saciar el hambre de la población y la escasa disponibilidad de recursos existentes. Lo hizo al extrapolar hacia el futuro su modelo del comportamiento de la población mundial. En este modelo estaba proponiendo un crecimiento a una razón exponencial mientras que la producción de alimentos solo crecía de manera lineal.

Ciertamente su modelo poseía algunas debilidades; en particular, la de no permitir una retroalimentación negativa. En la realidad ocurre que una vez que una población alcanza un cierto nivel, la competencia por espacio y recursos viene a afectar las condiciones y el patrón de crecimiento se modifica.

Verhulst (1804-1849) refinó el modelo de Malthus asumiendo que la población de una especie en un año era función de la población en el año anterior. Suponiendo que la razón de cambio es proporcional a la distancia de la máxima población, Verhulst construye un modelo de crecimiento de población más realista. Este modelo predice que, bajo circunstancias adecuadas, la población se estabilizará en un equilibrio… ¿será este el futuro?

Caso 2. El álgebra de las expresiones exponenciales

En el problema anterior hemos advertido una dificultad técnica ante la cual debemos detenernos...

¿cómo despejar un exponente?

En realidad, este problema trasladado al contexto matemático, puede verse como un caso particular de un problema aún más general.

Teniendo definida la función **exponencial natural** como

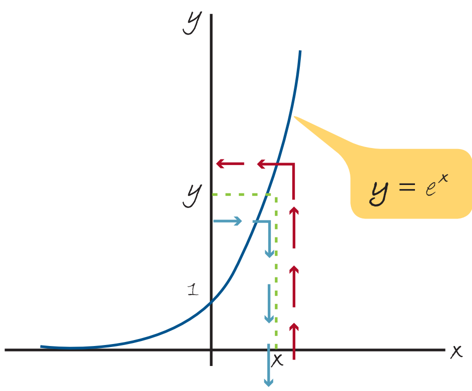
$$y = f(x) = e^x$$

y dado el valor de y positivo...

¿cuál es el valor de x de tal forma que $e^x = y$?

a) Relaciona la respuesta a esta pregunta, con el valor numérico conocido como el ***logaritmo natural*** de un número.

Primero debemos convencernos de que la pregunta tiene respuesta en los números reales. Para eso consideremos la gráfica de la función exponencial $y = e^x$



Observa que con ella queda determinado un único valor numérico y *correspondiente a la "operación" de "elevar el número* e *a la potencia* x*".*

La pregunta ¿cuál es el valor de x *para qué* $e^x = y$ *? sí tiene respuesta porque podemos "regresar" ese número* y *positivo con el* x *en el eje horizontal del que provino mediante la función exponencial natural. Ahora lo que nos resta es **caracterizar** aquella "operación" que, cuando sea aplicada al valor numérico* y*, determine el único valor numérico* x *correspondiente con él mediante la expresión* $y = e^x$.

Para definir esa operación, es importante observar en la gráfica de la función exponencial dos características:

- *La ecuación* $e^x = y$ *tiene sentido sólo cuando* $y > 0$.
- *Esto se observa porque la gráfica de* $y = e^x$ *se encuentra completamente contenida en la parte positiva del eje* y *(arriba del eje* x*).*
- *Para cada valor de* $y > 0$ *existe un único valor de* x *que cumple con la ecuación* $e^x = y$.
- *Esto se observa porque la horizontal punteada que hemos trazado a partir del valor arbitrario* $y > 0$, *topa con la gráfica en un único punto, desde el cual bajamos la vertical punteada, y queda señalado el único valor de* x *correspondiente.*

Esas características nos permiten identificar visualmente a este único valor de x *(tal que* $e^x = y$*).*

Ahora debemos identificar esa operación algebraicamente con un nombre especial; se le llama el ***logaritmo natural*** *de* y. *La manera de representarlo es:*

$$x = \ln y$$

Contamos entonces con dos expresiones que representan a la misma relación entre las variables x *y* y:

sí $y = e^x \longrightarrow$ al despejar $x \longrightarrow x = \ln y$

sí $x = \ln y \longrightarrow$ al despejar $y \longrightarrow y = e^x$

Podemos decir que las expresiones matemáticas

$$y = e^x \qquad\qquad x = \ln y$$

expresan exactamente lo mismo:

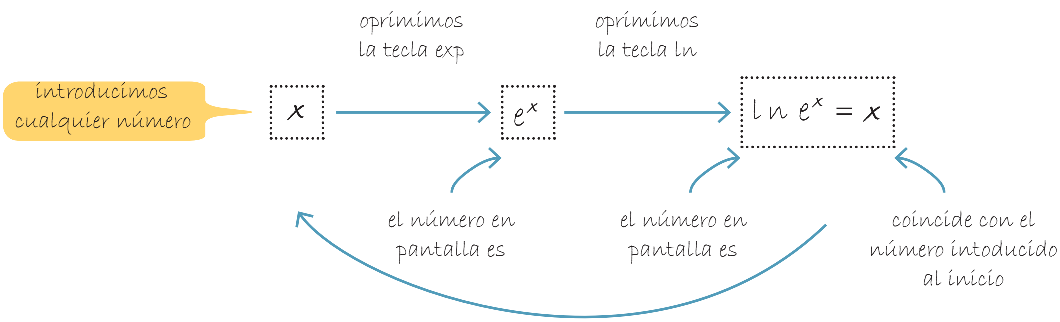
"x *es el exponente al que debe elevarse al número* e *para obtener* y*"... eso es lo que debemos "leer" en cualquiera de las dos expresiones.*

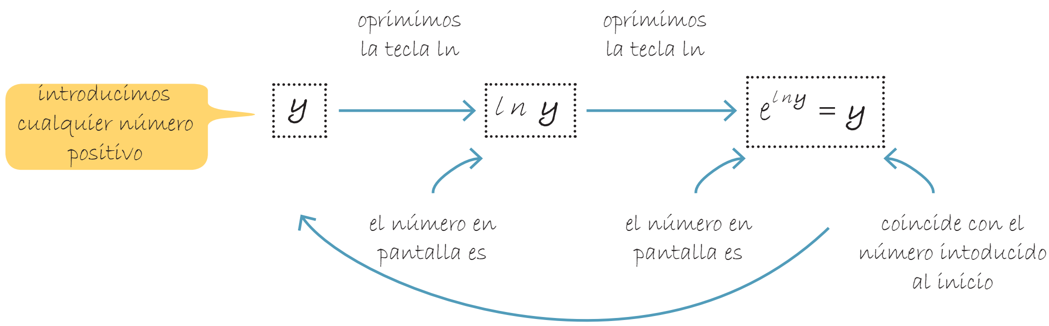
Podemos obtener una expresión algebraica muy útil al sustituir el valor de x *de la segunda expresión en la primera; o bien, al sustituir el valor de* y *de la primera expresión en la segunda:*

$$e^{\ln y} = y \qquad \ln e^x = x$$

Consideramos a e^x como el resultado de una "operación" realizada al número x (elevar el número e a la potencia x) y consideramos a $\ln y$ como el resultado de otra "operación" que ha sido realizada al número y (calcular el logaritmo natural de y). Lo que dicen las dos expresiones anteriores es que ambas operaciones son inversas la una de la otra (o contrarias) en el sentido de que el efecto que provoca una de esas operaciones realizada sobre cierto número, la otra operación lo anula.

Esta afirmación la puedes comprobar con tu ***calculadora científica:***





En particular; conviene realizar lo anterior con $x = 0$ y $x = 1$ *para recordar que*

- $e^0 = 1$ y $\ln 1 = 0$ *expresan lo mismo: que* 0 *es el exponente (logaritmo) al que se eleva* e *para obtener* 1.
- $e^1 = e$ y $\ln e = 1$ *expresan lo mismo: que* 1 *es el exponente (logaritmo) al que se eleva* e *para obtener* e.
- *Las expresiones*

$$\ln e^x = x \qquad\qquad e^{\ln x} = x$$

- *generan procedimientos algebraicos en la simplificación de expresiones en el sentido de que la expresión "complicada" a la izquierda s*e simplifica a la derecha. Observa la expresión en seguida.

$$\ln e^{\boxed{\text{fórmula}}} = \boxed{\text{fórmula}}$$

y esto independientemente del signo de los valores numéricos que admite la fórmula.

También, la expresión "complicada" a la izquierda se simplifica a la derecha. Observa la expresión en seguida.

$$e^{\ln \boxed{\text{fórmula}}} = \boxed{\text{fórmula}}$$

pero esto siempre y cuando los valores de la fórmula sean positivos.

*En el lenguaje formal se dice que las operaciones exponencial y logarítmica **son inversas** la una de la otra.*

b) Despeja x de las ecuaciones siguientes de tal manera que obtengas sus respectivos valores numéricos exactos y también aproximados con 5 decimales.

1) $e^{0.1x} = 1.533$

2) $7e^{2x+3} + 3 = 20$

3) $8 \ln(4x - 2) + 4 = 10$

Las tres expresiones algebraicas involucran a las funciones logaritmo natural $\ln$ *y exponencial base* e*. Para despejar, se requiere que realicemos un proceso algebraico que haga uso del efecto inverso que ambas funciones poseen entre sí.*

En la ecuación 1)

$$e^{0.1x} = 1.533$$

aplicamos logaritmo natural en ambos lados:

$$\ln e^{0.1x} = \ln\ 1.533$$

pero

fórmula

$$\ln e^{\boxed{0.1x}} = \boxed{0.1x}$$

de donde

$$0.1x = \ln 1.533$$

luego

$$x = \frac{\ln 1.533}{0.1}$$

Este último es el valor expresado de manera exacta para x.

¡TOMA NOTA!

En la **simbología matemática** hay diferentes maneras de escribir lo mismo...

¡TOMA NOTA!

Las siguientes expresiones representan el número $a > 0$

$$a \quad \frac{2a}{2} \quad \frac{a2}{2} \quad a^2\frac{1}{a} \quad \sqrt{a^2}$$

$$e^{\ln a} \quad \ln e^{a}$$

Si calculamos el logaritmo con la calculadora y aproximamos con 5 decimales obtenemos

$$x = \frac{\ln 1.533}{0.1} \approx \frac{0.42723}{0.1} \approx 4.2723$$

y así hemos encontrado el valor de x que cumple $e^{0.1x} = 1.533$

En la ecuación 2)

$$7e^{2x+3} = 20$$

aislemos primero la parte de la función exponencial:

$$e^{2x+3} = \frac{20}{7}$$

y ahora, aplicamos logaritmo natural en ambos lados de la igualdad:

$$\ln e^{2x+3} = \ln \frac{20}{7}$$

Simplificamos la expresión a la izquierda por el efecto inverso:

$$\boxed{\text{fórmula}}$$

$$\ln e^{2x+3} = 2x + 3$$

luego

$$2x + 3 = \ln e^{2x+3} = \ln \frac{20}{7}$$

Luego, despejamos x:

$$x = \frac{\ln \frac{20}{7} - 3}{2}$$

y estamos representando el valor exacto de x. Pero si calculamos el logaritmo en el lado derecho con la calculadora, tomando sólo 5 decimales:

$$x \approx \frac{1.04982 - 3}{2}$$

$$x \approx -0.97508$$

y así hemos encontrado el valor numérico x que satisface la ecuación

$$7e^{2x+3} = 20$$

Por último, en la ecuación 3)

$$8\ln(4x-2) + 4 = 10$$

aislamos primeramente la parte de la función logaritmo:

$$8\ln(4x-2) = 10 - 4 = 6$$

$$\ln(4x-2) = \frac{6}{8} = 0.75$$

¡TOMA NOTA!

Al despejar t en

$0.2t = \ln 5.5$

se obtiene

$t = \dfrac{\ln 5.5}{0.2}$

y no $\ln \dfrac{5.5}{0.2}$

¡TOMA NOTA!

Al despejar x en

$x + 3 = \ln 4$

se tiene

$x = \ln 4 - 3$

que no es lo mismo que $\ln 1$

Debemos entender:

$x = \ln(4) - 3$

Aplicamos la función exponencial en ambos lados:

$$e^{\ln(4x-2)} = e^{0.75}$$

Podemos simplificar la expresión a la izquierda por el efecto inverso:

fórmula

$$\boxed{\text{fórmula}}$$

$$e^{\ln(4x-2)} = 4x - 2$$

Esto es:

$$4x - 2 = e^{\ln(4x-2)} = e^{0.75}$$

Luego, despejamos x*:*

$$x = \frac{e^{0.75} + 2}{4}$$

y con la calculadora podemos aproximar a 5 *decimales*

$$x = \frac{e^{0.75} + 2}{4} \approx 1.02925$$

que es el valor numérico que satisface la ecuación.

CASO 3. Decaimiento exponencial. Farmacología.

La Farmacología estudia los procesos de interacción de una sustancia con el organismo; cómo se absorbe, cómo se distribuye, o qué procesos químicos provoca... son algunas de sus interrogantes. La Farmacocinética estudia estos procesos para predecir la biodisponibilidad y el tiempo requerido para la eliminación de un fármaco. Para la práctica de la anestesia general se produce un estado de inconsciencia al administrar ciertos fármacos hipnóticos, aboliendo el dolor y produciendo una relajación muscular.

Supongamos la situación en que se inyecte a un paciente 500 miligramos de un anestésico. Una vez que se encuentra en la sangre del paciente, el anestésico va siendo eliminado por el organismo, principalmente por la acción de los riñones. En la siguiente tabla se muestran algunos datos que fueron registrados sobre la cantidad de anestésico en la sangre de cierto paciente conforme pasa el tiempo.

tiempo (en horas)	cantidad de anestésico (en miligramos)
0	500
1	400
2	320
3	256
4	204.8

a) Construye el modelo exponencial para representar este comportamiento.

Observemos que de los primeros datos sucesivos de la tabla podemos precisar lo siguiente:

$$\frac{\textit{cantidad de anestésico de una hora}}{\textit{cantidad actual de anestésico}} = \frac{400}{500} = 0.8$$

$$\frac{\textit{cantidad en dos horas}}{\textit{cantidad en una hora}} = \frac{320}{400} = 0.8$$

$$\frac{\textit{cantidad en tres horas}}{\textit{cantidad en dos horas}} = \frac{256}{320} = 0.8$$

$$\frac{\textit{cantidad en cuatro horas}}{\textit{cantidad en tres hora}} = \frac{204.8}{256} = 0.8$$

El hecho de que estos cálculos den siempre 0.8 *nos muestra que la cantidad de anestésico decreció, cada hora, en un factor de* 0.8 *porque la cantidad de anestésico en cierta hora es igual a* 0.8 *"veces" la cantidad de anestésico en la hora anterior. Se trata de una progresión geométrica de modo que al final de cada hora queda el* 80% *de anestésico que había al principio de la misma.*
Denotemos por y *a la cantidad de anestésico y* t *al número de horas transcurridas a partir de que se le inyectan al paciente los* 500 *miligramos de anestésico. Podemos expresar los valores de* y *para las horas transcurridas así:*

- *si* $t = 1$ *entonces* $y(1) = 400 = 500(0.8)$
- *si* $t = 2$ *entonces*
  $y(2) = 320 = 400(0.8) = 500(0.8)^2$
- *si* $t = 3$ *entonces*
  $y(3) = 256 = 320(0.8) = 500(0.8)^3$
- *si* $t = 4$ *entonces*
  $y(4) = 204.8 = 256(0.8) = 500(0.8)^4$

y generalizando, obtenemos

$$y(t) = 500(0.8)^t$$

Además, escribiendo

$$0.8 = e^{\ln 0.8}$$

obtenemos que

$$(0.8)^t = \left(e^{\ln 0.8}\right)^t = e^{(\ln 0.8)t}$$

por lo tanto

$$y(t) = 500e^{(\ln 0.8)t}$$

Esta función nos permite predecir la cantidad de anestésico en la sangre del paciente al haber transcurrido t horas de que le fue aplicado.

b) ¿Cuál será el valor de la cantidad de anestésico a las 10 horas de haber sido inyectado al paciente?

A las 10 horas la cantidad de anestésico en la sangre del paciente será de:

$$y(t) = 500e^{(\ln 0.8)(10)} = 53.69 \text{ miligramos}$$

c) ¿En qué instante su valor será de 10 miligramos?

Si consideramos que $y = 10$ miligramos, entonces, al igualar a 10 la expresión obtenemos la ecuación:

$$10 = 500e^{(\ln 0.8)t}$$

esto es

$$e^{(\ln 0.8)t} = \frac{10}{500} = 0.02$$

de donde aplicando $\ln$ en ambos lados

$$\ln e^{(\ln 0.8)t} = \ln 0.02$$

simplificando

$$(\ln 0.8)t = \ln 0.02$$

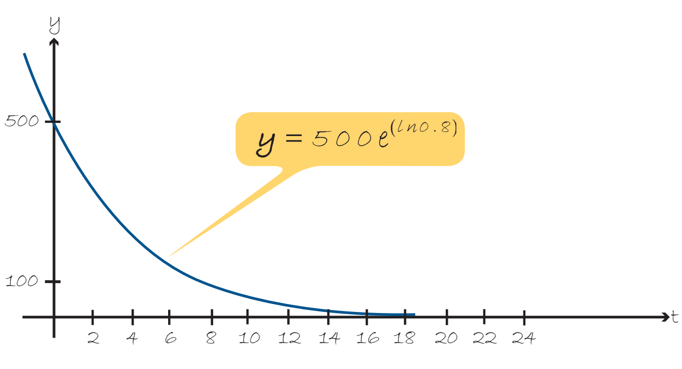
y así

$$t = \frac{\ln 0.02}{\ln 0.8} \approx \frac{-3.912}{-0.223} \approx 17.543$$

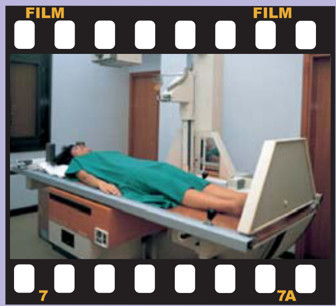
Por tanto, aproximadamente a las 17 horas y media quedarán 10 miligramos de anestésico en la sangre del paciente.

d) Utiliza un software de graficación para obtener la gráfica de la función $y(t)$.

En la siguiente gráfica se muestra cómo va disminuyendo la cantidad de anestésico en la sangre del paciente al transcurrir el tiempo.



¿Sabías que?...



El término **vida mitad** o **semivida** ha resultado ser un parámetro fundamental para el estudio de magnitudes que van disminuyendo de acuerdo a lo que se conoce como eliminaciones de primer orden. Esto es, cantidades que se eliminan en una proporción constante por unidad de tiempo.

Tal es el caso de los isótopos radioactivos, donde la vida mitad representa el periodo de tiempo necesario para que el material radioactivo se reduzca a la mitad. Esta información permite referirse a la velocidad con la que ocurren las desintegraciones nucleares, además, es una forma de describir la radioactividad de un elemento.

También, en Medicina y Farmacología, la vida mitad de un medicamento en la sangre es el tiempo que tarda en eliminarse el 50% de la concentración plasmática alcanzada por una dosis del mismo, esto es, el lapso de tiempo necesario para que la cantidad del agente presente en el cuerpo o la sangre se reduzca a la mitad mediante diversos procesos de eliminación. Este es un parámetro útil para la determinación de intervalos de aplicación del fármaco.

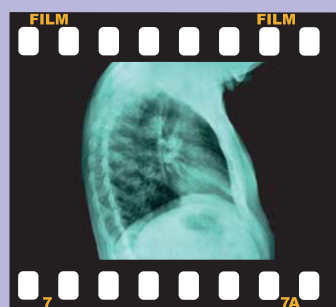
La vida mitad es un parámetro que puede ser asociado al comportamiento de estas magnitudes porque es un dato que no depende de la cantidad inicial de la magnitud bajo estudio, es decir tarda lo mismo la desintegración de la mitad de átomos de carbono 14 de una muestra de 1 gramo que de una muestra de 100 gramos... ¡5730 años!

Nota: El término vida mitad en ocasiones es confundido con el termino vida media.

¿Sabías que?...

Estamos sujetos a exposiciones radioactivas en pequeñas cantidades cuando viajamos en avión, o con las radiografías, tomografías computarizadas y resonancias magnéticas que requerimos al revisar nuestra salud con un médico.

La exposición natural a que estamos expuestos varía entre 1 y 5 milisierverts (mSv) los cuales cuantifican la cantidad que absorbe el cuerpo humano. Se conoce que una exposición de 50 a 100 mSv puede cambiar la química sanguínea, y niveles extremos entre 750 y 1000 mSv provocan desde pérdida de cabello en sólo dos semanas hasta hemorragias. La dosis máxima anual para un empleado nuclear es de 100 mSv.



Uno puede considerar que la radiación es benéfica si se usa correctamente. Los métodos de radiodiagnóstico y la radioterapia han salvado y prolongado vidas. Aplicaciones no médicas como los aceleradores y reactores proponen avances tecnológicos en la producción de energía eléctrica.

En algunos países la energía nuclear predomina sobre otras fuentes... pero en otros no... incluso Alemania y Suiza anuncian que abandonarán la energía atómica después del episodio vivido en Fukishima, Japón en marzo 11 del 2011.

¿Cuáles son las razones para que esos países prescindan de ella?

¿Cómo deberíamos reaccionar ante los accidentes nucleares que no hemos podido evitar?

CASO 4. Decaimiento exponencial. Toxicología.

El DDT fue un pesticida muy usado en la década de los años 40 del siglo pasado para el control de plagas en agricultura. Su acción no es selectiva y provoca la muerte de otros insectos benéficos además de los insectos plaga; esto además de afectar a mediano y largo plazo a otros organismos. Su uso indiscriminado y su mal manejo repercuten en consecuencias ecotóxicas, además tiene una escasa o nula biodegradabilidad. Por esta razón, su uso fue restringido e incluso prohibido en muchos países.

La vida mitad del DDT llega a los 15 años. Los científicos y ambientalistas mantienen su atención en sustancias como ésta, que continúan siendo dañinas por mucho tiempo después.

a) Construye el modelo matemático que representa el comportamiento de la cantidad de DDT en el tiempo t medido en años.

El comportamiento de esta sustancia con vida mitad de 15 años nos expresa que, si por ejemplo consideramos 100 gramos de DDT, en el lapso de tiempo de 15 años se eliminan 50 gramos de los 100 gramos originales... y de esos 50 gramos restantes, en 15 años más se eliminan 25 gramos... y de esos 25 gramos pasarán 15 años para que resten 12.5 gramos... y así sucesivamente.

Estamos ante la presencia de una magnitud que obedece un decaimiento exponencial, pues dismunuye en una proporción constante por cada 15 años. Es por ello que el modelo matemático que le representa es del tipo

$$y = f(t) = y_0 e^{kt}$$

donde el parámetro k es negativo y y_0 representa la cantidad inicial.

El valor de y_0 no lo tenemos, pero sí sabemos que en 15 años la cantidad será $\frac{y_0}{2}$ la mitad de la original. Esto nos permite determinar el valor del parámetro $k < 0$ el cual no depende de la cantidad inicial de la sustancia.

Lo que sabemos es que si y_0 es la cantidad inicial y si $t = 15$ entonces

$$y(15) = \frac{y_0}{2}$$

Sustituimos esto en el modelo propuesto:

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

$$y(15) = y_0 e^{k(15)} = \frac{y_0}{2}$$

luego

$$y_0 e^{15k} = \frac{y_0}{2}$$

de donde, independientemente del valor inicial $y_0 > 0$ tenemos

$$e^{15k} = 0.5$$

Ahora aplicamos el logaritmo natural en ambos lados de la igualdad para despejar el exponente k:

$$\ln e^{15k} = \ln 0.5$$

pero

$$\boxed{\text{fórmula}}$$

$$\ln s^{15k} = 15k$$

luego

$$15k = \ln 0.5$$

y despejamos

$$k = \frac{\ln 0.5}{15} \approx -0.0462$$

Por tanto, el modelo matemático que representa el comportamiento de la cantidad de DDT en el tiempo es

$$y(t) = y_0 e^{\frac{\ln 0.5}{15}t} \approx y_0 e^{-0.0462t}$$

b) En Estados Unidos se prohibió el uso del pesticida DDT en 1972. Supongamos que 100 gramos de DDT fueron utilizados en el año 1950. ¿Qué cantidad de esos 100 gramos se mantienen aún para el año de su prohibición?

Consideramos $y_0 = 100$ *gramos, entonces*

$$y(t) = 100e^{\frac{\ln 0.5}{15}t}$$

donde estamos considerando que en el tiempo $t = 0$ *tenemos lo ocurrido en* 1950, *esto es,*

$$y(0) = 100e^{\frac{\ln 0.5}{15}(0)} = 100e^{(0)} = 100 \text{ gramos}$$

Luego, para conocer la cantidad que resta en el año de su prohibición, en 1972, *tendremos que evaluar en* $t = 1972 - 1950 = 22$ *por tanto,*

$$y(22) = 100e^{\frac{\ln 0.5}{15}(22)} \approx 36.18173 \text{ gramos}$$

Quedan prácticamente 36 *de los* 100 *gramos originales.*

c) Supongamos que en un plantío fueron utilizadas grandes cantidades del pesticida en 1950 y que el nuevo dueño ha decidido que esa tierra solo volverá a ser sembrada cuando se elimine y quede una décima parte del pesticida que fue utilizado originalmente ¿Cuánto tiempo deberá esperarse para ello?

Tenemos que

$$y(t) = y_0 e^{\frac{\ln 0.5}{15}t}$$

donde y_0 *representa la cantidad utilizada en* 1950. *La décima parte de esta cantidad se representa por* $\dfrac{y_0}{10}$ *luego, buscamos el valor de* t *para que* $y(t) = \dfrac{y_0}{10}$

Sustituyendo en el modelo matemático

$$y(t) = y_0 e^{\frac{\ln 0.5}{15}t} = \frac{y_0}{10}$$

luego

$$e^{\frac{\ln 0.5}{15}t} = \frac{1}{10} = 0.1$$

de donde aplicando el logaritmo natural

$$\ln e^{\frac{\ln 0.5}{15}t} = \ln 0.1$$

pero

$$\ln e^{\boxed{\text{fórmula}}} = \boxed{\text{fórmula}}$$

luego

$$\frac{\ln 0.5}{15}t = \ln 0.1$$

y despejamos

$$t = 15\frac{\ln 0.1}{\ln 0.5} \approx 49.8289$$

Podemos decir que prácticamente en 50 *años han de pasar para cumplir con el requisito del nuevo dueño. Si su adquisición fue en el* 2000, *el terreno estaba en la condiciones que él requería para hacer un buen uso de esa tierra.*

¡TOMA NOTA!

Al despejar t en

$$t\ln 0.2 = \ln 0.5$$

se obtiene

$$t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.2}$$

y no $\ln \frac{0.5}{0.2}$

CASO 5. Del interés compuesto a la capitalización continua.

La conocida fórmula de interés compuesto

$$c(t) = C_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

representa la utilidad que se recibe en el tiempo t por la inversión de un capital inicial c_0 sujeto a una tasa de interés anual r que se capitaliza m veces al año.

Esto quiere decir que el interés que se obtiene al final de cada período de inversión, favorece la adquisición de una mayor cantidad de interés en el período siguiente, porque se calcula con el "nuevo" capital, el inicial sumado con los intereses ganados en el período.

Por ejemplo, en una situación hipotética de un capital de $10{,}000$ pesos, invertido a 12 períodos al año y con una tasa de interés del 4%... al final del primer año, obtendríamos

$$c(1) = 10000\left(1 + \frac{0.04}{12}\right)^{12(1)} \approx 10{,}407.41543 \text{ pesos}$$

Por su parte, el término **capitalización continua** plantea la situación de estar capitalizando continuamente, esto es, matemáticamente significa plantear la tendencia de los valores de $c(t)$ cuando el número de períodos crece indefinidamente. En nuestro lenguaje

$$c(t) = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

a) Calcula el límite anterior recordando la caracterización del número de Euler para obtener el modelo matemático que representa el capital que se recibe después de t tiempo de inversión de un capital inicial c_0.

Recordamos que el número de Euler se caracteriza mediante el límite

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

donde visualizamos que a la cantidad 1 *se le agrega el recíproco de un número* n *que crece indefinidamente, y esa suma se eleva a la potencia* n *. . . que crece indefinidamente.*

Con esto en mente, y observando el límite que queremos calcular, podemos considerar que

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}} = e$$

pues $\frac{r}{m} \to 0$ *ya que* $m \to \infty$ *y* $\frac{m}{r} \to \infty$ *es justo el recíproco del número que se suma al* 1.

Arreglamos algebraicamente el límite de la capitalización continua para que aparezca la última expresión que define a e*:*

$$c(t) = \lim_{m \to \infty} c_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = \lim_{m \to \infty} c_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{mt}{r}(r)}$$

$$= \lim_{m \to \infty} c_0 \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt} = c_0 e^{rt}$$

Por tanto, la fórmula para la capitalización continua es una función exponencial

$$c(t) = c_0 e^{rt}$$

donde r *es el parámetro que representa la tasa de interés anual y* c_0 *es el capital invertido inicialmente.*

b) Compara la utilidad de la inversión de $10{,}000$ pesos a un 4% de interés compuesto a 12 periodos con la que se invierte a capitalización continua durante 2 años de inversión.

La utilidad capitalizando en 12 *períodos es*

$$c(2) = 10000\left(1 + \frac{0.04}{12}\right)^{12(2)} \approx 10{,}831.4296$$

y en la capitalización continua es

$$c(2) = 10000e^{(0.04)(2)} \approx 10832.8707$$

Observamos que es prácticamente la misma utilidad en los dos tipos de inversiones... si ambos se ofrecen con la misma tasa de interés anual... ahí es donde las instituciones bancarias pueden variar las tasas de interés para hacer más atractivo un tipo de inversión que otra.

c) Encuentra cuánto tiempo debo esperar para que invirtiendo los $10{,}000$ pesos en la capitalización continua pueda yo retirar mi utilidad recibiendo $12{,}000$ pesos.

Consideramos el modelo igualado a esa cantidad:

$$y(t) = 10000e^{0.04t} = 12000$$

$$e^{0.04t} = \frac{12000}{10000} = 1.2$$

aplicamos $\ln$ *para simplificar:*

$$\ln e^{0.04t} = \ln 1.2$$
$$0.04t = \ln 1.2$$

$$t = \frac{\ln 1.2}{0.04} \approx 4.558$$

Prácticamente, cuatro años y medio harán que esos $10{,}000$ *pesos se conviertan en* $12{,}000$ *pesos.*

Caso 6. Vida media en Arqueología

La tasa de decaimiento del Carbono-14 permite determinar las edades de rocas y fósiles. Desde que se incorpora a un cristal de mineral en crecimiento, la cantidad original de este isótopo comienza a disminuir a un ritmo fijo y se crea cierto porcentaje de productos derivados por intervalos largos de tiempo. Estos hallazgos en las rocas sirven al geólogo como una especie de "cronómetro".

Consideremos que un cráneo fue descubierto en una excavación arqueológica y que posee 15% de la cantidad original de Carbono-14. Calcula su edad tomando en cuenta que la vida media de este isótopo es de 5730 años.

Consideremos que C_0 *es la cantidad original de Carbono-*14*, es decir, la cantidad que tenía el ser al que perteneció el cráneo cuando éste vivía. Entonces, la función*

$$C(t) = C_0 e^{kt}$$

da cuenta de la cantidad C *de Carbono-*14 *que queda después de transcurridos* t *años desde que el ser murió. Como actualmente se encuentra en el cráneo* 15% *de la cantidad entonces*

$$C(t) = 0.15C_0$$

Igualamos estas expresiones obteniendo

$$0.15C_0 = C_0 e^{kt}$$

lo nos permitirá calcular el tiempo que ha transcurrido al despejar t *de la ecuación anterior.*

Cancelamos C_0

$$0.15 = e^{kt}$$

aplicamos $\ln$ *para simplificar*

$$\ln(0.15) = \ln e^{kt} = kt$$

luego,

$$t = \frac{\ln(0.15)}{k}$$

Tenemos el problema de no conocer el valor del parámetro k *en la función. Podemos calcularlo ya que conocemos la vida mitad del Carbono-*14*; eso haremos en seguida:*

Tenemos que $C(5730) = \frac{C_0}{2}$ *además* $C(5730) = C_0 e^{k(5730)}$

luego, igualamos las expresiones para $C(5730)$

$$\frac{C_0}{2} = C_0 e^{k(5730)}$$

Aplicamos $\ln$ *y simplificamos:*

$$\ln 0.5 = \ln e^{5730k} = 5730k$$

luego despejamos k

$$k = \frac{\ln(0.5)}{5730}$$

Por tanto, determinado el parámetro k, volvemos a nuestra expresión para calcular el valor de t *que representa la edad del cráneo:*

$$t = \frac{\ln(0.15)}{k} = \frac{\ln(0.15)}{\frac{\ln(0.5)}{5730}} = 5730\frac{\ln(0.15)}{\ln(0.5)}$$

y finalmente, con ayuda de la calculadora científica encontramos que:

$$t = 15,682.813$$

Por lo tanto, concluimos que la edad del cráneo descubierto es de aproximadamente 15,683 años.

¿Sabías que?...

Expertos en radiaciones nucleares señalan que casi todos los contaminantes que existen en el núcleo de un reactor nuclear pueden acumularse en nuestro organismo por tener gran afinidad con nuestros elementos biológicos.

Más de 60 contaminantes radioactivos se producen con la fisión del uranio-238 en actividades relacionadas con la energía nuclear; pero algunos de ellos tienen una vida muy larga mientras que otros muy corta.

El yodo-129, el estroncio-90 y el cesio-137 son los que ofrecen mayores consecuencias en nuestro cuerpo. La vida media del estroncio-90 es de 28 años, y la del cesio-137 es de 30 años.

En cuanto al yodo, realmente la mayoría de sus isótopos radioactivos tienen una vida media muy corta y se transforma en compuestos estables, pero la forma radiactiva que se genera en las plantas nucleares tiene una vida media de… ¡15.7 millones de años!

El yodo 131 tiene una vida media corta, de apenas 8.1 días y se utiliza como herramienta de diagnóstico para probar la actividad de la glándula tiroides. En cambio, el yodo 129 desprendido de la explosión de Chernóbil (Ucrania, 1986) se relaciona con la multiplicación por 10 del número de casos de cáncer de tiroides en Centroeuropa.

No obstante, es la misma capacidad de este compuesto radioactivo de ser localizable la que le ha hecho útil en los estudios de monitoreo del agua de lluvia en el seguimiento del accidente en Chernóbil… un trazador que permanecerá… prácticamente ¡por siempre!

PROBLEMA PROPUESTO 1

La conversión de ciclopropano en propeno en fase gaseosa es una reacción del tipo de primer orden, lo cual establece que, la razón con la cual decrece la cantidad y de ciclopropano respecto al tiempo está dada por

$$y'(t) = k\,y(t) \quad \text{moles/minuto}$$

Para esta reacción a 500 grados centígrados, se tiene que $k = -0.0402$

Supongamos que la reacción se realiza teniendo esa temperatura y está actuando sobre 1 mol de la sustancia.

a) Construye la función exponencial que satisface la ecuación diferencial

$$y'(t) = k\,y(t)$$

para modelar la cantidad de ciclopropano a medida que transcurre el tiempo.

Respuesta:

$y(t) = e^{-0.0402t}$

b) Calcula el tiempo en que la conversión elimina $\frac{1}{4}$ de mol, $\frac{1}{2}$ de mol y $\frac{3}{4}$ de mol. Aproxima a 5 decimales en los tres casos.

Respuesta:

Eliminar $\frac{1}{4}$ de mol $t = \dfrac{\ln(.75)}{-0.0402} \approx 7.15627$

Eliminar $\frac{1}{2}$ de mol $t = \dfrac{\ln(.5)}{-0.0402} \approx 17.24247$

Eliminar $\frac{3}{4}$ de mol $t = \dfrac{\ln(0.25)}{-0.0402} \approx 34.48493$

c) Interpreta cómo disminuye estas cantidades a partir de datos obtenidos en *b*).

Respuesta:

El tiempo para disminuir una cuarta parte del ciclopropano va en aumento. La cantidad disminuye cada vez más lento.
Su gráfica decreciente y cóncava hacia arriba.

¿Sabías que?...

El accidente nuclear de Japón en el 2011 se ha catalogado al nivel máximo tal como el ocurrido hace 25 años en Ucrania (1986).

No obstante, de la agencia de seguridad nuclear en Japón reportan diferencias entre estos dos eventos trágicos que hacen pensar que la situación en Fukushima no es tan devastadora como la de Chernóbil.

Una de ellas es que en Ucrania el núcleo de un reactor sufrió una explosión incontrolada estando en funcionamiento, mientras que en Japón, las detonaciones de hidrógeno afectaron el exterior de los reactores, sin lograr destruir por completo los núcleos.

Los operarios han trabajado para enfriar y estabilizar los reactores, lo que es posible ya que las emisiones de yodo 131 equivale al 10% de las emitidas en Chernóbil.

¿Cuánto tiempo pasará para que esta cantidad de yodo 131 en Fukushima se desintegre?... podemos estar seguros que el mismo tiempo que se requiere en Chernóbil... ahí no está la diferencia.

Problema Propuesto 2

El único isótopo estable del sodio es el sodio-23, que tiene una vida media de 14.8 horas. En Medicina es utilizado para el diagnóstico del funcionamiento del sistema circulatorio. Determina la función exponencial que modela la cantidad de sodio-23 en el organismo en función del tiempo. Determina además la ecuación diferencial que satisface dicha función.

Respuesta:

Ecuación diferencial: $y'(t) = \dfrac{\ln(.5)}{14.8}\, y(t)$

Problema Propuesto 3

Un empresario decide proceder incrementando el precio de su producto continuamente de modo que cada año el incremento sea de un 5%. Esto quiere decir que, si y representa el precio del producto, en pesos, y t el tiempo en años, entonces la razón de cambio del precio respecto al tiempo es proporcional al precio del producto $y'(t) = 0.05y(t)$

a) Construye la función exponencial que modela el comportamiento del precio de su producto.

Respuesta:

$y(t) = 500e^{0.05t}$

b) ¿Cuál será el costo del producto al haber transcurrido 3 años?

Respuesta:

$y(2) = 500e^{0.1} \approx 552.585$ pesos

c) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que el costo del producto se haya duplicado?

Respuesta:

$t = \dfrac{\ln 2}{0.05} \approx 13.863$ años

Problema propuesto 4

Se administra media tableta de 2 miligramos del sedante conocido como Valium (Diazepam), uno de los más lentos para eliminar. Desde el momento que se absorbe en la sangre, el organismo comienza a eliminarlo de acuerdo con el modelo exponencial

$$y(t) = e^{-0.08338t}$$

donde t se mide en días.

Calcula la vida mitad, es decir el tiempo en que la cantidad del sedante ha llegado a la mitad.

Respuesta:

8.3 días

¿Sabías que?...

Un modelo de crecimiento **poblacional restringido** se ajusta mejor a la realidad porque las poblaciones no pueden mantener un crecimiento exponencial por tiempo indefinido.

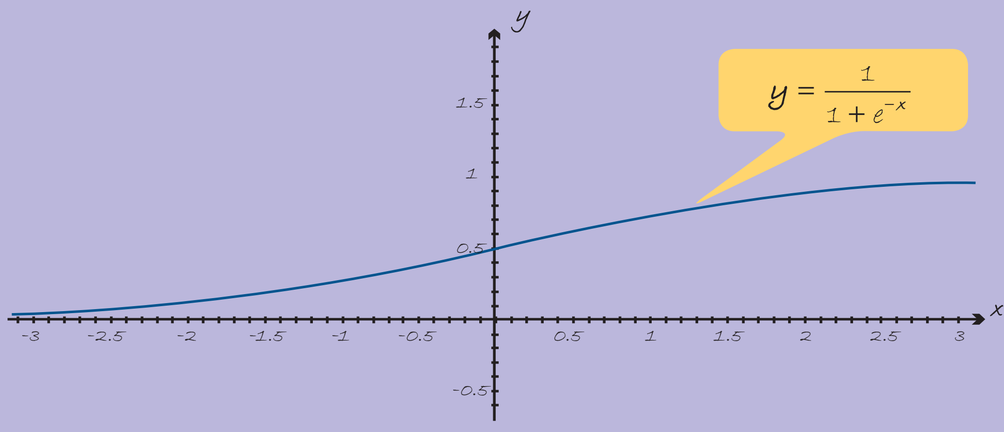
Los **modelos logísticos** y su extensión a casos de competencia entre especies, o de interacción tipo predador-presa, son modelos más realistas, donde se considera que los recursos para subsistir no son ilimitados y la tasa de crecimiento es variable.

Es esperable que en condiciones normales la población aumente con tasa de crecimiento aproximadamente constante, pero al llegar a cierta densidad de población, la competencia por espacio y recursos deberá afectar el modelo haciendo que el ritmo de crecimiento sea inhibido.

Verhulst propone este modelo en 1838 que responde a la ecuación diferencial logística

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - P(t)\right)$$

y cuya gráfica manifiesta un crecimiento cada vez más rápido, llegando a un punto de inflexión donde continúa creciendo pero cada vez más lento, y tiende a estabilizarse en un valor.



La función logística, solución de esta ecuación diferencial, tiene un amplio rango de aplicaciones para lo cual se afecta en su forma sólo con el efecto de parámetros que intervienen en la ecuación diferencial y que reflejan las características del contexto real que está modelando.

Entre las aplicaciones se encuentra en Medicina la modelación de crecimiento de tumores; también se utiliza para representar variaciones periódicas en las condiciones climáticas; en Economía su uso es para modelar la difusión de innovaciones, incluso en Lingüística, pues el cambio en el lenguaje ofrece características que hacen pensar en un comportamiento que se expande rápidamente en el principio del proceso de difusión, y que después de cierto periodo en que se ha adoptado más universalmente, se expande pero de un modo más lento.

Problema propuesto 5

¿Qué porcentaje del capital invertido recibo de intereses después de invertir por un año un millón de pesos a capitalización continua con una tasa de interés anual del 4.5 %?

Respuesta:

El porcentaje es 4.6 %.

Problema propuesto 6

Asumamos que en el año 2005 la población de Australia era de 20,090,437 habitantes y aumentaba a un ritmo constante de crecimiento anual de 1.3 %, mientras que la población de Camerún era de 16,380,005 habitantes y crecía a un ritmo anual de 1.9 %. Calcula en cuántos años la población de Camerún será igual a la de Australia bajo este modelo de crecimiento.

Respuesta:

34 años

¿Sabías que?...

La ecuación diferencial logística

$$x'(t) = rx(1-x)$$

se revivió en los años setentas del siglo pasado con la incorporación de asistencia electrónica y computacional dando lugar a uno de los más bellos descubrimientos en la ciencia que ha sido llamada la Teoría del Caos.

Si se reemplaza la ecuación logística por la ecuación cuadrática recurrente

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$$

se está expresando un modelo matemático que tiene una retroalimentación simple que puede ser manipulada cómodamente con ayuda de las tecnologías disponibles.

En el modelo, x_n se interpreta como la población actual, y x_{n+1} como la población en el año siguiente.

Así se puede modelar la población de una especie como función de la población en el año anterior.

El modelo sin duda resulta mejor para el crecimiento de la población, pero tiene ciertas características desde el punto de vista matemático que han dado lugar a resultados nuevos en esta ciencia que ahora se nutre del poder de la tecnología.

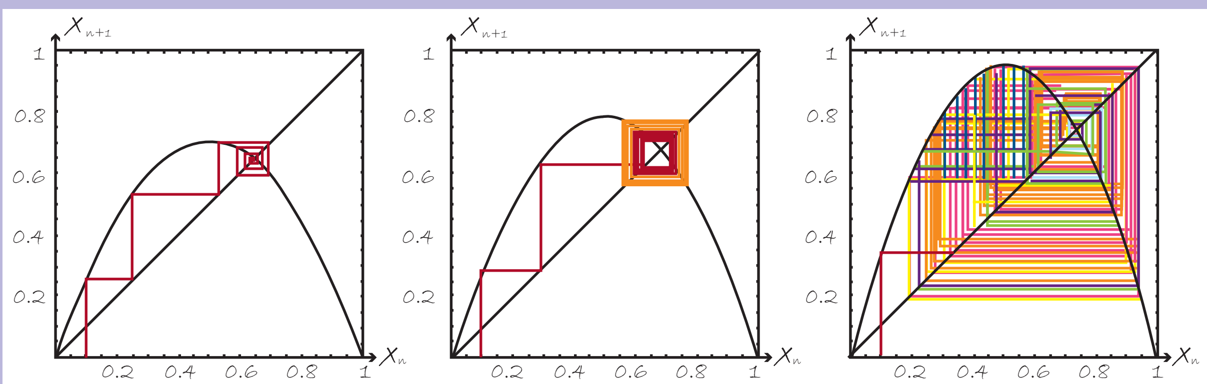
Para analizar el comportamiento a largo plazo, debe repetirse la fórmula una y otra vez y ver lo que ocurre… esto es lo que se llama **iteración**.

Si llamamos a $y = x_{n+1}$ y $x = x_n$ en la ecuación de recurrencia, reconoceremos que se trata de una función cuadrática que podemos graficar:

$$y = rx(1-x)$$

Cada vez que se fija un valor de x_0 y r podemos generar lo que se conoce como el **mapa cuadrático** que consiste en unir los puntos $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots (x_n, x_{n+1}), \ldots$ que se van generando en forma iterada.

El mapa cuadrático es capaz de mostrar un comportamiento muy complicado. En las siguientes imágenes puedes apreciar un diagrama donde se ha utilizado un procedimiento gráfico para unir los puntos consecutivos obtenidos con el proceso algorítmico de iteración.



En el primer caso, con $x_0 = 0.2$ y $r = 2.8$ el proceso de iteración converge a un número.

En el segundo, con $x_0 = 0.2$ y $r = 3.1$ el proceso de iteración lleva a dos valores (alturas) en los que se acumulan los puntos.

En el tercer caso, con $x_0 = 0.2$ y $r = 3.8$ tenemos el ejemplo de un comportamiento caótico donde los puntos visitan eventualmente toda vecindad en un subintervalo de $(0,1)$

¿Sabías que?...

En 1977 Feigenbaum mostró la existencia de un número que será tan renombrado como el mismo π y e

$$\delta = 4.669201609102990671853203820...$$

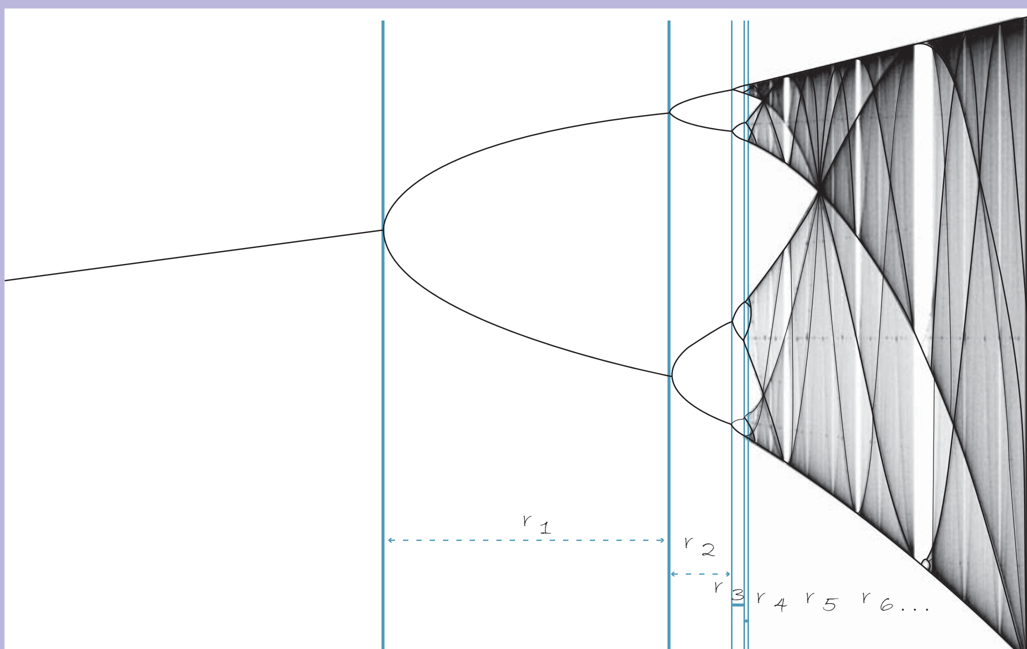
La importancia de este resultado se reconoce cuando el número (δ) se comienza a encontrar en experimentos de Física. Pero el origen de su percepción corresponde con lo que se llama un Diagrama de bifurcación de la Teoría del Caos.

En la siguiente figura se coloca en el eje horizontal el parámetro r de la ecuación logística

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

y se observa que con su variación cosas interesantes comienzan a ocurrir.

Dependiendo de los valores de r se tiene que la sucesión de puntos converge a un valor, pero al aumentar r se llega a producir una bifurcación, pues son dos los valores a los que queda "atraída" la sucesión (recuerda lo que pasó en el mapa cuadrático)... y si se aumenta r llega un valor de este parámetro en que en cada bifurcación se producen otras dos, luego los puntos oscilan entre cuatro valores a los que queda "atraída" la sucesión... y así se aumenta a bifurcaciones de período 8, 16, ... hasta llegar a valores de r en que se produce el comportamiento caótico, donde los valores se toman completamente al azar. Sin embargo llega de nuevo un valor de r donde las bifurcaciones son de periodo 3, 6, 12, 24... y nuevamente al caos.



Feigenbaum mostró que la razón de la distancia entre las sucesivas bifurcaciones converge rápidamente a una constante.

Si llamamos r_k a los valores de r donde los periodos se vuelven inestables, podemos definir la constante de Feigenbaum como

$$\delta = \lim_{k \to \infty} \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+2} - r_{k+1}}$$

Este número tan especial δ caracteriza la transición al caos. . .

Derivada y antiderivada de funciones exponenciales base e.

Hasta el momento conocemos la **derivada** de la función **exponencial natural**:

si $y = f(x) = e^x$ entonces $y' = f'(x) = e^x$

Pero esto mismo nos da a conocer la **antiderivada** de la función **exponencial natural**:

si $y = f(x) = e^x$ entonces $F(x) = e^x + C$

La constante C se suma a la expresión e^x porque la derivada de esa constante C es 0, luego, cualquiera de las funciones de la familia $F(x) = e^x + C$ tiene su derivada igual a $f(x) = e^x$

También ya conocemos que una constante multiplicando a la función **exponencial natural** vuelve a aparecer como factor en su derivada; de hecho esa constante representa el valor inicial en la función.

Para la **derivada:**

si $y = f(x) = y_0\, e^x$ entonces

$y' = f'(x) = y_0\, e^x$

y para la **antiderivada** tenemos

si $y = f(x) = y_0\, e^x$ entonces

$F(x) = y_0\, e^x + C$

La situación problema que ha guiado este tema nos dio a conocer además lo que sucede al obtener la **derivada** cuando una constante multiplica a la variable x en el exponente, cuando la ecuación diferencial establece la proporcionalidad $f'(x) = k f(x)$

Para la **derivada:**

si $y = f(x) = y_0 e^{kx}$ entonces

$$y' = f'(x) = k y_0 e^{kx}$$

y si pensamos ahora en el proceso **inverso** del anterior, para la

antiderivada:

si $y = f(x) = y_0 e^{kx}$ entonces $F(x) = \frac{y_0}{k} e^{kx} + C$

¡TOMA NOTA!

Observa que en

$f'(x) = e^x + C$

la constante C

ya no representa

el valor inicial...

¡TOMA NOTA!

El valor inicial

siempre se obtiene

al evaluar

$f(0) = e^0 + C$

$= 1 + C$

Es simple verificar esto, pues si derivas $F(x)$ al aparecer k como factor en el exponente, al derivar se simplifica con la k que se tiene en el denominador, con lo cual regresas a $f(x)$.

Ampliemos un poco nuestro conocimiento de estos procesos algebraicos de derivar y antiderivar funciones exponenciales, esa es la intención de este último apartado que retroalimentará la habilidad algorítmica en el cálculo de derivadas y antiderivadas que hemos estado desarrollando.

Podemos obtener la derivada de la función

$$y = f(x) = e^{kx+b}$$

donde agregamos la constante b sumando al exponente, si utilizamos conocimientos previos de las propiedades de los exponentes.

Expresemos la función en la siguiente forma:

$$y = f(x) = e^{kx+b} = e^{kx}e^{b} = e^{b}e^{kx}$$

¡TOMA NOTA!

Recuerda:

$e^a e^b = e^{a+b}$

$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$e^{ab} = (e^a)^b$

¡TOMA NOTA!

Recuerda:

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln a^b = b \ln a$

Como e^{b} es una constante que aparece como factor que multiplica a e^{kx}, al derivar la función, aparecerá nuevamente como factor en la derivada:

$$y' = f'(x) = e^{b}\left(e^{kx}\right)k = k\,e^{b}\left(e^{kx}\right)$$

y trabajando nuevamente los exponentes de esta última expresión obtenemos:

$$y' = f'(x) = k\,e^{b}\left(e^{kx}\right) = k\left(e^{kx+b}\right)$$

Por lo tanto, hemos mostrado que la derivada de

$$y = f(x) = e^{kx+b}$$

sigue siendo esa misma función pero multiplicada por k, el coeficiente del término x en el exponente.

De una manera general, podemos establecer la regla algorítmica para derivar el tipo de funciones que estamos estudiando:

La **derivada** de $y = f(x) = y_0\,e^{kx+b}$ es

$$y' = f'(x) = k\,y_0\,e^{kx+b}$$

La **antiderivada** de $y = f(x) = y_0\,e^{kx+b}$ es

$$F(x) = \frac{y_0}{k}e^{kx+b} + C$$

Estas últimas expresiones sintetizan nuestro conocimiento algorítmico acerca de los procesos inversos de **derivación** y **antiderivación**. Establecemos este hecho como lo hicimos anteriormente en un arreglo como el siguiente:

$$F(x) = \frac{y_0}{k}e^{kx+b} + C$$

antiderivamos

$$f(x) = y_0\,e^{kx+b}$$

derivamos

$$f'(x) = k\,y_0\,e^{kx+b}$$

Calcula la **derivada** y la **antiderivada** de cada función. Observa que en ocasiones deberás realizar algunas simplificaciones algebraicas en la función hasta llevarla a la forma $y = y_0\, e^{kx+b}$ que es la que sabemos trabajar algorítmicamente. Podrás comprobar tus respuestas al final.

1.

Antiderivada	
Función	$f(x) = \frac{3}{5}\, e^{5x}$
Derivada	

2.

Antiderivada	
Función	$f(t) = 10000\, e^{\frac{t}{1000}}$
Derivada	

3.

Antiderivada	
Función	$f(x) = \frac{e^{-3x+2}}{2}$
Derivada	

4.

Antiderivada	
Función	$f(x) = 35\, e^{10-x} + 5$
Derivada	

5.

Antiderivada	
Función	$f(t) = 250\, e^{\frac{50t+5}{60}}$
Derivada	

6.

Antiderivada	
Función	$f(x) = 12\, e^{3x+2}\, e^{8-4x}$
Derivada	

7.

Antiderivada	
Función	$f(t) = 0.01\left(e^{-t} + e^{t}\right)$
Derivada	

8.

Antiderivada	
Función	$f(x) = \frac{1}{2}\, e^{\frac{2x-3}{5}} + 2x - 3$
Derivada	

9.

Antiderivada	
Función	$f(t)=\frac{1}{e^{3t}}+3e^{\frac{t}{3}}$
Derivada	

10.

Antiderivada	
Función	$f(x)=\frac{e^{4x-2}}{5e^{2x}}+\frac{5}{e^{4x-2}}$
Derivada	

11.

Antiderivada	
Función	$y(x)=e^{\frac{x}{k}}+\frac{1}{k}x$
Derivada	

12.

Antiderivada	
Función	$y(t)=-e^{-kt}+e^{k}+t$
Derivada	

13

Antiderivada	
Función	$x(t) = e^{\alpha t}\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right) = e^{2\alpha t} + 1$
Derivada	

14.

Antiderivada	
Función	$y(x) = \dfrac{e^{x} + 1}{e^{x}} = 1 + \dfrac{1}{e^{x}} = 1 + e^{-x}$
Derivada	

15.

Antiderivada	
Función	$y(x) = \dfrac{\alpha e^{2x} + \beta}{e^{x}} = \dfrac{\alpha e^{2x}}{e^{x}} + \dfrac{\beta}{e^{x}} = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$
Derivada	

1.

Antiderivada	$F(x) = \frac{3}{25} e^{5x} + C$
Función	$f(x) = \frac{3}{5} e^{5x}$
Derivada	$f'(x) = 3 e^{5x}$

2.

Antiderivada	$F(t) = 10^7 e^{\frac{t}{1000}} + C$
Función	$f(t) = 10000 e^{\frac{t}{1000}}$
Derivada	$f'(t) = 10 e^{\frac{t}{1000}}$

3.

Antiderivada	$F(x) = -\frac{1}{6} e^{-3x+2} + C$
Función	$f(x) = \frac{e^{-3x+2}}{2} = \frac{1}{2} e^{-3x+2}$
Derivada	$f'(x) = -\frac{3}{2} e^{-3x+2}$

4.

Antiderivada	$F(x) = -35\,e^{10-x} + 5x + C$
Función	$f(x) = 35\,e^{10-x} + 5$
Derivada	$f'(x) = -35\,e^{10-x}$

5.

Antiderivada	$F(t) = \frac{6}{5}(250)\;e^{\frac{5}{6}t + \frac{5}{60}} + C = 300\;e^{\frac{5}{6}t + \frac{5}{60}} + C$
Función	$f(t) = 250\;e^{\frac{50t+5}{60}} = 250\;e^{\frac{5}{6}t + \frac{5}{60}}$
Derivada	$f'(t) = \frac{5}{6}(250)\;e^{\frac{5}{6}t + \frac{5}{60}} = \frac{625}{3}\;e^{\frac{5}{6}t + \frac{5}{60}}$

6.

Antiderivada	$F(x) = -12\;e^{-x+10} + C$
Función	$f(x) = 12\,e^{3x+2}\;e^{8-4x} = 12\,e^{-x+10}$
Derivada	$f'(x) = -12\,e^{-x+10}$

7.

Antiderivada	$F(t) = 0.01\left(-e^{-t} + e^{t}\right) + C$
Función	$f(t) = 0.01\left(e^{-t} + e^{t}\right) = 0.01e^{-t} + 0.01e^{t}$
Derivada	$f'(t) = -0.01e^{-t} + 0.01e^{t} = 0.01\left(e^{t} - e^{-t}\right)$

8.

Antiderivada	$F(x) = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)e^{\frac{2x-3}{5}} + x^2 - 3x + C$ $= \frac{5}{4}e^{\frac{2x-3}{5}} + x^2 - 3x + C$
Función	$f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{2x-3}{5}} + 2x - 3$
Derivada	$f(t) = \frac{1}{3}e^{-3t} + 9e^{\frac{t}{3}}$

9.

Antiderivada	$f(t) = \frac{1}{3}e^{-3t} + 9e^{\frac{t}{3}} + C$
Función	$f(t) = \frac{1}{e^{3t}} + 3e^{\frac{t}{3}} = e^{-3t} + 3e^{\frac{t}{3}}$
Derivada	$f'(t) = -3e^{-3t} + 3\left(\frac{1}{3}\right)e^{\frac{t}{3}}$ $= -3e^{-3t} + e^{\frac{t}{3}}$

10.

Antiderivada	$F(x)=\frac{1}{10}e^{2x-2}-\frac{5}{4}e^{-4x+2}+c$
Función	$f(x)=\frac{e^{4x-2}}{5e^{2x}}+\frac{5}{e^{4x-2}}=\frac{1}{5}e^{2x-2}+5e^{-4x+2}$
Derivada	$f'(x)=\frac{2}{5}e^{2x-2}-20e^{-4x+2}$

11.

Antiderivada	$Y(x)=k\,e^{\frac{x}{k}}+\frac{x^2}{2k}+c$
Función	$y(x)=e^{\frac{x}{k}}+\frac{1}{k}x=e^{\frac{1}{k}x}+\frac{1}{k}x$
Derivada	$y'(x)=\frac{1}{k}e^{\frac{x}{k}}+\frac{1}{k}$

12.

Antiderivada	$Y(t)=\frac{1}{k}e^{-kt}+e^{k}t+\frac{t^2}{2}+c$
Función	$y(t)=-e^{-kt}+e^{k}+t$
Derivada	$y'(t)=k\,e^{-kt}+1$

13.

Antiderivada	$X(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha t} + t + c$
Función	$x(t) = e^{\alpha t}\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right) = e^{2\alpha t} + 1$
Derivada	$x'(t) = 2\alpha\, e^{2\alpha t}$

14.

Antiderivada	$Y(x) = x - e^{-x} + c$
Función	$y(x) = \frac{e^x + 1}{e^x} = 1 + \frac{1}{e^x} = 1 + e^{-x}$
Derivada	$y'(x) = -e^{-x}$

15.

Antiderivada	$Y(x) = \alpha e^x - \beta e^{-x} + c$
Función	$y(x) = \frac{\alpha e^{2x} + \beta}{e^x} = \frac{\alpha e^{2x}}{e^x} + \frac{\beta}{e^x} = \alpha e^x + \beta e^{-x}$
Derivada	$y'(x) = \alpha e^x - \beta e^{-x}$

1.7 Valor Exacto del cambio acumulado. Modelo trigonométrico.

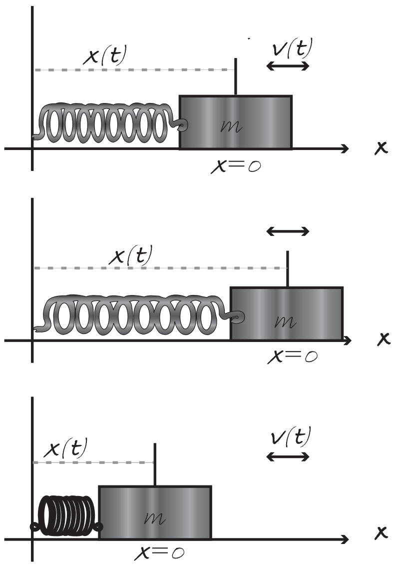
Este tema nuevamente es ocasión para introducir otro modelo matemático. Su surgimiento lo motiva la problemática de predicción ubicada ahora en un contexto real donde la característica de periodicidad plantea diferencias fundamentales con respecto a los modelos polinomiales y exponenciales. La idea que ha guiado la interacción con el Cálculo en este texto ha consistido en predecir el comportamiento (cualitativo y cuantitativo) de una magnitud a través de conocer el comportamiento de su razón de cambio (derivada) o bien, a través de conocer una relación entre esta última y la magnitud en estudio. Dicha relación se expresa en lo que hemos identificado como una ecuación diferencial. A partir de la información dada, y realizando un proceso de aproximación numérico que llevamos a sus últimas consecuencias a través de la noción de límite, podremos identificar en una representación algebraica el nuevo modelo matemático que refleje las características de la situación problema bajo análisis; lo que asegura que el proceso de aproximación generado es eficaz para el propósito de modelación. Las funciones seno y coseno y el estudio de los efectos gráficos ocasionados por parámetros introducidos en su expresión algebraica, promoverán la visualización y con ello su aplicación en la modelación de eventos periódicos.

Situación Problema 1.7

Un sistema masa resorte consiste de una masa m unida a un resorte que su a vez esta fijo en una pared. Suponemos que no hay rozamiento sobre la superficie horizontal de modo que el movimiento que experimenta la masa oscila continuamente entre dos valores extremos. Siendo $x(t)$ y $v(t)$ la posición y la velocidad en todo tiempo de la masa del sistema (libre de rozamiento), se tiene que se cumple el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$



a) La ley de Hooke establece que la fuerza de restitución de un resorte es proporcional a su elongación o compresión, esto es, $F = -k\,x$, donde el signo negativo indica que la fuerza siempre se opone al movimiento. Utiliza esta expresión para deducir la segunda de las ecuaciones del sistema.

De acuerdo con la segunda ley de Newton sabemos que la suma de fuerzas en el sistema es igual al producto de la masa por la aceleración; en este caso

$$-k\,x(t) = m\,a(t)$$

como la aceleración es la razón de cambio de la velocidad; esto es, la derivada de la velocidad, entonces expresamos

$$a(t) = v'(t)$$

y sustituimos, en nuestra expresión arriba:

$$-k\,x(t) = m\,v'(t)$$

Despejamos $v'(t)$ *y obtenemos*

$$v'(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Por tanto, se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

que rige el comportamiento de las magnitudes $x(t)$ *y* $v(t)$ *en el sistema masa resorte.*

b) Completa la siguiente tabla con valores aproximados de las magnitudes correspondientes a $x(t)$ y $v(t)$ en el caso especial de $k = 1$ $m = 1$, y condiciones iniciales $x(0) = 0$, $v(0) = 1$. Utiliza el hecho fundamental que nos ha permitido aproximar el cambio de la magnitud M en un intervalo:

$$M(t_f) = M(t_i) + \Delta M\,[t_i, t_f]$$

$$M(t_f) \approx M(t_i) + M'(t_i)\Delta t$$

donde "i y f" representan las palabras "inicial" y "final". Utiliza todas las cifras decimales que aparezcan en el procedimiento.

t	$x(t)$	$v(t)$	$v'(t)$
0	0	1	0
.1			
.2			
.3			
.4			
.5			

Para calcular los valores en las celdas de la tabla utilizamos el hecho fundamental aplicado en el valor de t correspondiente. Ponemos esos cálculos numéricos en las celdas utilizando el lenguaje simbólico apropiado.

t	$x(t)$	$v(t)$	$v'(t) = -x(t)$	Δt
0	$x(0) = 0$	$v(0) = 1$	$v'(0) = -x(0)$ $= 0$	0.1
0.1	$x(0.1) \approx x(0) + x'(0)\Delta t$ $= x(0) + v(0)(0.1)$ $= 0 + 1(0.1) = 0.1$	$v(0.1) \approx v(0) + v'(0)\Delta t$ $= v(0) - x(0)(0.1)$ $= 1 - (0)(0.1) = 1$	$v'(0.1) = -x(0.1)$ $= -0.1$	
0.2	$x(0.2) \approx x(0.1) + x'(0.1)\Delta t$ $= x(0.1) + v(0.1)(0.1)$ $= 0.1 + 1(0.1) = 0.2$	$v(0.2) \approx v(0.1) + v'(0.1)\Delta t$ $= v(0.1) - x(0.1)(0.1)$ $= 1 - (0.1)(0.1) = 0.99$	$v'(0.2) = -x(0.2)$ $= -0.2$	
0.3	$x(0.3) \approx x(0.2) + x'(0.2)\Delta t$ $= x(0.2) + v(0.2)(0.1)$ $= 0.2 + 0.99(0.1) = 0.299$	$v(0.3) \approx v(0.2) + v'(0.2)\Delta t$ $= v(0.2) - x(0.2)(0.1)$ $= 0.99 - (0.2)(0.1) = 0.97$	$v'(0.3) = -x(0.3)$ $= -0.299$	
0.4	$x(0.4) \approx x(0.3) + x'(0.3)\Delta t$ $= x(0.3) + v(0.3)(0.1)$ $= 0.299 + 0.97(0.1)$ $= 0.396$	$v(0.4) \approx v(0.3) + v'(0.3)\Delta t$ $= v(0.3) - x(0.3)(0.1)$ $= 0.97 - (0.299)(0.1)$ $= 0.9401$	$v'(0.4) = -x(0.4)$ $= -0.396$	
0.5	$x(0.5) \approx x(0.4) + x'(0.4)\Delta t$ $= x(0.4) + v(0.4)(0.1)$ $= 0.396 + 0.9401(0.1)$ $= 0.49001$	$v(0.5) \approx v(0.4) + v'(0.4)\Delta t$ $= v(0.4) - x(0.4)(0.1)$ $= 0.9401 - (0.396)(0.1)$ $= 0.9005$	$v'(0.5) = -x(0.5)$ $= -0.49001$	

Rellenamos la tabla con los valores numéricos calculados:

t	$x(t)$	$v(t)$	$v'(t)$	Δt
0	0	1	0	0.1
0.1	0.1	1	−0.1	
0.2	0.2	0.99	−0.2	
0.3	0.299	0.97	−0.299	
0.4	0.396	0.9401	−0.396	
0.5	0.49001	0.9005	−0.49001	

c) Usa en tu computadora una hoja de cálculo para implementar el procedimiento numérico y construir las gráficas de $x(t)$ y $v(t)$ para t entre los valores 0 y 6.3. Hazlo para el caso especial que estamos considerando, de $k = 1$, $m = 1$ y el supuesto de que $x(0) = 0$ y $v(0) = 1$. Utiliza $\Delta t = 0.01$.

La hoja de cálculo permite hacer eficiente el procedimiento con las operaciones numéricas y precisión que dispongamos. El valor de $\Delta t = 0.01$ *produce una gran cantidad de valores para ambas magnitudes* $x(t)$ *y* $v(t)$. *Mostramos enseguida partes de los cálculos realizados, recordando con la simbología matemática las operaciones que el recurso tecnológico realiza ante nuestra solicitud.*

t	$x(t)$	$v(t)$	$v'(t)$	Δt
0.00	0.0000000000	1.0000000000	0.000000	0.01
0.01	0.0100000000	1.0000000000	-0.010000	
0.02	0.0200000000	0.9999000000	-0.020000	

t	$x(t)$	$v(t)$	$v'(t)$	Δt
0.98	0.8345583048	0.5597857790	-0.834558	0.01
0.99	0.8401561626	0.5514401960	-0.840156	
1.00	0.8456705645	0.5430386343	-0.845671	
1.01	0.8511009509	0.5345819287	-0.851101	

$v(1) \approx x(0.99) + x'(0.99)\Delta t$

$v(1) \approx v(0.99) + v'(0.99)\Delta t$

t	$x(t)$	$v(t)$	$v'(t)$	Δt
1.98	0.9265917578	-0.4017760878	-0.926592	0.01
1.99	0.9225739970	-0.4110420054	-0.922574	
2.00	0.9184635769	-0.4202677453	-0.918464	

$x(2) \approx x(1.99) + x'(1.99)\Delta t$

$v(2) \approx v(1.99) + v'(1.99)\Delta t$

t	$x(t)$	$v(t)$	$v'(t)$	Δt
2.98	0.1634049118	-1.0017713130	-0.163405	0.01
2.99	0.1533871987	-1.0034053621	-0.153387	
3.00	0.1433531450	-1.0049392341	-0.143353	

$x(3) \approx x(2.99) + x'(2.99)\Delta t$

$v(3) \approx v(2.99) + v'(2.99)\Delta t$

t	$x(t)$	$v(t)$	$v'(t)$	Δt
3.98	-0.7584333316	-0.6821872497	0.758433	0.01
3.99	-0.7652552041	-0.6746029164	0.765255	
4.00	-0.7720012333	-0.6669503644	0.772001	

$x(4) \approx x(3.99) + x'(3.99)\Delta t$

$v(4) \approx v(3.99) + v'(3.99)\Delta t$

t	$x(t)$	$v(t)$	$v'(t)$	Δt
4.98	-0.9887642772	0.2709307113	0.988764	0.01
4.99	-0.9860549701	0.2808183541	0.986055	
5.00	-0.9832467866	0.2906789038	0.983247	

$x(5) \approx x(4.99) + x'(4.99)\Delta t$

$v(5) \approx v(4.99) + v'(4.99)\Delta t$

t	$x(t)$	$v(t)$	$v'(t)$	Δt
5.98	-0.3078190752	0.9832946880	0.307819	0.01
5.99	-0.2979861283	0.9863728787	0.297986	
6.00	-0.2881223996	0.9893527400	0.288122	

$x(6) \approx x(5.99) + x'(5.99)\Delta t$

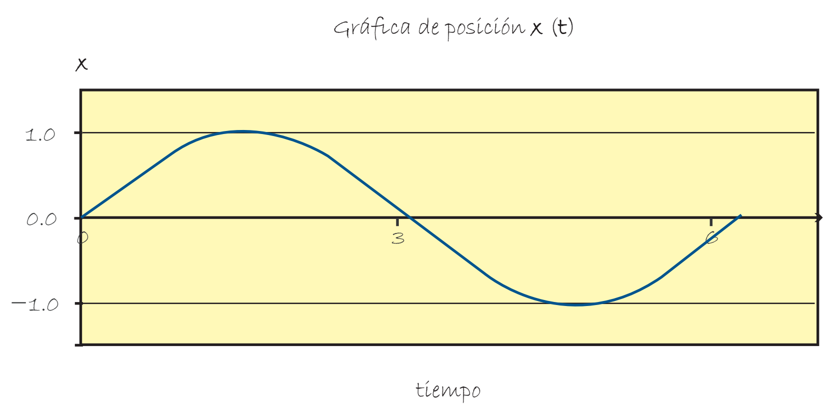
$v(6) \approx v(5.99) + v'(5.99)\Delta t$

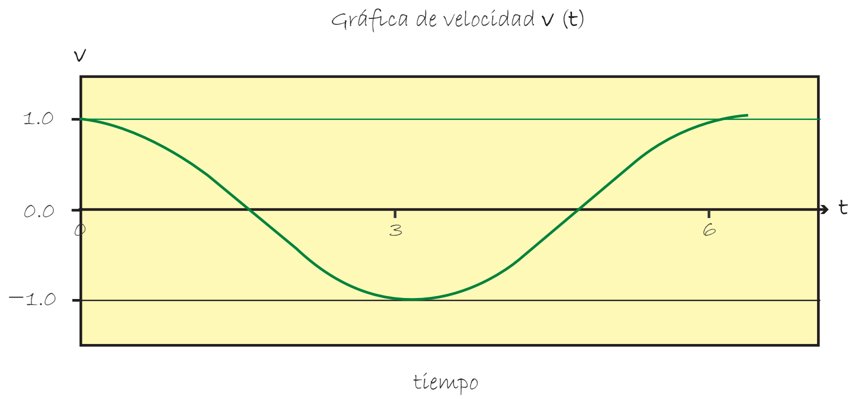
t	$x(t)$	$v(t)$	$v'(t)$	Δt
6.28	-0.0035028982	1.0318906151	0.003503	0.01
6.29	0.0068160080	1.0319256441	-0.006816	
6.30	0.0171352644	1.0318574840	-0.017135	

$x(6.30) \approx x(6.29) + x'(6.29)\Delta t$

$v(6.30) \approx v(6.29) + v'(6.29)\Delta t$

Las gráficas que el recurso computacional nos ofrece son los siguientes.





d) Identifica las funciones cuyas gráficas se asemejan a las obtenidas mediante el recurso tecnológico para $x(t)$ y $v(t)$. Reconoce además las reglas de derivación para esas funciones a partir del sistema de ecuaciones diferenciales original del comportamiento del sistema masa-resorte.

Al utilizar los valores de la tabla que fue generada en la hoja de cálculo, el trazado de las gráficas de x contra t y v contra t nos ofrece una imagen con la suficiente precisión como para reconocer en ellas el comportamiento de dos funciones trigonométricas:

$$x(t) = \operatorname{sen} t \text{ y } v(t) = \cos t$$

Sabiendo de la primera ecuación del sistema que

$$v(t) = x'(t),$$

podemos afirmar que la derivada de la función

$$x(t) = \operatorname{sen} t$$

es la función $x'(t) = v(t) = \cos t$.

Por otra parte, la segunda ecuación diferencial en el sistema establece que

$$v'(t) = -x(t)$$

lo cual nos afirma que la derivada de la funció

$$v(t) = \cos t$$

es la función

$$v'(t) = -x(t)$$

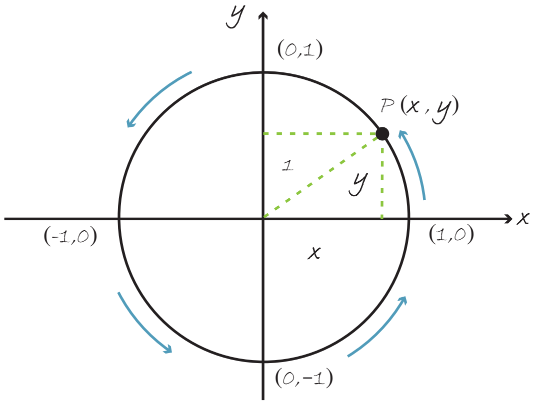
esto es, la derivada de la función $v(t) = \cos t$ es la función

$$v'(t) = -\operatorname{sen} t$$

Establecimiento de las funciones seno y coseno

En este apartado, haremos surgir los modelos conocidos como las funciones trigonométricas seno y coseno en estrecha relación con el análisis del movimiento circular uniforme sobre el círculo unitario cuyo centro está en el origen del sistema coordenado.

Una partícula P se mueve con rapidez constante sobre un círculo de radio uno. Su movimiento se realiza en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. En la siguiente figura mostramos la situación:



Observa que, a medida que el tiempo transcurre, las coordenadas x y y que señalan la posición de la partícula están cambiando. Esto lo podemos representar así:

$$x = x(t) \text{ y } y = y(t)$$

lo que nos expresa que, tanto la variable x (abscisa) como la variable y (ordenada), son funciones del tiempo.

Consideremos que se empieza a medir el tiempo $(t = 0)$ al pasar la partícula por el punto $(1, 0)$. Además, el tiempo transcurrido al pasar la partícula de este punto $(1, 0)$ al punto $(-1, 0)$ es de π segundos.

Generando la función seno. Analizaremos el comportamiento de la variable y en función del tiempo, $y = y(t)$, primeramente en el intervalo de los 0 a los $\frac{\pi}{2}$ segundos.

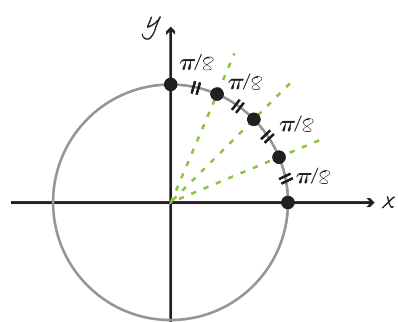
Como la partícula recorre la mitad del círculo en π segundos, al transcurrir el tiempo de los 0 a los $\frac{\pi}{2}$ segundos, la partícula recorrerá la cuarta parte del círculo correspondiente al primer cuadrante.

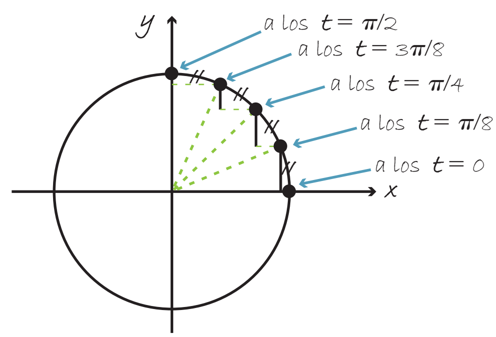
Sabemos entonces que, para el tiempo $t = 0$, la posición de la partícula es $(1, 0)$, y para el tiempo $t = \frac{\pi}{2}$, la posición de la partícula está señalada por el punto $(0, 1)$.

La ordenada y está creciendo desde el valor 0 al valor 1 en el intervalo de tiempo de los 0 a los $\frac{\pi}{2}$ segundos.

Pero asegurar si esta ordenada y crece cada vez más lento o cada vez más rápido, exige que hagamos cierta reflexión sobre el movimiento.

- ✓ *Como la partícula se mueve con rapidez constante, eso significa que recorre longitudes iguales en todo par de intervalos de tiempo iguales; y dado que se está moviendo sobre un círculo, podemos decir que la partícula recorre arcos iguales sobre el círculo en cualesquier par de intervalos de tiempo iguales.*
- ✓ *Si dividimos el intervalo de tiempo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ segundos en cuatro subintervalos de tiempo iguales, estos tendrán una longitud de $\frac{\pi}{8}$ segundos ($\frac{\pi}{2}$ dividido entre 4). Sabemos que a cada uno de estos subintervalos de tiempo les deberá corresponder un arco de círculo (recorrido por la partícula) de la misma longitud.*

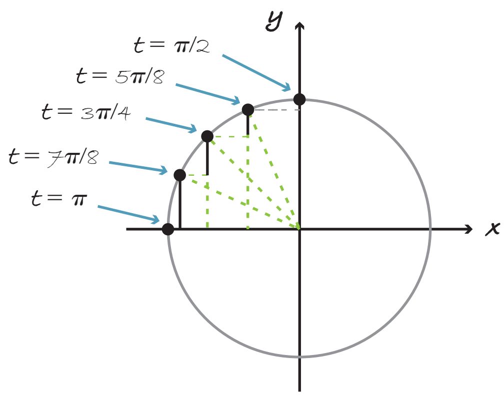




Observa los segmentos verticales en la última imagen. Podemos interpretar que representan la cantidad que ha aumentado la ordenada y al pasar la partícula de una posición a otra, sobre el círculo y correspondiendo a los tiempos igualmente distanciados: 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Observando los segmentos verticales en la imagen notamos que éstos son cada vez menores; luego, agregamos a nuestra información que y está creciendo cada vez más lentamente (pues lo que aumenta y es cada vez menor). En consecuencia, la gráfica de $y(t)$ será creciente y cóncava hacia abajo.

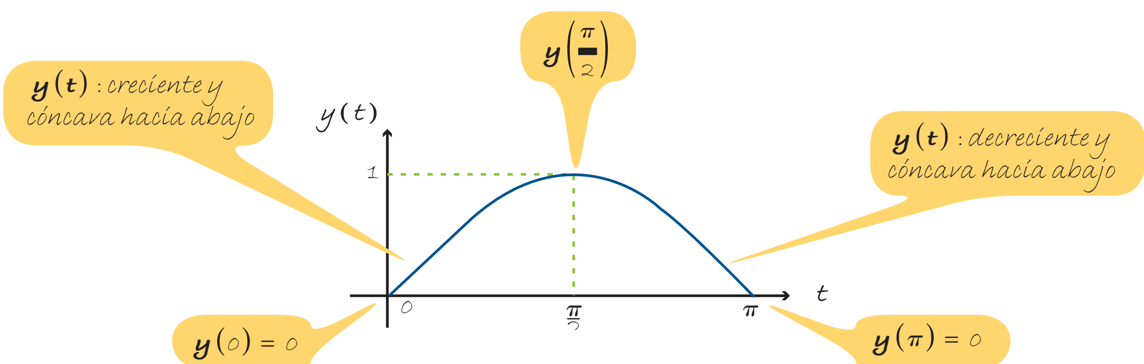
La situación no es la misma cuando el recorrido de la partícula continúe después de los $\frac{\pi}{2}$ segundos.



El comportamiento de $y(t)$ en el intervalo de tiempo de los $\frac{\pi}{2}$ segundos a los π segundos muestra evidentemente un decrecimiento del valor 1 al valor 0.

Considerando una imagen semejante y observando los segmentos verticales, podemos asegurar que y va decreciendo cada vez más rápidamente (pues lo que disminuye y es cada vez mayor).

Integremos la información obtenida para construir una gráfica para $y(t)$ que contemple los aspectos cualitativos y cuantitativos con que contamos.

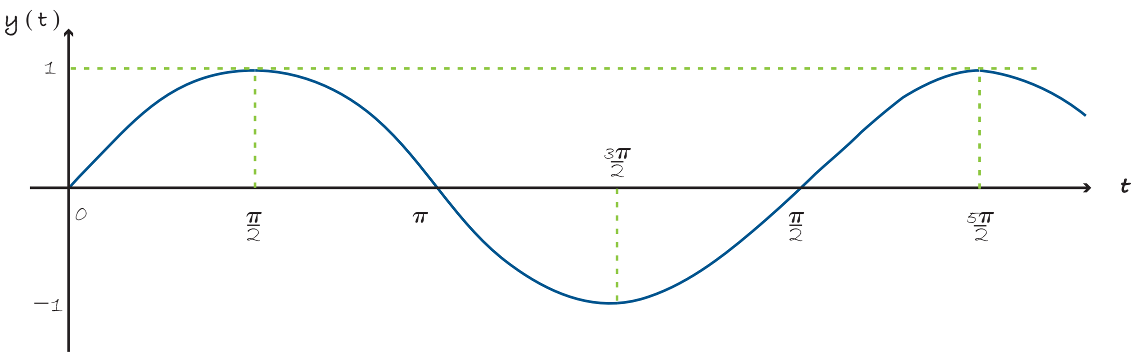


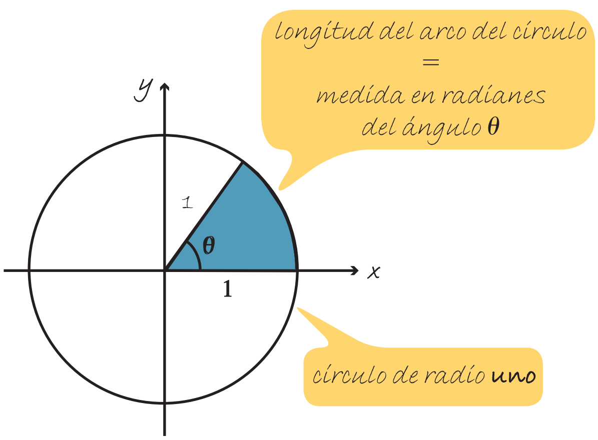
La gráfica anterior la podemos extender a través de un análisis semejante, pero correspondiente a los diferentes intervalos de tiempo. Por ejemplo de los π a los $\frac{3\pi}{2}$ segundos, la partícula recorre la cuarta parte del círculo correspondiente al tercer cuadrante y de los $\frac{3\pi}{2}$ a los 2π segundos, la partícula recorre la cuarta parte del círculo correspondiente al cuarto cuadrante.

De los 2π a los $\frac{5\pi}{2}$ segundos, la partícula vuelve a recorrer el arco del círculo en el primer cuadrante... y así sucesivamente.

De esta manera, tenemos asignada una posición de la partícula sobre el círculo para cualquier valor positivo del tiempo y por tanto, un valor numérico de la ordenada $y = y(t)$ correspondiente a ese tiempo.

El aspecto de la gráfica de $y(t)$ es como el siguiente:





Así como hemos utilizado la variable de referencia igual al tiempo t, podemos ahora referenciar las coordenadas de la posición de la partícula sobre el círculo en términos del ángulo positivo θ que se mide a partir de la parte positiva del eje x, en el sentido del movimiento de la partícula (contrario a las manecillas del reloj). Este ángulo se determina al trazar el radio del círculo correspondiente a la posición de la partícula.

Convenimos en medir los ángulos en **radianes**, esto quiere decir que haremos corresponder la medida de los ángulos con longitudes de arcos en el círculo unitario. De un modo preciso, la medida en radianes de un ángulo indica la longitud del arco del círculo unitario que se determina con la abertura del ángulo. Observa la figura.

De este modo podemos identificar que:

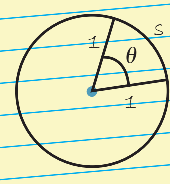
- a los 360^o le corresponden los 2π radianes, que es la longitud del perímetro del círculo unitario,
- a los 180^o corresponden π radianes, que es la mitad del perímetro del círculo unitario,
- a los 90^o corresponden $\frac{\pi}{2}$ radianes, que es un cuarto del perímetro del círculo unitario, y
- en general... cada grado corresponde con $\frac{\pi}{180}$ radianes.

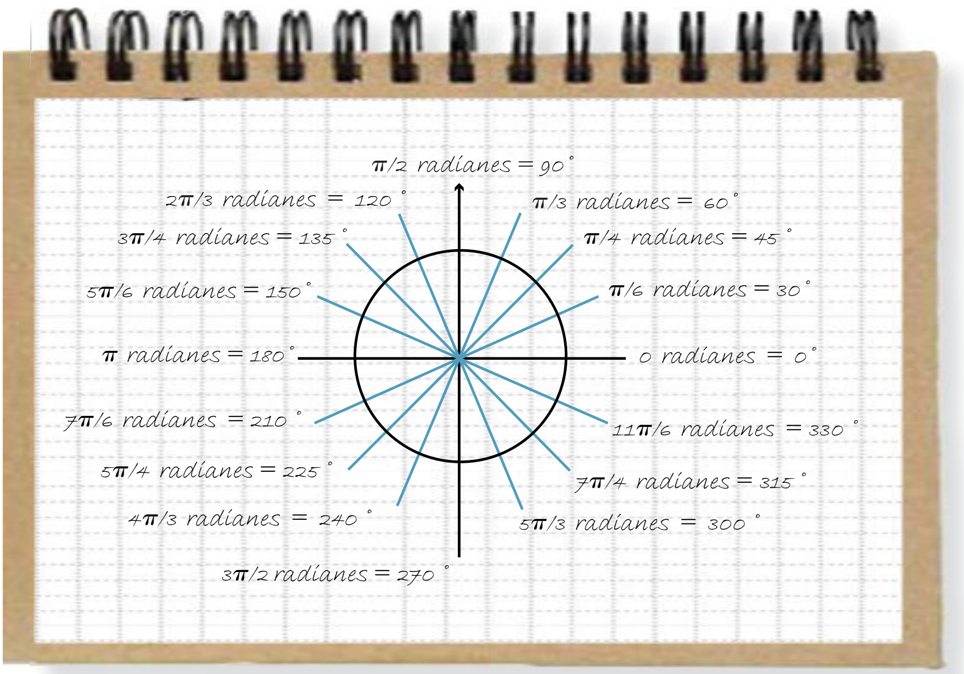
Por lo tanto, para convertir la medida de un ángulo de grados a radianes, basta multiplicar la cantidad de grados por el número $\frac{\pi}{180}$.

La siguiente figura muestra la equivalencia de medidas en grados y radianes para los ángulos más conocidos o utilizados; aquéllos que son múltiplos de 30 y 45 grados.

¡TOMA NOTA!

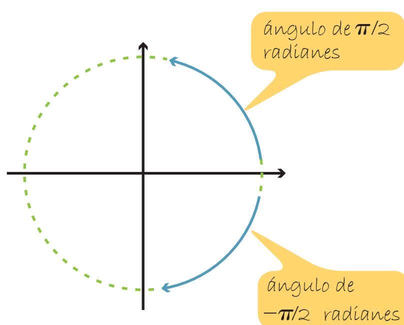
En el círculo unitario, sea
$\theta \rightarrow$ medida en grados del ángulo central
$s \rightarrow$ medida en radianes del ángulo central
Cuando $\theta = 360°$, s debe ser el perímetro del círculo:
$s = 2\pi\ (1) = 2\pi$.





Los ángulos en la figura corresponden a una "primera vuelta" sobre el círculo, sin embargo puede pensarse en sucesivas vueltas e incluso en vueltas realizadas en el otro sentido.

Se toma el acuerdo que ángulos positivos corresponden con un ángulo medido "en contra" de las manecillas del reloj, y que ángulos negativos corresponden con un ángulo medido "a favor" de las manecillas del reloj.



¡Toma nota!

Sí $1°$ es igual a $\frac{\pi}{180}$ radianes

$2°$ es igual a $2\left(\frac{\pi}{180}\right)$ radianes

$3°$ es igual a $3\left(\frac{\pi}{180}\right)$ radianes

. .

. .

. .

$\theta°$ es igual a...

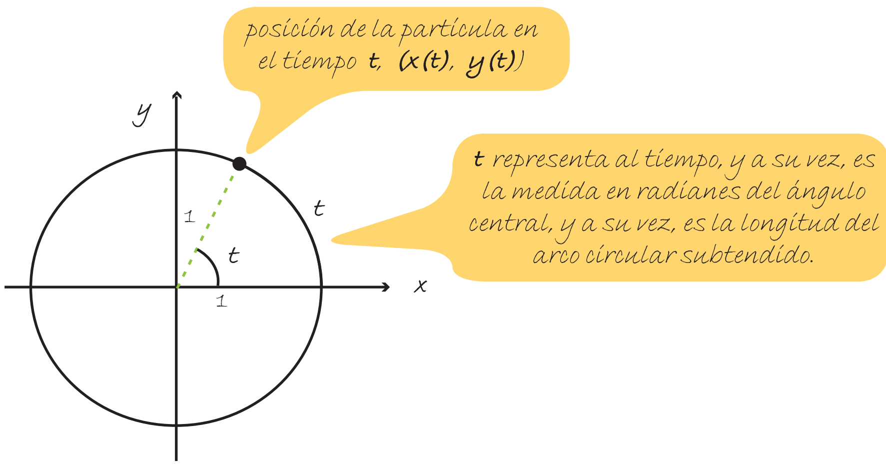
$\theta\left(\frac{\pi}{180}\right)$ radianes

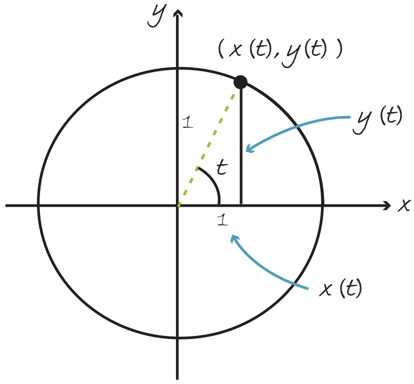
Relacionemos ahora la medida en radianes de los ángulos con el movimiento original de la partícula sobre el círculo unitario. Sabemos que la partícula se mueve con rapidez constante e igual a 1 radián/segundo, puesto que recorre medio círculo, cuya longitud es π, en exactamente π segundos.

Con esta información, podemos asegurar que la medida del tiempo, t segundos, coincide **numéricamente** con la medida de la longitud del arco que recorre la partícula sobre el círculo unitario. De este modo, t coincide con la medida del ángulo central que se sobredetermina con ese mismo arco; medida que hemos expresado en radianes.

Por lo tanto, la magnitud tiempo t, que antes utilizamos para visualizar el instante en que la partícula está en cierta posición con ciertas coordenadas, ahora la reinterpretamos como la magnitud que nos indica la medida en radianes del ángulo central que se determina con la posición de la partícula.

Tomemos por ejemplo, un valor de t con $0 < t < \frac{\pi}{2}$ para ilustrar lo que hemos dicho en una figura:





Ahora bien, si trazamos el triángulo rectángulo que se determina con esa posición, y recordamos nuestro conocimiento de Trigonometría, podemos observar a las coordenadas de la posición de la partícula, x y y, como catetos en el triángulo rectángulo con ángulo interno t.

De este modo, asignamos a la magnitud y el valor que, por Trigonometría, conocemos como el ***seno*** del ángulo t:

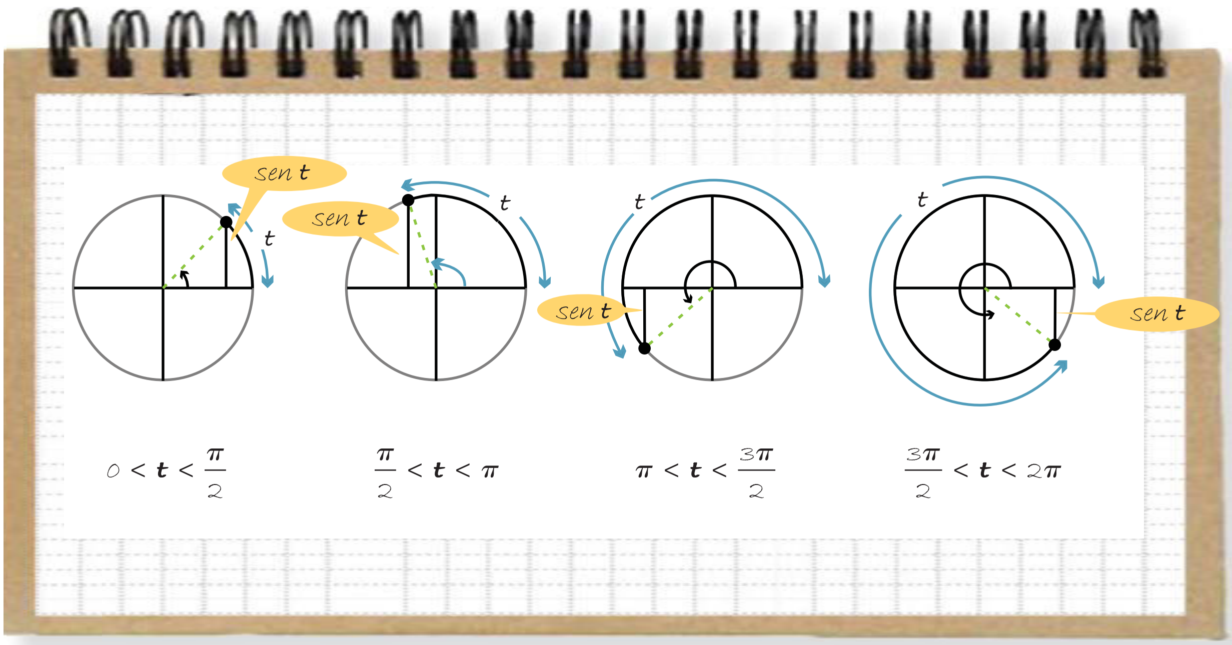
$$\frac{y(t)}{1} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = sen\ t$$

De este modo, la expresión

$$y(t) = sen\ t$$

representa a la ordenada de la posición de la partícula correspondiente al tiempo t, que a su vez representa el ángulo medido en radianes.

Podemos generalizar la situación del triángulo en distintos valores del tiempo, o sea, en distintos valores del ángulo t; observa en la figura siguiente que el triángulo que se determina siempre une el punto en el círculo con el eje horizontal, de modo que los primeros 2 valores (en cuadrante I y II) son positivos (arriba del eje) y los segundos 2 valores (en cuadrante III y IV) son negativos (abajo del eje horizontal).



Para utilizar las variables x y y en el establecimiento de estas nuevas funciones, sustituimos x en las anteriores t para representar la medida en radianes del ángulo central en el círculo unitario, y dejemos la variable y para representar el valor trigonométrico seno.

Con la asociación de triángulos rectángulos en cada cuadrante, queda establecida de manera general la función

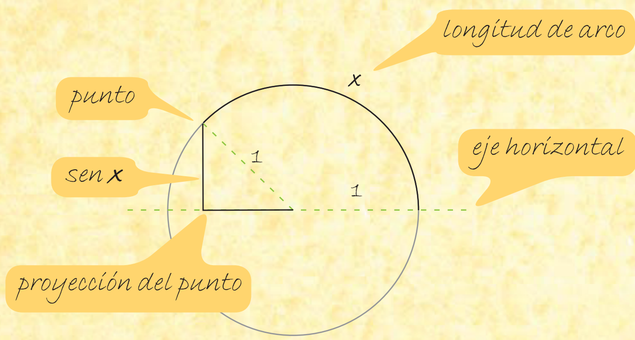
$$y(x) = sen\ x$$

para cualquier valor de x, aún y cuando sea mayor que 2π, en una segunda, tercera, cuarta vuelta... o incluso en el caso en que x sea negativo, mientras construyamos el triángulo respectivo, $sen\, x$ está bien definido.

Consideremos un punto situado sobre el círculo unitario con centro $(0, 0)$.
La función trigonométrica

$$y = f(x) = sen\; x$$

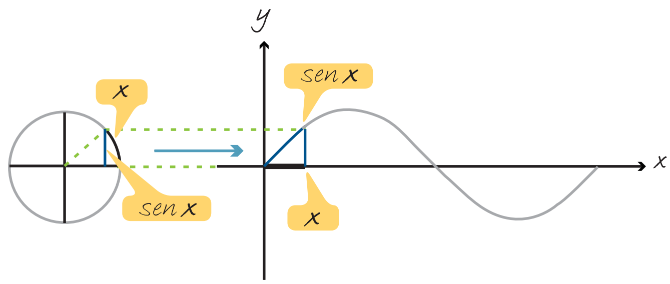
está definida para todos los números reales donde x es la longitud de arco medida sobre el círculo unitario a partir del eje horizontal positivo; longitud que corresponde con la medida en radianes del ángulo central que subtiende el arco.

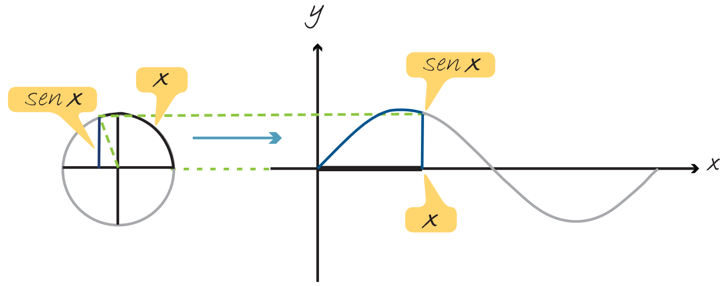


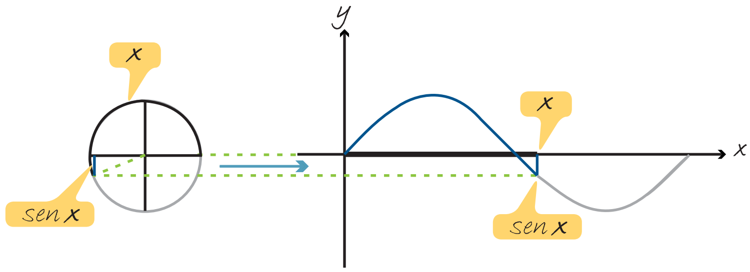
Por su parte, el valor de y es el valor del **seno trigonométrico** del ángulo x, calculado con el triángulo rectángulo que se genera al proyectar el punto del círculo sobre el eje horizontal.

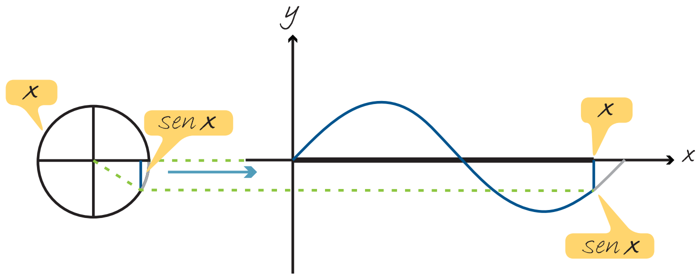
Observa que los valores de y se encuentran acotados en el intervalo $[-1, 1]$, que es la **imagen** de la función seno, trigonométrico.

La gráfica de esta función la generamos trasladando los catetos que representan $sen\, x$ en el valor de la longitud x que ahora se representa en el eje horizontal. Mostramos en las siguientes figuras, un momento particular en cada cuadrante.

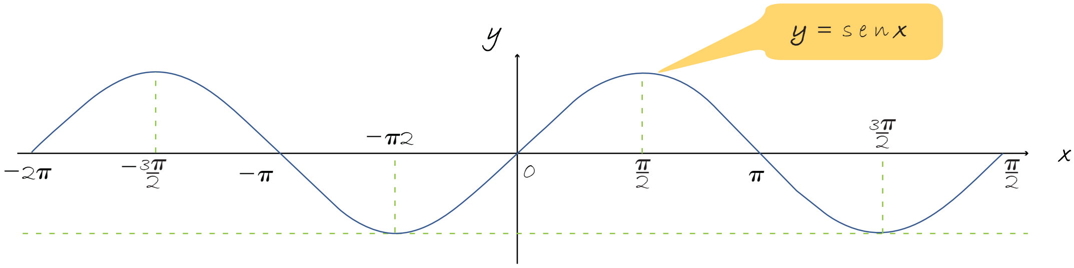

y
x
sen x
x
sen x
x
x


y
sen x
x
sen x
x
x


y
x
x
x
sen x
sen x

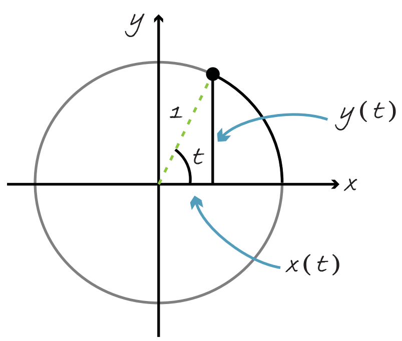

y
x
sen x
x
x
sen x

Visualizando la variación de x en sucesivas vueltas, en sentido positivo y también negativo la gráfica de esta función queda establecida como se muestra enseguida, y su dominio son todos los números reales.



Podemos reconocer en esta gráfica la forma de la figura que obtuvimos anteriormente de forma cualitativa y también la que la hoja de cálculo nos produjo en la solución numérica de la situación-problema 1.7.

Generando la función coseno. Utilizamos el mismo triángulo rectángulo que se determina con el ángulo central t para generar ahora la función trigonométrica coseno.



Para esto, lo que debemos observar ahora es el comportamiento de la abscisa (coordenada x), que por conocimientos de Trigonometría sabemos:

$$\frac{x(t)}{1} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \cos t$$

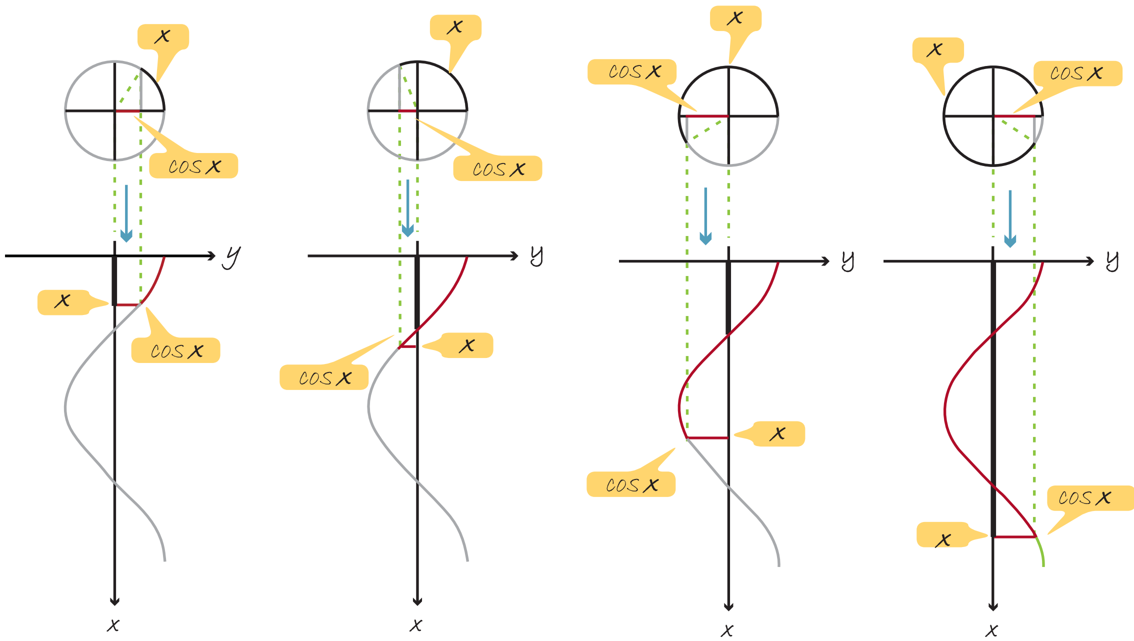
Luego, establecemos la función trigonométrica ***coseno*** para la abscisa (la coordenada x) de la posición de la partícula sobre el círculo en el tiempo t:

$$x(t) = \cos t$$

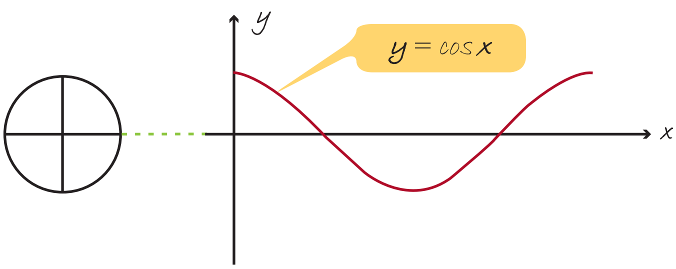
Además, sabemos que t también representa la medida en radianes del ángulo central que se determina con la hipotenusa del triángulo, que es radio del círculo.

Para obtener la gráfica del coseno utilizaremos nuevamente las variables x y y, donde x sustituye al tiempo t, y a su vez, y sustituye a x.

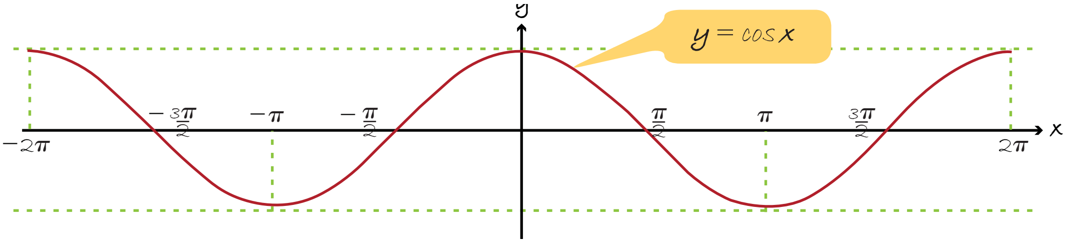
Trasladaremos ahora los catetos adyacentes generados con algunas posiciones de la partícula, pero, por conveniencia, colocaremos el eje horizontal (que ahora llamaremos x) en la posición hacia abajo esto es, lo colocaremos vertical, girándolo $90°$ a favor de las manecillas del reloj. Observa las figuras y el triángulo respectivo en cada cuadrante.



Si volvemos a colocar de modo tradicional los ejes, girando 90 grados en contra de las manecillas del reloj, para dejar el eje x horizontal y apuntando a la derecha, obtenemos la gráfica de la función coseno, por ahora restringida a la primera vuelta de la partícula sobre el círculo unitario.



Permitiendo la variación del ángulo a vueltas consecutivas e incluso al giro para ángulos negativos, obtenemos la gráfica siguiente:

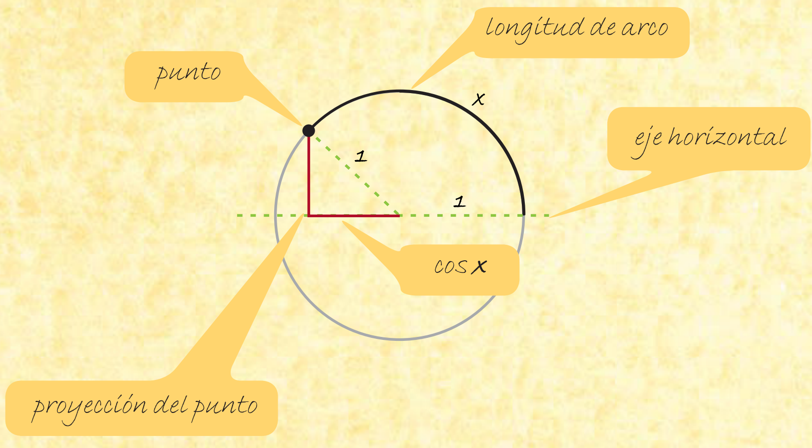


Consideremos un punto situado sobre el círculo unitario con centro $(0, 0)$.

La función trigonométrica

$$y = f(x) = \cos\ x$$

está definida para todo x número real, y sus valores y están acotados en el intervalo $[-1, 1]$.

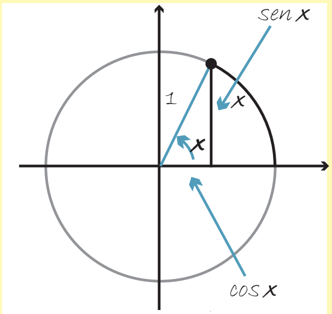


La variable x representa la medida en radianes del ángulo central que es lo mismo que la longitud de arco medida sobre el círculo unitario a partir del eje horizontal positivo.

El valor de y es el valor del **coseno trigonométrico** del ángulo x, calculado con el triángulo que se genera al proyectar el punto del círculo sobre el eje horizontal.

Al observar las gráficas de estas dos nuevas funciones y su surgimiento, es notoria cierta relación entre ellas donde podríamos hacer que coincidieran con sólo “mover” una y colocarla encima de la otra. Ese tipo de movimiento de la gráfica es lo que referimos como un “efecto gráfico”, lo que estudiaremos en el siguiente apartado de este tema.

Antes de ello te sugerimos que observes la siguiente figura para reconocer visualmente algunas propiedades que surgen por la manera misma en que estas nuevas funciones seno y coseno han sido definidas, estas propiedades las puedes haber conocido anteriormente como **identidades trigonométricas**.



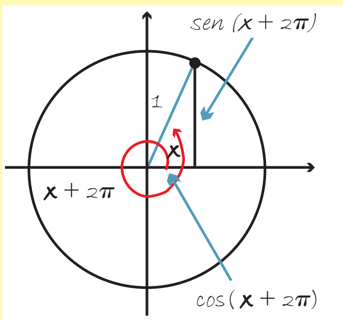
Las magnitudes

$$\cos x \ \text{y} \ \operatorname{sen} x$$

corresponden con los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa uno.
Por el Teorema de Pitágoras:

$$(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

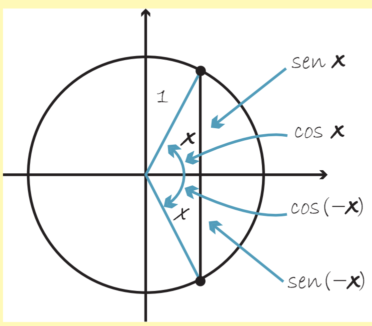


La posición sobre el círculo cuando el ángulo x cambia a $x + 2\pi$ es la misma, pues equivale a haber dado una vuelta completa al círculo.
Por tanto:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Por esta última propiedad se dice que las funciones ***seno*** y ***coseno*** son ***periódicas*** (con periodo de 2π). De ahí su utilidad como funciones apropiadas para modelar magnitudes relacionadas con fenómenos oscilatorios.



La posición correspondiente al ángulo $-x$ se obtiene al girar, a favor de las manecillas del reloj, el mismo ángulo x.
Por tanto, de la simetría de la figura:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

¡TOMA NOTA!

$\operatorname{sen} x^2$ no es $(\operatorname{sen} x)^2$.

$(\operatorname{sen} x)^2$ se escribe

$\operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen} x^2 \neq \operatorname{sen}^2 x$

¡importa dónde se pone el 2!

Efectos gráficos en las funciones seno y coseno.

Todas las expresiones del tipo:

- ✓ $y = A \operatorname{sen} x$
- ✓ $y = \operatorname{sen} Bx$
- ✓ $y = \operatorname{sen}(x + C)$
- ✓ $y = \operatorname{sen} x + D$
- ✓ $y = A \cos x$
- ✓ $y = \cos Bx$
- ✓ $y = \cos(x + C)$
- ✓ $y = \cos x + D$

son expresiones que se obtienen de los modelos originales:

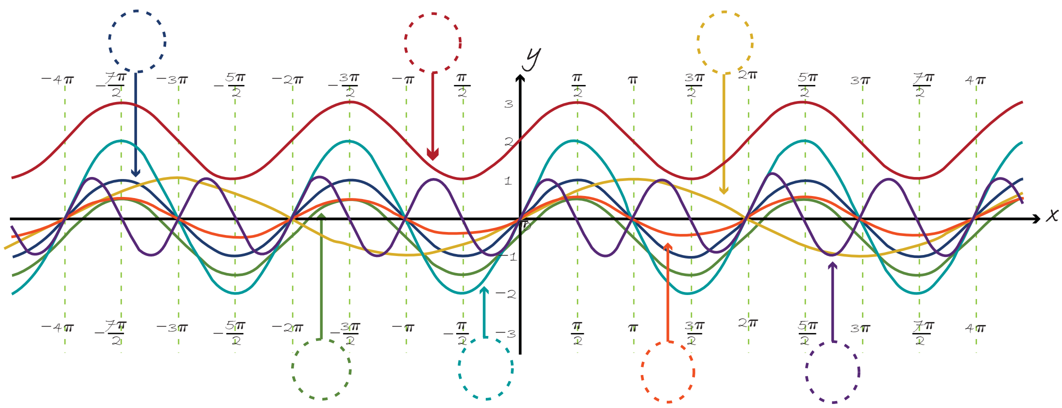
$$y = \operatorname{sen} x, \qquad y = \cos x$$

a los cuales se les ha agregado algún valor constante, representado por los parámetros A, B, C o D. Cada uno de estos parámetros señala una operación aritmética que deberá realizarse, ya sea al ángulo x, o al valor trigonométrico representado con ***seno*** o ***coseno***. Por ejemplo, el parámetro D indica la suma de ese número al valor trigonométrico ***seno***; en cambio, el parámetro C indica la suma de ese número al ángulo x para inmediatamente después, calcular el valor trigonométrico ***seno***. A su vez, el parámetro A indica el producto de ese número por el valor trigonométrico ***seno***; en cambio, el parámetro B indica el producto de ese número por el ángulo x antes de proceder a calcular el valor trigonométrico ***seno***.

En este apartado, nos concentraremos en identificar y diferenciar cada uno de los efectos gráficos que se determinan por los distintos parámetros A, B, C y D en las expresiones originales $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$. Lo haremos utilizando un recurso tecnológico para graficación que nos permitirá interactuar con representaciones gráficas y algebraicas.

Situación Problema Adicional.

En la figura siguiente están las gráficas de diferentes funciones trigonométricas que realizamos con ayuda de un software de graficación al teclear sus representaciones algebraicas. Hemos agregado a cada gráfica un círculo que las señala y en el que deberás colocar el número que corresponde con la función expresada en la siguiente lista.



(1) $y = \operatorname{sen} x$

(2) $y = \operatorname{sen} x + 2$

(3) $y = -\frac{1}{2} + \operatorname{sen} x$

(4) $y = 2\operatorname{sen} x$

(5) $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$

(6) $y = \operatorname{sen} 2x$

(7) $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$

¡TOMA NOTA!

Cuando se escribe

$\operatorname{sen} x + 2$

se entiende $\operatorname{sen}(x) + 2$.

En cambio, el caso

$\operatorname{sen}(x+2)$

es claro.

Consideremos conjuntamente a las funciones trigonométricas señaladas como 1, 2 y 3:

$$y = \operatorname{sen} x$$

$$y = \operatorname{sen} x + 2,$$

$$y = -\frac{1}{2} + \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}$$

La primera de ellas es la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. Por otra parte, las dos funciones restantes se diferencian de ésta porque se está "sumando" una constante a su expresión. Decimos "sumando" porque es conveniente englobar los dos casos en uno:

$$y = \operatorname{sen} x + 2$$

a la función seno básica... ... se le suma 2

$$y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} = \operatorname{sen} x + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

a la función seno básica... ... se le suma $-\frac{1}{2}$

Percibiéndolo de esta manera, podemos intuir cómo será la gráfica de

$$y = \operatorname{sen} x + 2$$

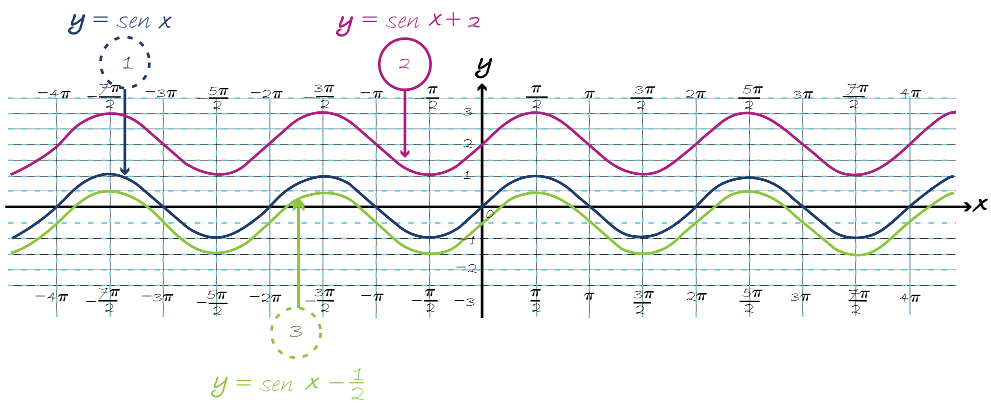
pues a los valores originales (y) que fueron calculados con la fórmula $\operatorname{sen} x$, ahora les estamos sumando 2 unidades. El efecto gráfico que causa esa suma es que los puntos de la gráfica original se ven afectados en el valor de su ordenada y, la cual se "desplaza" hacia arriba 2 unidades.

Análogamente, al considerar

$$y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}$$

el efecto en las ordenadas de cada punto es que éstas se verán desplazadas en $\frac{1}{2}$ unidad, pero ahora el desplazamiento es hacia abajo.

Reconocemos entonces las gráficas de estas funciones en la figura, donde el desplazamiento vertical de la gráfica seno básica ejemplifica un tipo de transformación "rígida" de la curva, donde ésta no sufre deformación alguna, sino que sólo se desplaza a modo de hacer una "copia" y "pegarla" en otra altura manteniendo las mismas posiciones de la abscisa x siempre. Es como un "arrastrar" la curva verticalmente hasta alcanzar la nueva altura.



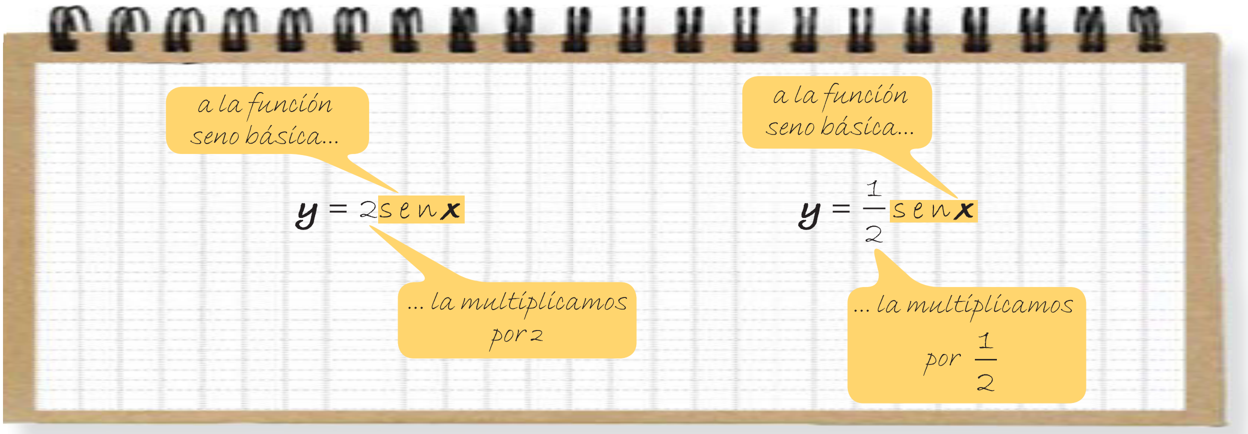
Consideremos ahora conjuntamente a las funciones trigonométricas señaladas como 1, 4 y 5.

$$y = \operatorname{sen} x$$

$$y = 2 \operatorname{sen} x$$

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

La dos últimas de estas funciones se diferencian de la primera (la básica), porque se está multiplicando por un número positivo el valor original de $\operatorname{sen} x$. Decimos "multiplicando" para englobar los dos casos en uno:



Percibiéndolo de esta manera, podemos interpretar cuál será la gráfica de estas dos funciones partiendo de la gráfica original $y = \mathrm{sen}\,x$.

Comencemos con la función

$$y = 2\,\mathrm{sen}\,x$$

donde el efecto de multiplicar los valores originales de y por 2, no va a ocasionar un movimiento "rígido" en esas ordenadas, como el que hemos visto en el caso de sumar la constante.

En el caso que estamos analizando ahora observamos que, por ejemplo, no resulta lo mismo cuando se multiplica 2 por el número 0 (el producto es igual a 0), que cuando se multiplica 2 por otro número, no cero, digamos $\frac{1}{2}$, (el producto es igual a 1).

Analizando diferentes casos, podríamos decir que, cada valor de y original que estaba a la "altura" 0, el efecto de multiplicarle por 2 vuelve a dejarle en esa misma altura, 0.

Por otra parte, cada valor de y original, que estaba a la altura 1, con la multiplicación por 2, se modifica a la altura 2.

A su vez, los valores y originales con altura -1, se modifican a la nueva altura -2.

El resto de los puntos van a ocupar un lugar justo a la altura "doble" de la que ocupaban antes.

Análogamente, en la función

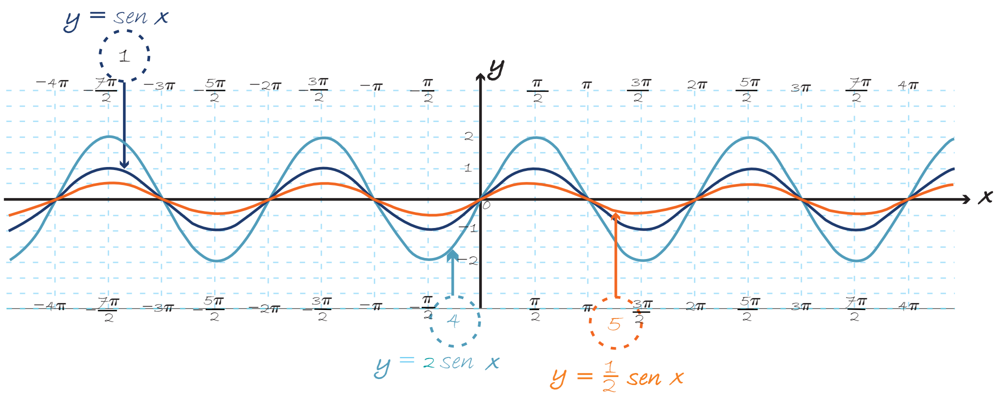
$$y = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x$$

las modificaciones producidas en los valores originales de $y = \mathrm{sen}\,x$ reflejan la multiplicación por $\frac{1}{2}$ o división entre 2: los puntos de ordenada 0 quedan en su mismo lugar, los valores

y que originalmente tiene altura 1 habrá que bajarlos a la altura $\frac{1}{2}$, y los de altura original -1, habrá que subirlos a la altura $-\frac{1}{2}$.

Finalmente, el resto de los puntos, habrá que moverlos a la altura que sea justo "la mitad" de su altura original.

Podemos reconocer entonces las gráficas de estas funciones en la figura siguiente, donde la multiplicación por 2 produce una especie de "alargamiento" en la gráfica, mientras que la multiplicación por $\frac{1}{2}$ produce al contrario un "acortamiento" en sus valores y, todo esto manteniendo los puntos de la gráfica $y = sen\, x$ sobre el eje horizontal fijos durante la transformación.



Consideremos finalmente, en forma conjunta, a las gráficas de las funciones trigonométricas señaladas con 1, 6 y 7.

$$y = sen\, x$$

$$y = sen\, 2x$$

$$y = sen\left(\frac{1}{2}x\right) = sen\,\frac{x}{2}$$

En la expresión $y = sen\, 2x$ se está haciendo de nuevo una multiplicación, pero ahora ésta se realiza sobre el ángulo x medido en radianes. Para identificar el efecto gráfico de esta multiplicación, pensemos lo siguiente:

Al ángulo x se le va a asociar el valor de la ordenada y que la función original asigna, no a x, sino al ángulo "doble de x", (ángulo $2x$). De este modo, podríamos pensar que el comportamiento de $y = sen\, x$ "más lejano" (en $2x$) lo estamos "acercando" (en x), de tal manera que las ondas de la gráfica original se están "contrayendo" al acercarse.

Esta forma de pensarlo, nos permite conjeturar que, por su parte, la gráfica de

$$y = sen\left(\frac{1}{2}x\right) = sen\frac{x}{2}$$

sufrirá una "expansión", porque el valor de la ordenada y asignada a x será el valor y que la función original "apenas" alcanzaba en un ángulo anterior, precisamente en el ángulo a la "mitad de x" o sea, en el ángulo $\frac{x}{2}$.

Es útil calcular qué tan largo hay que considerar un intervalo en el eje x para que la gráfica complete un ciclo (aquél que se repetirá sucesivamente); para eso, notemos que en la gráfica original $y = sen\,x$, la ordenada y toma todos sus valores posibles (entre 1 y -1), cuando la abscisa x recorre sus valores entre 0 y 2π.

Para que la nueva gráfica de $y = sen\,2x$ recorra todos sus valores en y que complete su ciclo, necesitaríamos que el ángulo $2x$ también tome todos los valores ente 0 y 2π.

Esto es, requerimos que:

$$0 \le 2x \le 2\pi$$

y dividiendo entre dos:

$$0 \le x \le \pi$$

Efectivamente, como lo habíamos intuido, se produce una **contracción** en $y = sen\,x$, para graficar $y = sen\,2x$, pues observamos que basta con que x recorra valores desde 0 hasta π radianes, para que su gráfica haya realizado lo que la gráfica original, $y = sen\,x$, realiza de los 0 hasta los 2π radianes.

Por su parte, para que la gráfica de

$$y = sen\frac{1}{2}x$$

recorra todos los valores en y que la grafica original $y = sen\,x$ recorre cuando el ángulo x varía de 0 a 2π radianes, necesitaremos que el nuevo ángulo, $\frac{x}{2}$, tome esos valores. Esto se expresa matemáticamente como:

$$0 \le \frac{x}{2} \le 2\pi$$

y multiplicado por dos:

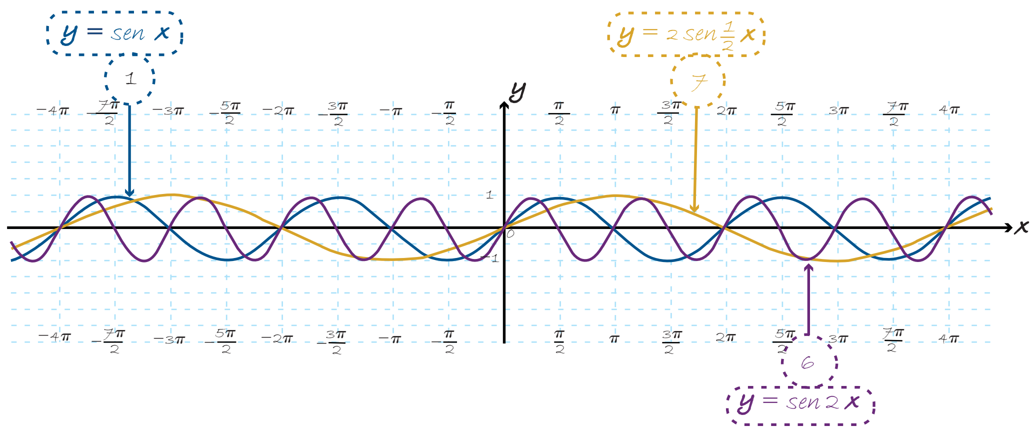
$$0 \le x \le 4\pi$$

Entonces, la gráfica

$$y = sen\frac{1}{2}x$$

realizará, desde los 0 hasta los 4π radianes, lo que la función original $y = sen\,x$ realiza más pronto, de los 0 a los 2π radianes. El efecto gráfico, como lo intuimos antes, es una **expansión** en la gráfica original.

Reconocemos ahora las gráficas de estas funciones y su relación con la gráfica original en la siguiente figura donde las palabras contracción y expansión dejan la sensación de "aplastar" la curva desde sus extremos o bien "alargarla" como jalándola de sus extremos.



Generalización

Los parámetros en las funciones senoidales y cosenoidales

En este apartado identificaremos los efectos gráficos ocasionados por los parámetros A, B, C y D en expresiones como:

$$y = A\cos x \qquad y = \operatorname{sen} Bx \qquad y = \cos(x + C) \qquad y = \operatorname{sen} x + D$$

Desarrollaremos la habilidad para reconocer el efecto gráfico ocasionado sobre los modelos básicos:

$$y = \operatorname{sen} x, \qquad y = \cos x$$

al ser éstos afectados por una "combinación" de efectos, representados mediante las expresiones:

$$y = A \operatorname{sen} B(x + C) + D$$

$$y = A \cos B(x + C) + D$$

y nombrados como modelos u ondas senoidales y cosenoidales.

Analicemos primeramente las expresiones:

$$y = A \operatorname{sen} x, \qquad y = A\cos x$$

en las cuales, algebraicamente, se ha hecho un cambio con respecto a los valores originales de $\operatorname{sen} x$ o $\cos x$. Este cambio algebraico consiste en que, a dichos valores, se les multiplica por el número señalado como A.

Esta operación de multiplicar a la expresión completa "altera" la gráfica, en el sentido como lo expresamos enseguida:

- aquellos valores de y originales representados por $\operatorname{sen} x$ o $\cos x$, y que valen 0, al multiplicarse por A seguirán manteniéndose iguales a 0. Por tanto, la nueva gráfica se encontrará, por decirlo de algún modo, "anclada" en el eje x tal y como lo estaba la gráfica original. Esto es, ambos tienen los mismos cortes con el eje x.
- aquellos valores de y que originalmente valen 1, al multiplicarse por A (con $A \neq 1$), modificarán su valor, ahora valen A, de modo que su altura (ordenada y) cambia en la nueva gráfica, dependiendo del valor particular del parámetro A. Cada valor y tomado en cierto x, cambiará al valor proporcional Ay en ese mismo x.

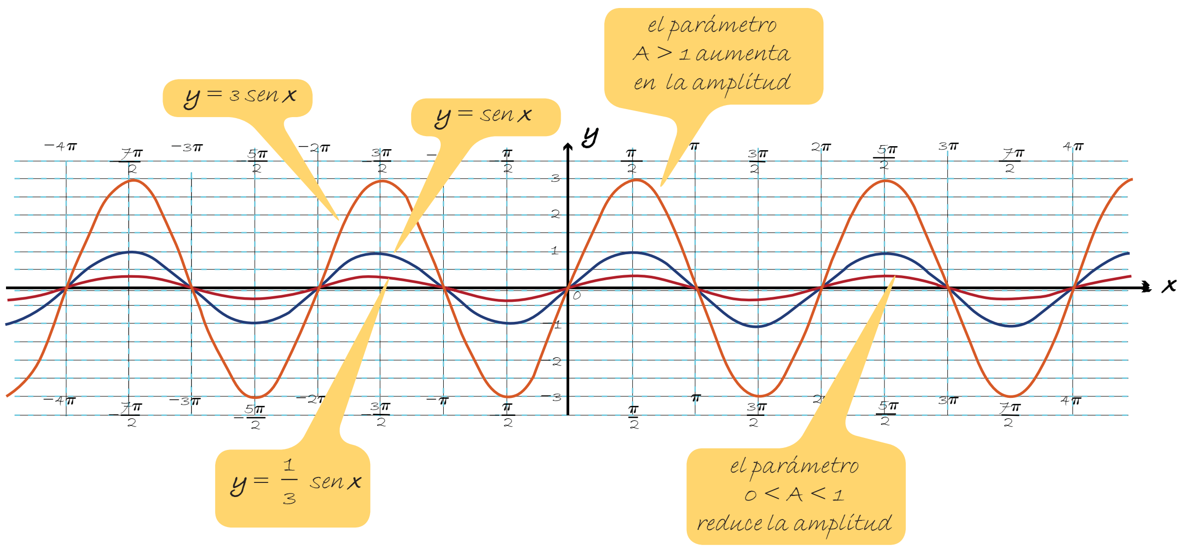
En conclusión, este efecto de multiplicar por A provoca que la gráfica original sufra cierto cambio en su aspecto al ser transformada en

$$y = A \operatorname{sen} x \text{ o } y = A\cos x.$$

Para las ondas senoidales y cosenoidales se conoce como un **cambio de amplitud** al resultado de dicho efecto que provoca que la imagen de la nueva función ya no sea el intervalo $[-1, 1]$ original sino $[-A, A]$, y para ilustrarlo, vamos a restringirnos primeramente a que el número A sea positivo.

Resulta relativamente sencillo diferenciar el caso en que el parámetro A sea menor que 1 del caso en que sea mayor que 1. En efecto, los valores originales de y representados por $sen\,x$ o $cos\,x$, son valores que se encuentran entre -1 y 1, independientemente del ángulo x considerado. Luego, si a estos valores los multiplicamos por, digamos, $A = 3$, entonces los nuevos valores de y se encontrarán entre -3 y 3. Si en cambio, multiplicamos por $A = \frac{1}{3}$, entonces los nuevos valores de y se encontrarán entre $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$.

Ilustremos lo dicho con la función $y = sen\,x$; veamos gráficamente el aspecto de $y = 3\,sen\,x$ y de $y = \frac{1}{3}sen\,x$.



El efecto del parámetro positivo A en las expresiones

$$y = A\,sen\,x \quad \text{o} \quad y = A\cos x$$

provoca un cambio en la **amplitud** de estas gráficas de tal manera que la amplitud original, de valor 1, aumenta o se reduce al valor A en las nuevas gráficas, dependiendo esto de si el número A es un número mayor que 1 ó es un número menor que 1, respectivamente.

Por otra parte, el caso de tener un número A negativo, vale la pena estudiarlo en forma aislada cuando $A = -1$. Es decir, identificaremos el efecto gráfico asociado a las expresiones:

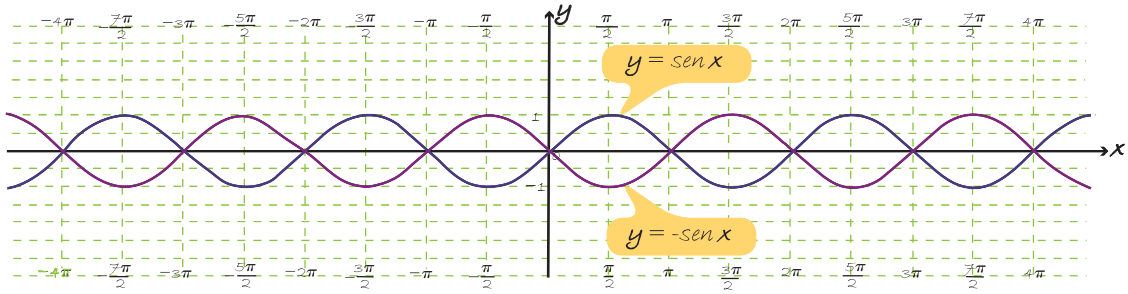
$$y = -sen\,x \quad \text{o} \quad y = -\cos x$$

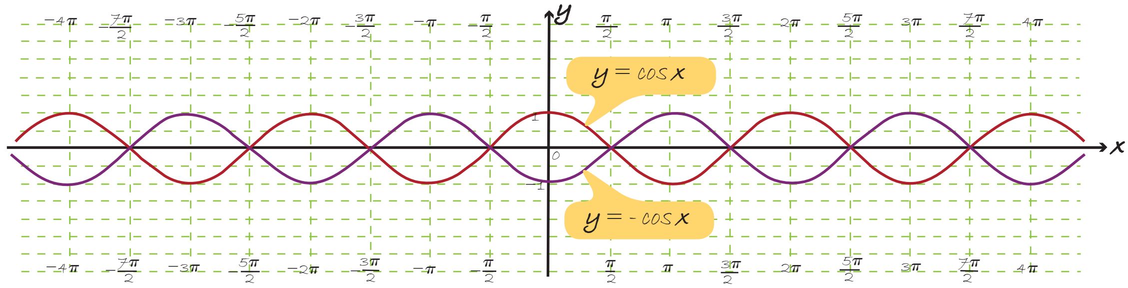
en relación con el aspecto original respectivo de

$$y = \operatorname{sen} x \qquad \text{o} \qquad y = \cos x$$

El cambio algebraico es claro; simplemente estamos “cambiando el signo” a los valores originales de y de tal modo que, los valores positivos de y se vuelven negativos, y los valores negativos de y se vuelven positivos.

De este modo, las nuevas gráficas pueden visualizarse como una **reflexión** de las gráficas originales sobre el eje horizontal, el eje x. Lo ilustramos en la figura:



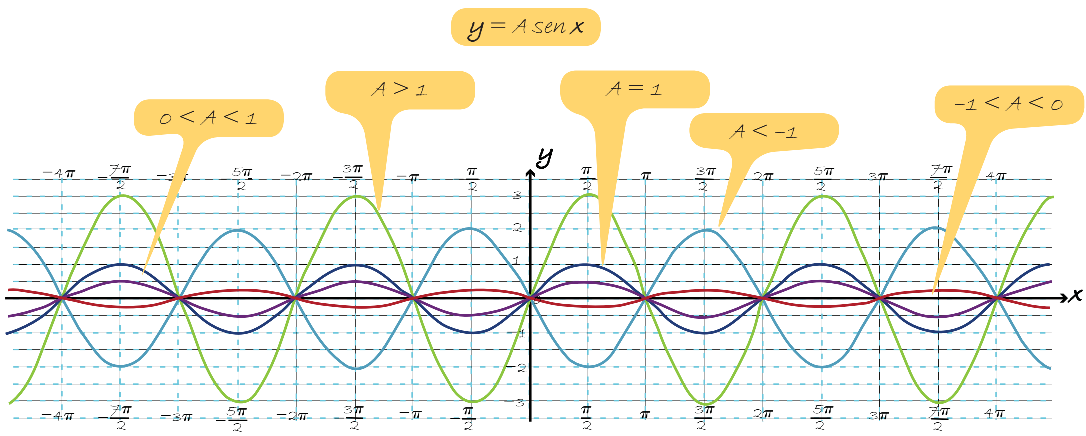


Si combinamos el efecto de **reflexión** con el de **cambio de amplitud**, podemos agregar que, en las expresiones

$$y = A \operatorname{sen} x \qquad \text{o} \qquad y = A \cos x$$

- cuando A es menor que -1, las nuevas gráficas experimentan una reflexión y un aumento en su amplitud
- y cuando A está entre -1 y 0 las nuevas gráficas experimentan una reflexión y una reducción de su amplitud.

Englobamos todas las posibilidades en la figura siguiente:



En general podemos concluir que las gráficas

$$y = A\,\text{sen}\,x \qquad\qquad y = A\cos x$$

son gráficas **periódicas** con período 2π, lo que nos señala que se tiene un **ciclo** de ellas, desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$, y con él basta para determinar su comportamiento repetitivo en todo $x \in \mathbb{R}$.

Además estas gráficas se encuentran “atrapadas” en una franja horizontal de espesor $2A$; la franja que se determina con las rectas horizontales $y = A$ y $y = -A$.

En el lenguaje matemático se habla de funciones **acotadas**... las primeras que conocemos con esa propiedad además de su peculiar **periodicidad**.

Analizaremos ahora las expresiones

$$y = \text{sen}\,Bx, \quad y = \cos Bx$$

en donde, en esta ocasión, la multiplicación por el parámetro positivo representado por B se está realizando al ángulo x (y no al valor del **seno** o **coseno** de ese ángulo, como lo hicimos anteriormente).

Consideremos la expresión

$$y = \text{sen}\,Bx$$

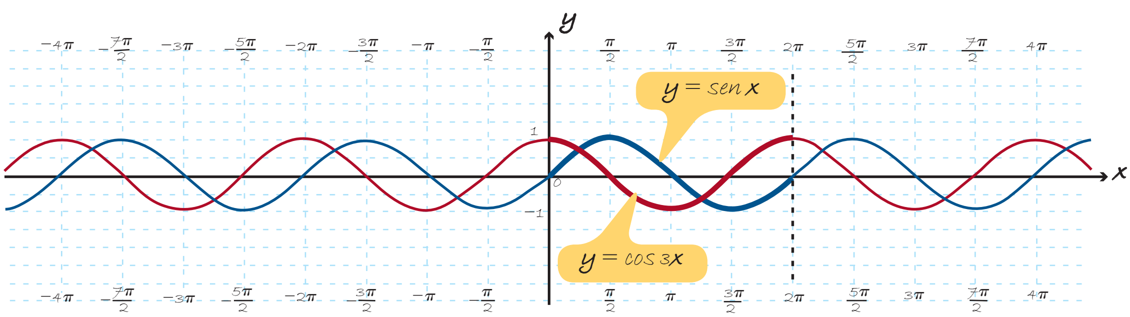
y notemos que, en primera instancia, su gráfica **no** experimentará cambio en su amplitud; seguirá estando acotada en la franja horizontal determinada por las rectas horizontales $y = -1$ y $y = 1$.

Lo que **sí** deberá cambiar es el recorrido que debe hacer el ángulo x para que con ese recorrido se tenga un ciclo completo de la gráfica de la función, después del cual la gráfica se repite sucesivamente. En el lenguaje matemático, estamos hablando del cambio en el **período** de la nueva gráfica.

Las gráficas originales

$$y = sen\,x \quad \text{y} \quad y = cos\,x$$

tienen un **período** de 2π, pues con la variación del ángulo x entre 0 y 2π, tenemos el "ciclo completo" de la gráfica que se repetirá sucesivamente. Observa el "primer ciclo completo" de estas funciones que está **repintado** en la gráfica siguiente:



Esta referencia nos permite indagar cuáles deben ser los recorridos de las nuevas gráficas

$$y = sen\,Bx \quad \text{y} \quad y = cos\,Bx$$

para que tengamos el primer ciclo completo que permita identificar la gráfica respectiva por repetición.

Consideremos simultáneamente las gráficas

$$y = sen\,3x \qquad y = sen\,\frac{1}{3}x$$

para reconocer y relacionar el comportamiento de estas funciones con el valor del parámetro positivo B.

Para obtener un ciclo completo de cada una de estas gráficas, necesitamos condicionar al nuevo ángulo para que realice el recorrido original, desde 0 hasta 2π, que es el recorrido que el ángulo original x requiere hacer para producir su ciclo completo. Analicemos por separado primeramente la función $y = sen\,3$,.

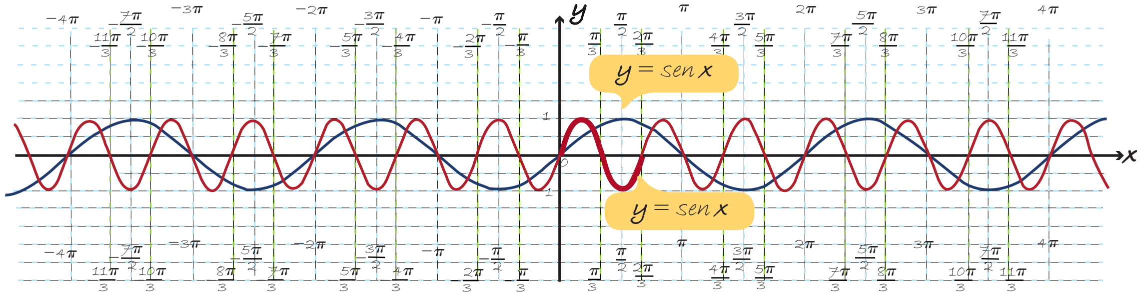
Para que $y = sen\,3x$ construya su ciclo, necesitamos que

$$0 \leq 3x \leq 2\pi$$

Luego, despejando los valores de x tendremos

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

lo cual indica que es suficiente que el ángulo x haga un recorrido menor para completar un ciclo. Repitiendo sucesivamente el ciclo formado desde 0 hasta $\frac{2\pi}{3}$ completamos su gráfica:



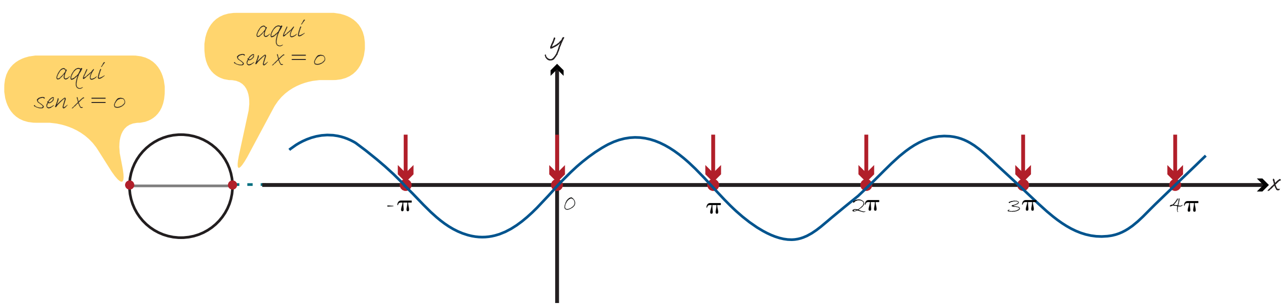
Podemos observar en la nueva función una **reducción** del **período** de la función original, de ser 2π pasa a ser $\frac{2\pi}{3}$.

Una **alternativa conveniente** para reconocer este nuevo período es observando las veces en que la nueva gráfica pasa por el eje x. De hecho, conocer sus intersecciones con el eje x es una gran ayuda en el trazado de la nueva gráfica.

Para conocer dichas intersecciones igualamos y al valor 0, y resolvemos la ecuación:

$$sen\, 3x = 0$$

Notarás que para “despejar” x de la ecuación ya no se trata del simple juego aritmético de “pasar números al otro lado del signo de igualdad”. Afortunadamente, podemos resolver esta ecuación de un modo visual, con sólo recordar la construcción de la gráfica de la función $y = sen\, x$:



¡TOMA NOTA!

Hay ecuaciones trigonométricas como $\operatorname{sen} x = 0$ y tienen infinitas soluciones.

$$x = \begin{cases} 0, \pi, 2\pi, \ldots \\ -\pi, -2\pi, \ldots \end{cases}$$

¡TOMA NOTA!

Para escribir todos los valores la solución de $\operatorname{sen} x = 0$ escribimos:

$x = n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$

Si en esa gráfica ubicamos los puntos de ella que están sobre el eje x, podemos concluir que:

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{cuando} \quad \begin{cases} x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \\ x = -\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots \end{cases}$$

En otras palabras, la ecuación trigonométrica, $\operatorname{sen} x = 0$ tiene una infinidad de soluciones, y todas ellas podemos representarlas en la forma $x = n\pi$, donde n representa a cualquier número entero.

Para saber en qué puntos pasa por el eje x la gráfica de $y = \operatorname{sen} 3x$, debemos resolver la ecuación:

$$\operatorname{sen} 3x = 0$$

Sabemos que para que el valor del seno sea 0, el ángulo $3x$ debe tomar los valores:

$$3x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

ó

$$3x = -\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots$$

Basta con que tomemos algunos de estos valores consecutivos para que podamos despejar valores sucesivos de x en los cuales $\operatorname{sen} 3x = 0$, y por tanto, valores sucesivos donde la gráfica de

$$y = \operatorname{sen} 3x$$

pasa por el eje x.

En efecto, tomemos los tres valores siguientes:

si $3x = 0$, despejando obtenemos $x = 0$

si $3x = \pi$, despejando obtenemos $x = \dfrac{\pi}{3}$

si $3x = 2\pi$, despejando obtenemos $x = \dfrac{2\pi}{3}$

Si regresamos a la gráfica que trazamos previamente para $y = \operatorname{sen} 3x$ y ubicamos estos tres valores de x, podemos darnos cuenta de que cuando el ángulo x hace el recorrido de 0 a $\dfrac{2\pi}{3}$, se obtuvieron los 3 puntos sobre el eje x que determinan el primer ciclo:

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad x = \frac{2\pi}{3}.$$

Considerando ahora la función

$$y = sen\,\frac{1}{3}x$$

sabemos que para que esta gráfica construya su primer ciclo se requiere que

$$0 \leq \frac{1}{3}x \leq 2\pi$$

luego, despejando los valores de x tendremos:

$$0 \leq x \leq 6\pi$$

lo cual indica que el ángulo x deberá hacer un recorrido mayor para completar el primer ciclo que se repetirá sucesivamente para completar la gráfica.

Tenemos entonces el caso de un **aumento** del **período** de la función original, de ser 2π a ser 6π en esta nueva gráfica.

Si indagamos los valores de x donde la nueva gráfica pasa por el eje x, podremos completar en forma sencilla su dibujo. Utilizando nuestra ecuación trigonométrica para $sen\,x = 0$ podemos asegurar que

$$sen\,\frac{1}{3}x = 0 \text{ cuando } \frac{1}{3}x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots.$$

Con estos valores basta para despejar x en tres valores sucesivos, y así tenemos que: $x = 0$, $x = 3\pi$ y $x = 6\pi$.

Esto nos asegura que desde $x = 0$ hasta $x = 6\pi$ se completa el ciclo de la nueva gráfica, y sus intersecciones con el eje x se repetirán en cada recorrido de 3π.

¡TOMA NOTA!

La ecuación

$$sen\,x = \frac{3}{2}$$

no tiene solución porque

$$-1 \leq sen\,x \leq 1$$

en todo $x \in \mathbb{R}$

¡TOMA NOTA!

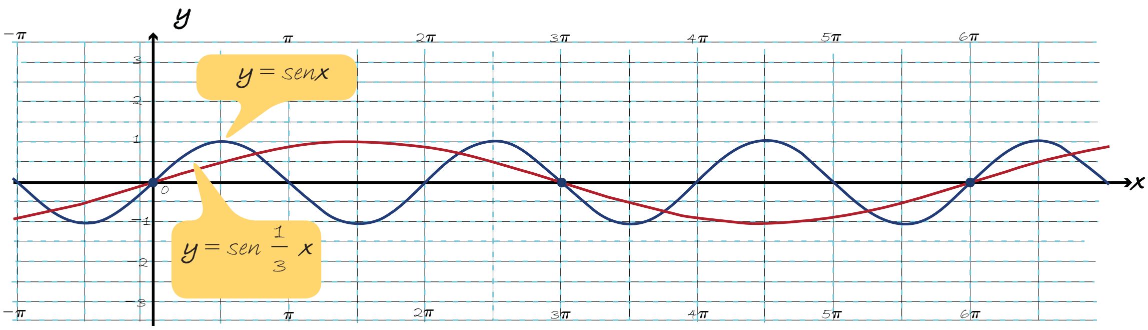
La ecuación

$$\cos x = -\frac{3}{4}$$

no tiene solución porque

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

en todo $x \in \mathbb{R}$



El efecto del parámetro $B > 0$ en las ecuaciones

$$y = \operatorname{sen} Bx \quad \text{o} \quad y = \cos Bx$$

se interpreta en un **aumento** o **reducción** del **período** de la gráfica original respectiva

$$y = \operatorname{sen} x \quad \text{o} \quad y = \cos x$$

El período original es de 2π, y para que

$$0 \leq Bx \leq 2\pi$$

se requiere que

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{B}$$

lo cual nos determina el nuevo período de $\frac{2\pi}{B}$.

De esta última expresión, podemos decir que, cuando B es mayor que 1, el período se reduce; y cuando B es menor que 1, el período aumenta en la nueva gráfica.

Asociando el período con la letra T, hemos encontrado una expresión que le relaciona con el parámetro B, $T = \frac{2\pi}{B}$.

Considerando que la **frecuencia** es un término que expresa la cantidad de ciclos por unidad de "tiempo", resulta que $f = \frac{1}{T}$ y por lo tanto $f = \frac{B}{2\pi}$ o bien, $B = 2\pi f$.

Toca analizar el efecto que provoca en las funciones originales $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ el reemplazo del ángulo x por la expresión $x + C$, obteniendo

$$y = \operatorname{sen}(x + C) \qquad y = \cos(x + C)$$

Partiendo de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, podemos identificar primeramente que en el comportamiento de la nueva función $y = \operatorname{sen}(x + C)$ se conserva la amplitud y el período de la función básica.

Por otra parte, sabemos que

$$\operatorname{sen} \boldsymbol{x} = 0 \quad \text{en} \quad \boldsymbol{x} = n\pi, \; n \in \mathbb{Z}.$$

entonces,

$$\operatorname{sen}(\boldsymbol{x} + C) = 0 \quad \text{en} \quad \boldsymbol{x} + C = n\pi, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los cortes con el eje x de la nueva gráfica se producen en los valores de

$$\boldsymbol{x} = n\pi - C \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En particular, el corte original en $x = 0$ (cuando $n = 0$) de $y = sen\,x$ ahora se mueve a $x = -c$, lo que provoca una traslación de la gráfica hacia la derecha en el caso de c negativo, $c < 0$ (ya que $x = -c$ sería positivo) o hacia la izquierda en el caso de c positivo, $c > 0$ (ya que $x = -c$ sería negativo).

Ejemplifiquemos cuando la nueva función es

$$y = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ donde } c = -\frac{\pi}{4} < 0$$

entonces, haciendo $sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ obtenemos particularmente que $x - \frac{\pi}{4} = 0$ y así $x = \frac{\pi}{4}$. En general, todo corte con el eje x de $y = sen\,x$ se traslada $\frac{\pi}{4}$ a la derecha.

Imaginando esas acciones de "mover" gráficamente esos cortes $\frac{\pi}{4}$ a la derecha, podemos observar un comportamiento común en el trazado de todos los otros puntos de la nueva gráfica:

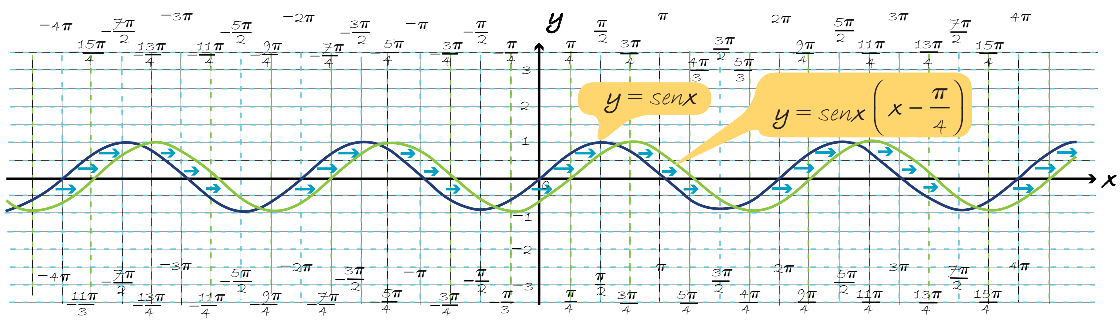
¡TOMA NOTA!

La ecuación

$$\cos x = 0$$

tiene infinitas soluciones:

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \\ -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \ldots \end{cases}$$



De este modo, la gráfica original experimenta una **traslación horizontal hacia la derecha** de $\frac{\pi}{4}$ unidades.

Análogamente, si la nueva función es

$$y = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ donde } c = \frac{\pi}{4} > 0,$$

entonces haciendo $sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ obtenemos particularmente que $x + \frac{\pi}{4} = 0$ y así $x = -\frac{\pi}{4}$ lo que nos dice que el corte $x = 0$ original se traslada a la izquierda en $x = -\frac{\pi}{4}$.

En general, todo corte con el eje x de $y = sen\,x$ se traslada a la izquierda, y llega a $x = -\frac{\pi}{4}$.

¡TOMA NOTA!

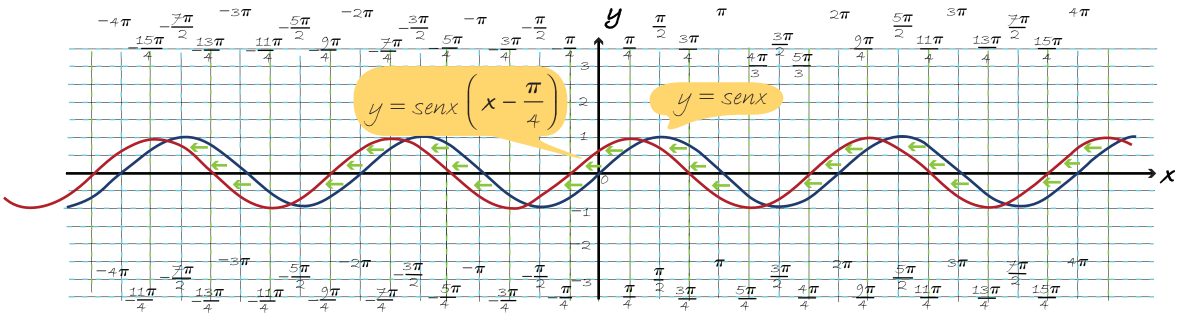
Para expresar todos esos valores se escribe

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z},$$

ó $x = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z},$

porque $2n+1$ ó $2n-1$ representa a los números impares

Moviendo cada corte hacia la izquierda, toda la curva se traslada simultáneamente, obteniendo la nueva gráfica:



Podemos identificar en la expresión

$$y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

un efecto de **traslación horizontal hacia la izquierda** de $\frac{\pi}{4}$ unidades realizado sobre la gráfica básica $y = \operatorname{sen} x$.

Identificamos en forma general el efecto gráfico de **traslación horizontal**.

Este efecto es consecuencia del cambio algebraico en la expresión original ocasionado al introducir un parámetro representado por c que se suma al ángulo x, dando lugar a las expresiones:

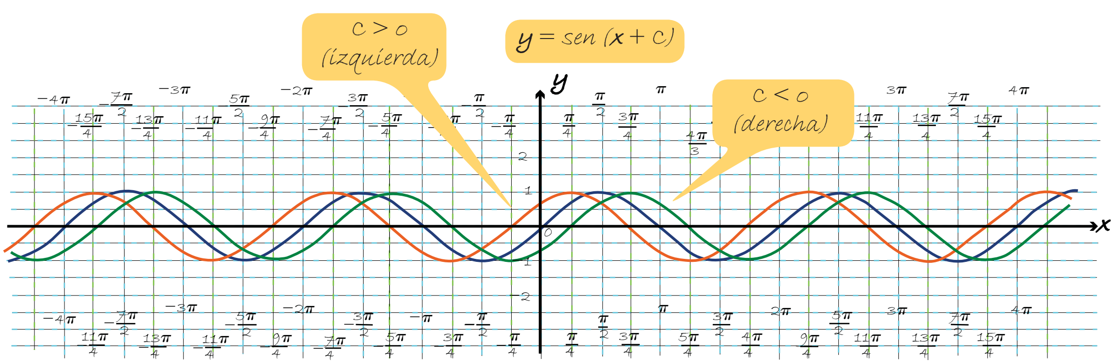
$$y = \operatorname{sen}(x + c) \qquad y = \cos(x + c)$$

La traslación es un efecto "rígido" que sólo "arrastra" la curva sin cambiar su forma.

Puede darse hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo de que c sea negativo o positivo, respectivamente. Esta traslación es conocida como el desfase de onda.

Observa que cuando c es múltiplo del período, la gráfica se desfasa pero queda superpuesta en la original.

Expresamos en forma global este comportamiento en la siguiente figura:



Aún nos resta identificar un último efecto en la gráfica de las funciones originales $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$, uno con el que ya hemos tenido contacto previamente en otros modelos matemáticos. Se trata del efecto que se provoca en la gráfica por la suma de una constante D a la expresión completa de la función.

Analizaremos ahora las expresiones generales

$$y = \operatorname{sen} x + D, \qquad y = \cos x + D$$

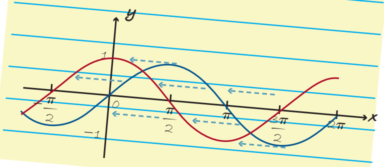
En el caso de que D sea un número positivo, podemos visualizar que se está sumando ese número al valor calculado y representado por $\operatorname{sen} x$ o $\cos x$. En caso de ser D un número negativo, al valor calculado $\operatorname{sen} x$ o $\cos x$ se le está sumando un número negativo, o lo que es lo mismo, se le está restando un número positivo.

Visualmente, el efecto que esta suma/resta provoca se refleja en un desplazamiento de cada ordenada y hacia arriba/abajo, respectivamente, de modo que, podemos imaginar que la curva original, sea $y = \operatorname{sen} x$ o $y = \cos x$, experimenta una **traslación vertical**, al ser modificada por el parámetro D.

¡Toma nota!

Ojo:

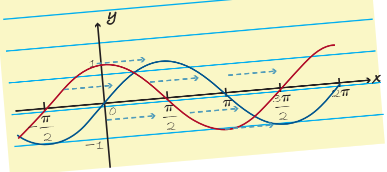
$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



¡Toma nota!

Ojo:

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$



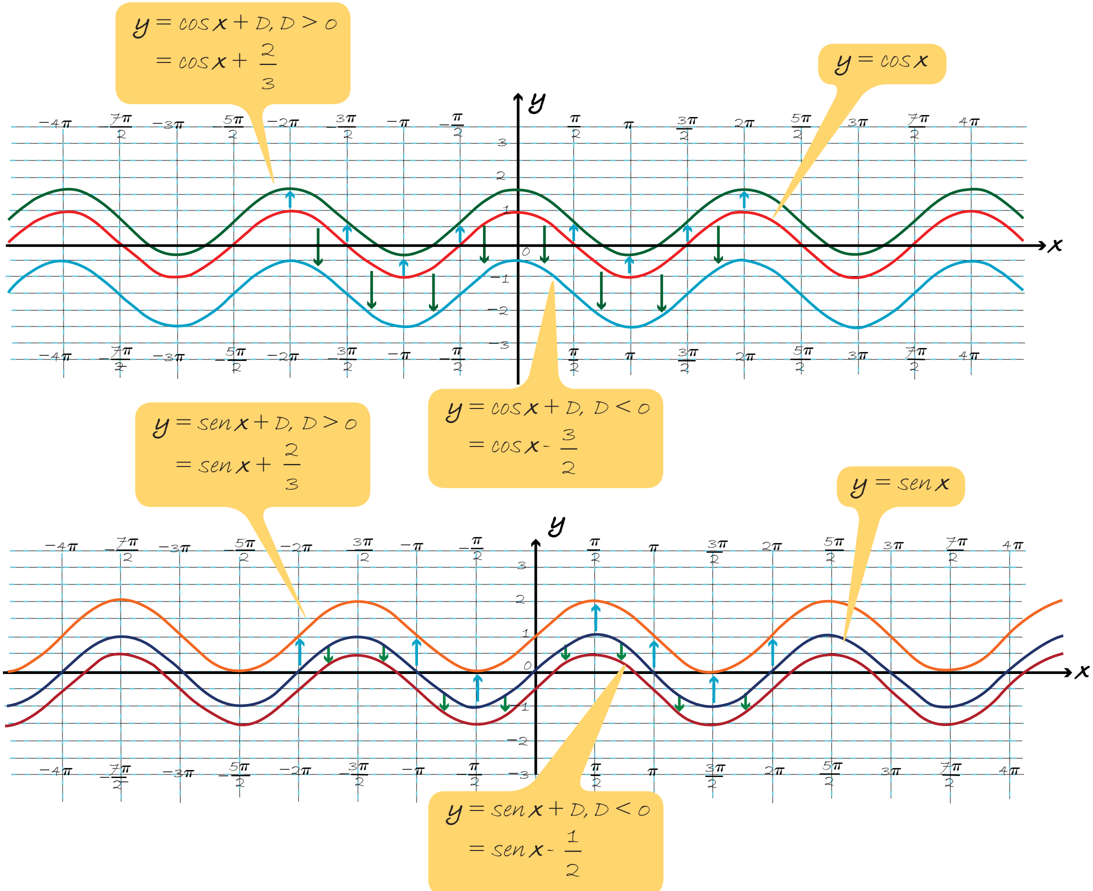
El efecto del parámetro D en las expresiones

$$y = \operatorname{sen} x + D, \qquad y = \cos x + D$$

provoca una traslación vertical de D unidades hacia arriba si $D > 0$ o hacia abajo si $D < 0$.

Se trata de un efecto "rígido" en el sentido de que la curva no pierda su forma, sólo se "arrastra" verticalmente para llegar a una nueva altura.

Ilustramos esto en las siguientes figuras:



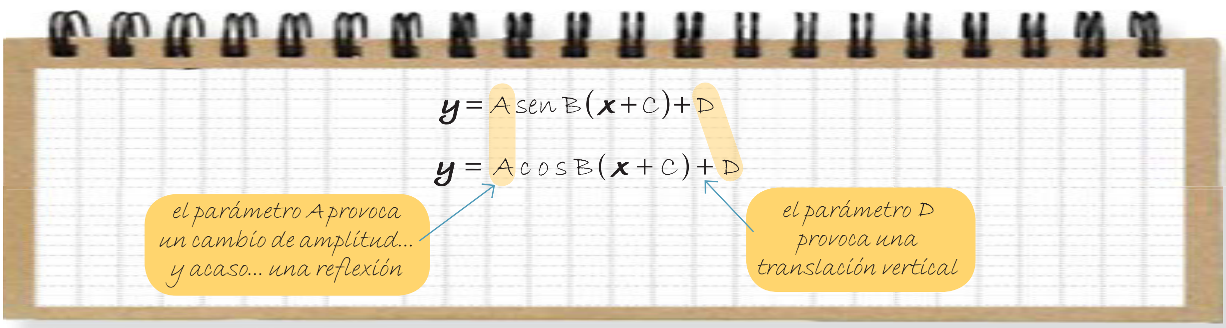
Síntesis y Aplicación de efectos combinados.

Las expresiones:

$$y = A \operatorname{sen} B(x + C) + D \qquad y = A \cos B(x + C) + D$$

representan una combinación de los diferentes efectos gráficos que hemos analizado por separado. Nuestra intención es interpretar cada uno de ellos de modo que, en el proceso de secuenciarlos adecuadamente, podamos obtener la gráfica que corresponde a la expresión completa como un producto final de dicho proceso.

En principio, resulta relativamente sencillo identificar lo siguiente:



Ambos efectos se aplican a la gráfica "básica" seno o coseno, la cual a su vez, se ha visto afectada por los otros dos parámetros B y C. Para analizar el efecto de estos últimos parámetros resulta importante visualizar que la expresión $B(x+C)$ tiene el parámetro B factorizado y que el parámetro C esta sumado a la variable x (y no a Bx).

Cuando la expresión cumple con esa **factorización** podemos identificar lo siguiente:

$$y = \operatorname{sen}[B(x+C)]$$

$$y = \cos[B(x+C)]$$

el parámetro B provoca un cambio en el periodo

el parámetro C provoca una translación horizontal

De esta manera, el aprendizaje de los efectos gráficos posibilita que accionemos un proceso visual para graficar:

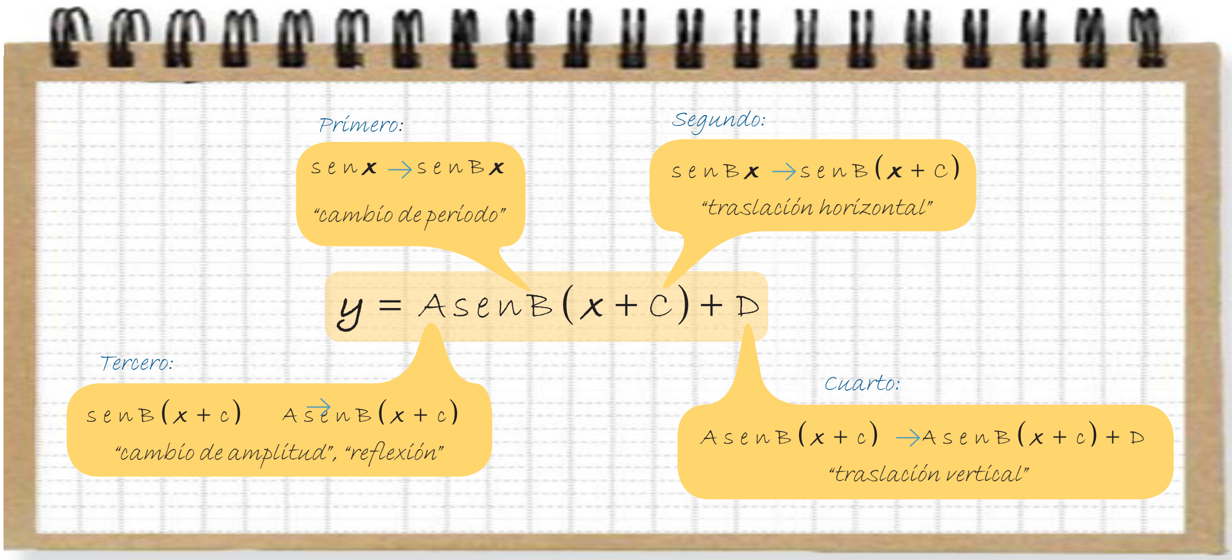
$$y = A \operatorname{sen} B(x+C) + D$$

que manifiesta una combinación de efectos.

Te proponemos una estrategia sistemática para realizar esa visualización al considerar la secuencia de expresiones siguientes:

Secuencia	Expresión algebraica	Interpretación del efecto gráfico	Información adicional
Inicio	$y = \operatorname{sen} x$	gráfica básica	
Primero	$y = \operatorname{sen} Bx$	cambio en el periodo	nuevo periodo $\frac{2\pi}{B}$
Segundo	$y = \operatorname{sen} B(x+C)$	traslación horizontal	$C > 0$ izquierda $C < 0$ derecha
Tercero	$y = A \operatorname{sen} B(x+C)$	cambio en amplitud, y acaso también, reflexión al eje x.	$A > 1$ alarga $0 < A < 1$ acorta $-1 < A < 0$ refleja y acorta $A < -1$ refleja y alarga
Cuarto	$y = A \operatorname{sen} B(x+C) + D$	traslación vertical	$D > 0$ arriba $D < 0$ abajo

Podemos sintetizar la secuencia en la siguiente figura:



En la siguiente sección aplicaremos la estrategia de graficación propuesta con la secuencia anterior.

PROBLEMA 1.

La gráfica de

$$y = 1 + \frac{\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{3}$$

puede visualizarse como el producto final de una secuencia de efectos gráficos aplicados a la gráfica base

$$y = \operatorname{sen} x.$$

Aplica la secuencia de combinación de efectos que hemos propuesto para obtener su gráfica.

Para realizar estos efectos, será necesario reacomodar algebraicamente la expresión de la siguiente manera:

$$y = 1 + \frac{\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{3}$$

$$y = 1 + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

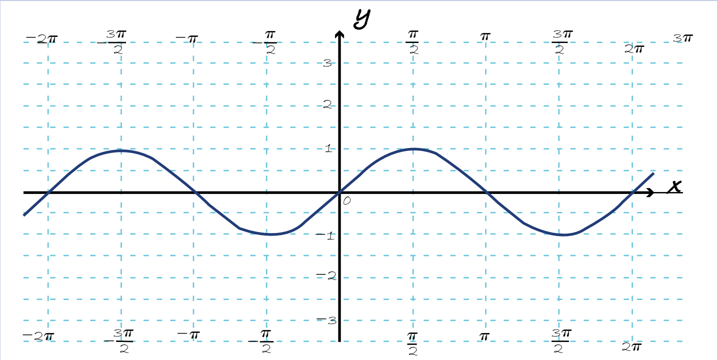
$$y = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

$$y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

Primero

Partimos de la gráfica

$y = \operatorname{sen} x$



Segundo

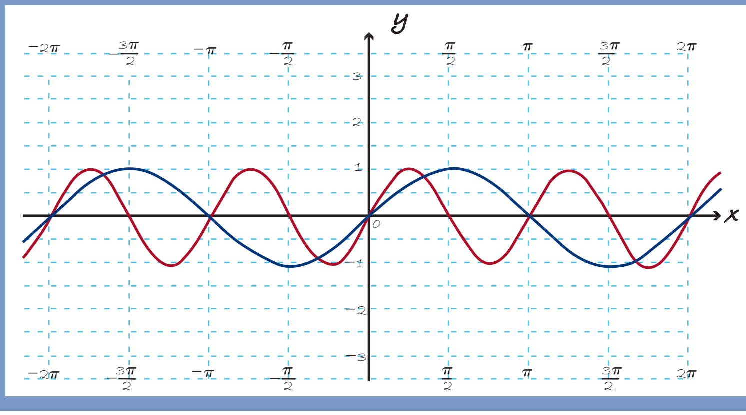
Afectamos el período:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Cortes con eje x:

$$x = n\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ con } n \in \mathbb{Z}.$$

$$y = sen\, 2x$$



Tercero

Trasladamos horizontalmente:

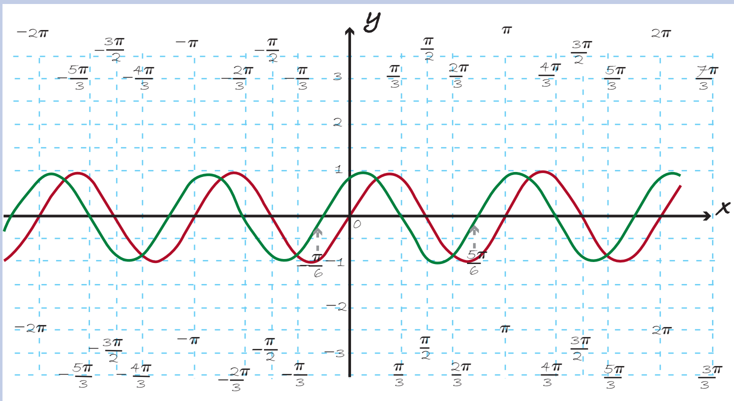
$\frac{\pi}{6}$ unidades hacia la izquierda.

Cortes eje x:

$$x = n\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6},$$

con $n \in \mathbb{Z}$.

$$y = sen\, 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

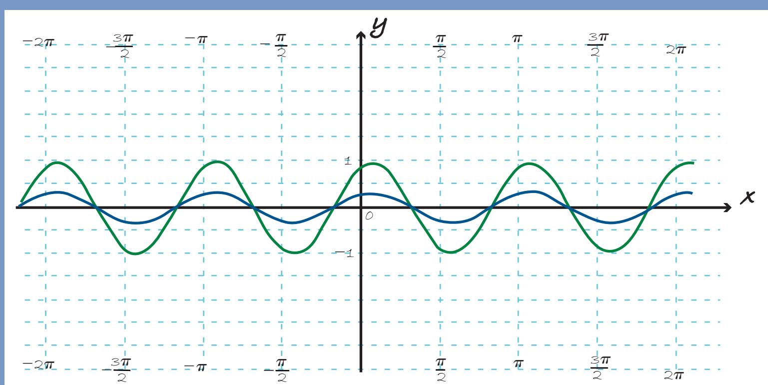


Cuarto

Reducimos amplitud:

de $A = 1$ a $A = \frac{1}{3}$

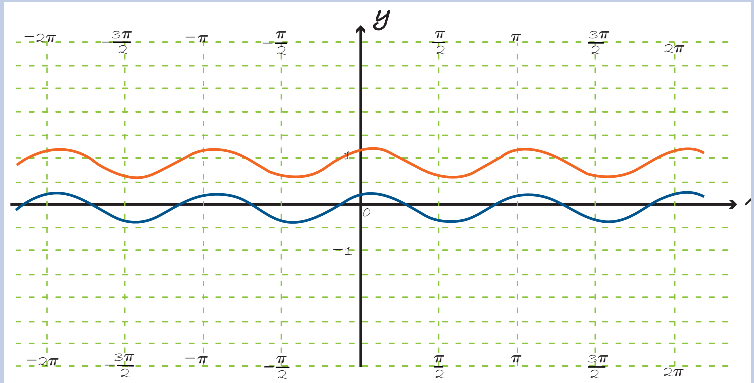
$$y = \frac{1}{3} sen\, 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$



Quinto

Trasladamos hacia arriba una unidad
Los valores de y se encuentran acotados entre $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{4}{3}$.

$$y = \frac{1}{3} sen\left(2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1$$



Con esta última expresión, secuenciamos el orden en los parámetros:

Problema 2.

Realiza de una manera compacta la aplicación de la secuencia de efectos gráficos que es necesaria para visualizar la gráfica de:

$$y = -2 - 4\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Primero reacomodemos algebraicamente la expresión:

$$y = -2 - 4\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2$$

y factorizando el $\frac{1}{2}$ *en el ángulo para dejar* x *con coeficiente* 1 *tenemos que*

$$y = -4\cos\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$$

De ahí, podemos anticipar su gráfica identificando el orden siguiente:

Primero:

$\cos x \rightarrow \cos \frac{1}{2} x$

el periodo aumenta al doble

Segundo:

$\cos \frac{1}{2} x \rightarrow \cos \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

traslación de $\frac{\pi}{2}$ derecha

Quinto:

$-4\cos \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow -4\cos \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$

traslación de 2 hacia abajo

$$\boxed{y = -4\cos \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2}$$

Cuarto:

$4\cos \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 4\cos \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

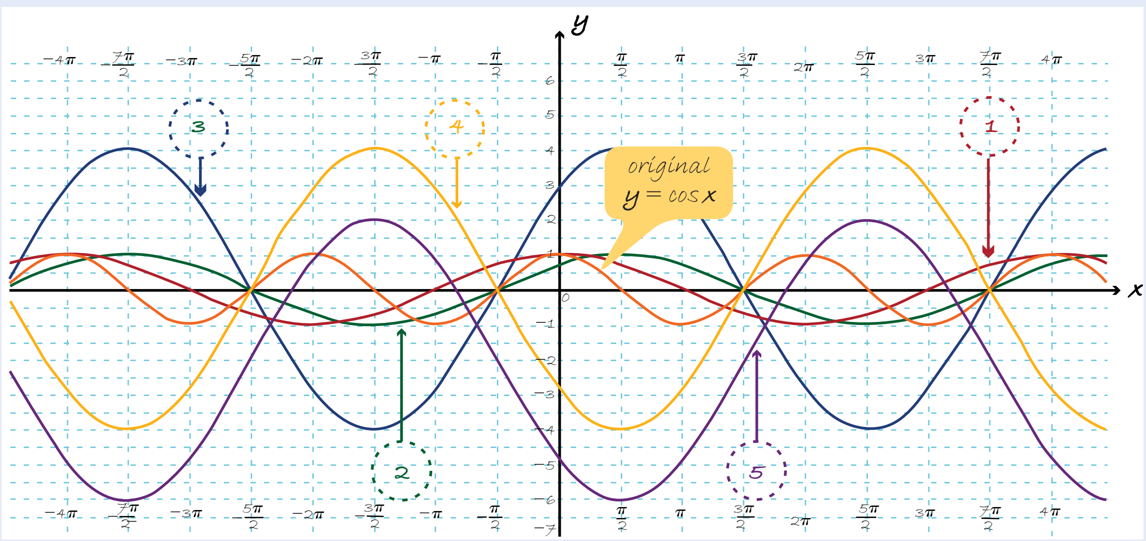
reflexión respecto al eje x

Tercero:

$\cos \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 4\cos \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

la amplitud aumenta a 4

Identificamos los efectos gráficos secuenciados en la siguiente figura realizada en un mismo sistema coordenado y utilizando un software de graficación.

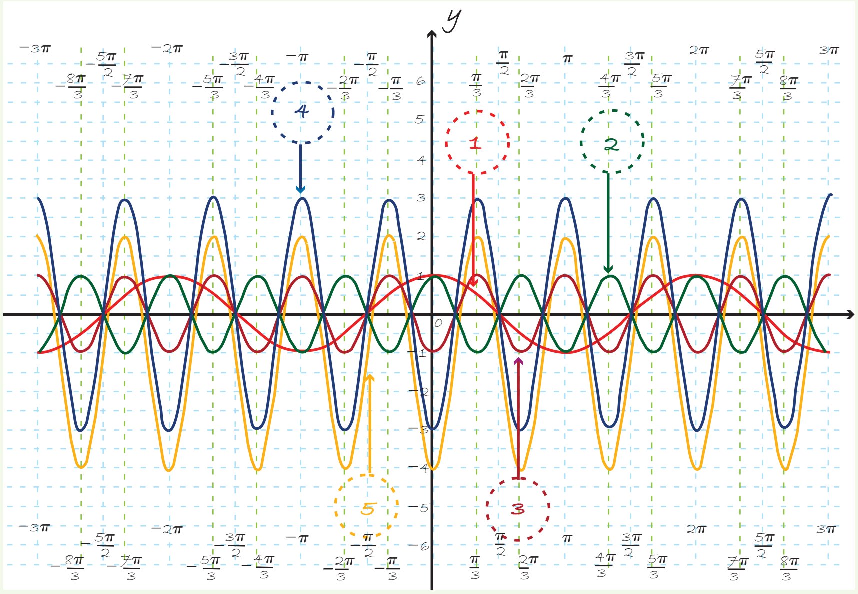


PROBLEMA 1.

La función

$$y = -1 + 3\cos(3x - \pi)$$

se graficó en un software de graficación habiendo seguido la secuencia que hemos propuesto.



En las líneas de abajo debes colocar una representación algebraica que corresponda con el efecto que se observa en la gráfica correspondiente al número (con respecto a la gráfica anterior), hasta culminar en la función dada en este problema.

1 ______________________

2 ______________________

3 ______________________

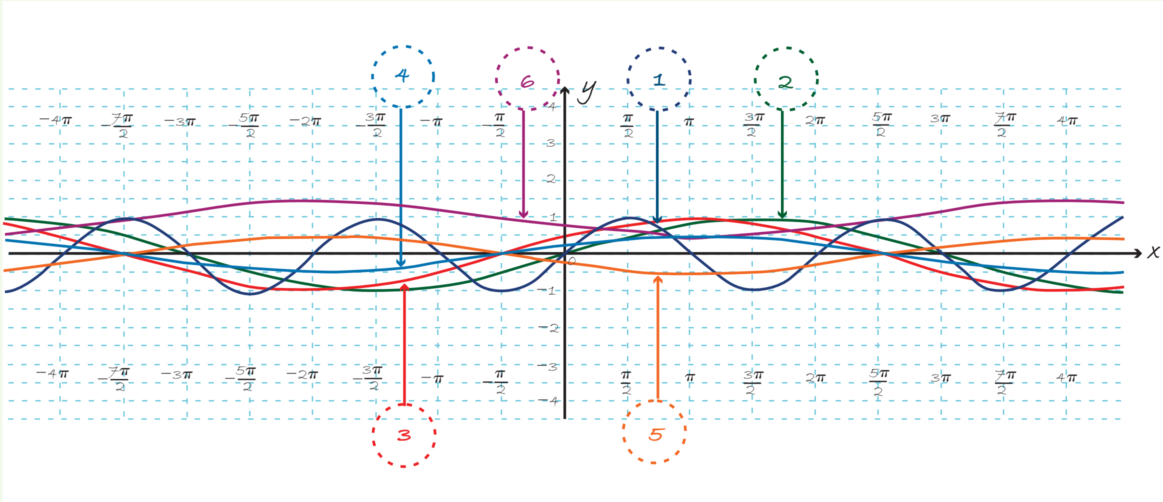
4 ______________________

5 ______________________

Respuestas: $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen} 2x$ $y = \operatorname{sen} 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $y = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $y = -2 + \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

PROBLEMA 2.

Visualiza cuáles pueden ser las representaciones algebraicas que aparecen graficadas en la siguiente imagen hasta llegar a identificar una que corresponde con la gráfica final 6.



1 ______________________________

2 ______________________________

3 ______________________________

4 ______________________________

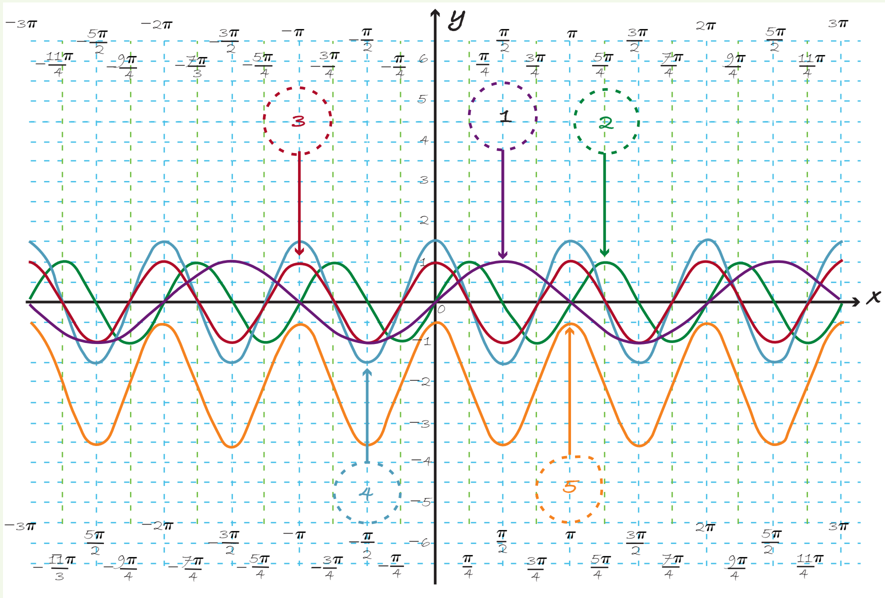
5 ______________________________

Respuestas: $y = \operatorname{sen} x$ $y = \operatorname{sen} \frac{1}{3} x$ $y = \operatorname{sen} \frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $y = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Problema 3.

Visualiza las representaciones algebraicas que fueron graficadas, en la siguiente figura hasta llegar a identificar la que corresponde con la gráfica 5.



1 ____

2 ____

3 ____

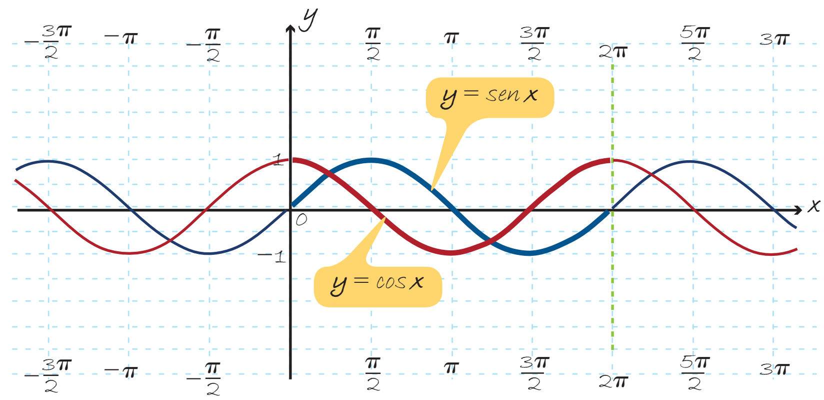
4 ____

5 ____

Respuestas: $y = \cos x$ $\quad y = \cos 3x$ $\quad y = \cos 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad y = 3\cos 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad y = -1 + 3\cos 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Relación gráfica entre función y derivada

La situación problema 1.7 que hemos propuesto en este Tema nos ha informado que la derivada de $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = \cos x$, mientras que la derivada de esta última función es $f''(x) = -\operatorname{sen} x$. Esta relación entre ellas repercute en el comportamiento "análogo" entre ambas funciones. En la siguiente imagen hemos colocado en el mismo sistema coordenado a la función $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ y su derivada $y' = f'(x) = \cos x$.

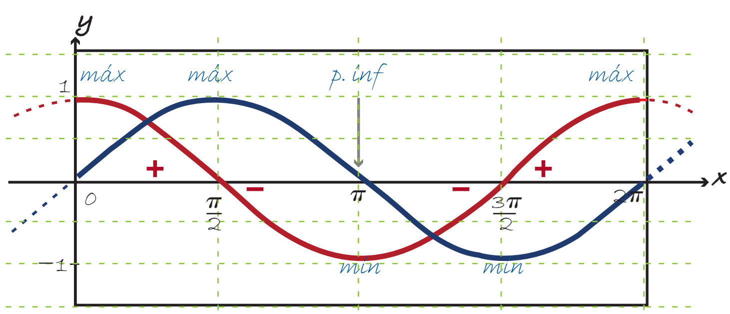


Concentrémonos en el comportamiento de **función** y **derivada** en el ciclo principal de $x = 0$ a $x = 2\pi$ que hemos remarcado en la figura.

Visualmente podemos reconocer que cuando $y' = \cos x = 0$ se tienen los máximos y mínimos (relativos) de $y = \operatorname{sen} x$, tal como lo hemos ya establecido en el Tema 1.4.

Por otra parte, podemos reconocer que en los máximos y mínimos (relativos) de $y' = \cos x$ se tienen puntos de inflexión para $y = \operatorname{sen} x$, tal como lo hemos establecido también anteriormente en el Tema 1.5.

La siguiente figura la haremos funcionar a modo de un **recordatorio visual** de estos importantes hechos en la relación grafica de función/derivada.



Esta imagen refleja el comportamiento "íntimamente" relacionado que mantiene $f(x) = \operatorname{sen} x$ con su derivada $f'(x) = \cos x$.

Además de la información sobre máximos, mínimos y puntos de inflexión se puede observar cómo los valores **numéricos** de máximos y mínimos de la derivada se relacionan con la **inclinación** de la curva $y = f(x) = \operatorname{sen} x$, en sus puntos de inflexión.

También en una "imagen" podemos reconocer los procesos algorítmicos para **derivar** y **antiderivar** a las funciones trigonométricas seno y coseno:

$F(x) = -\cos x + C$

antiderivada

$f(x) = \operatorname{sen} x$

derivada

$f'(x) = \cos x$

$F(x) = \operatorname{sen} x + C$

antiderivada

$f(x) = \cos x$

derivada

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

Por otra parte, la situación problema complementaria nos llevó a establecer los modelos senoidal y cosenoidal en una forma general afectada con parámetros que modifican la amplitud y periodo de estas gráficas, además de provocar traslaciones horizontales (desfase) y verticales.

Las funciones senoidales y cosenoidales de la forma

$$f(x) = A \operatorname{sen} B(x + C) + D \qquad f(x) = A \cos B(x + C) + D$$

permiten modelar diferentes situaciones de variación de magnitudes en contextos reales donde la **periodicidad** es una característica intrínseca del significado que se asocia a la magnitud.

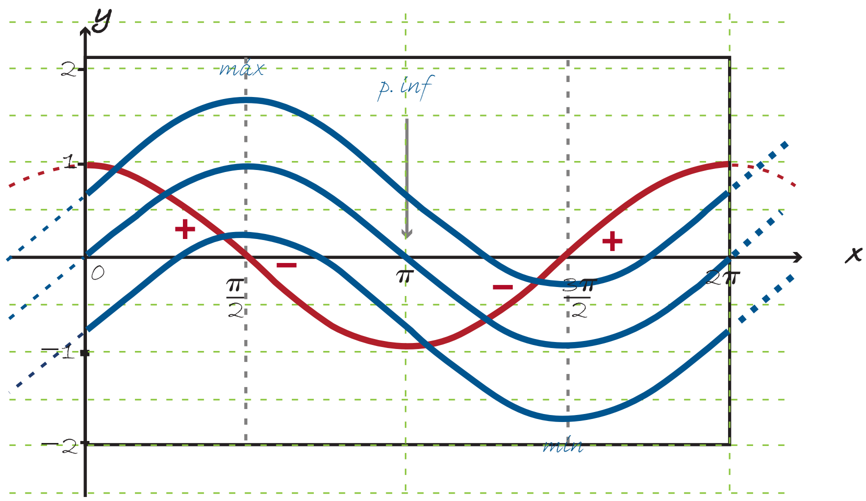
El propósito del presente apartado es dejar establecido el proceso algorítmico para derivar y antiderivar estos modelos trigonométricos cuando se ven afectados por los parámetros A, B, C, D. Aún y cuando por ahora daremos una argumentación visual conveniente, en la siguiente unidad tendrás la oportunidad de reconocer que estamos utilizando un caso particular del resultado que en ese momento reconoceremos como Regla de la Cadena para derivadas.

Por cuestiones de simplicidad en los argumentos, nos conviene considerar primeramente al parámetro D.

Es sencillo reconocer que si

$$f(x) = \operatorname{sen} x + D \quad \text{entonces} \quad f'(x) = \cos x,$$

pues la gráfica de $f(x)$ es sólo una traslación vertical "rígida"... y la derivada de la constante D es 0. La familia de funciones representada por $f(x) = \operatorname{sen} x + D$ comparten la misma derivada.



Si $\quad f(x) = \operatorname{sen} x + D \quad$ entonces $\quad f'(x) = \cos x.$

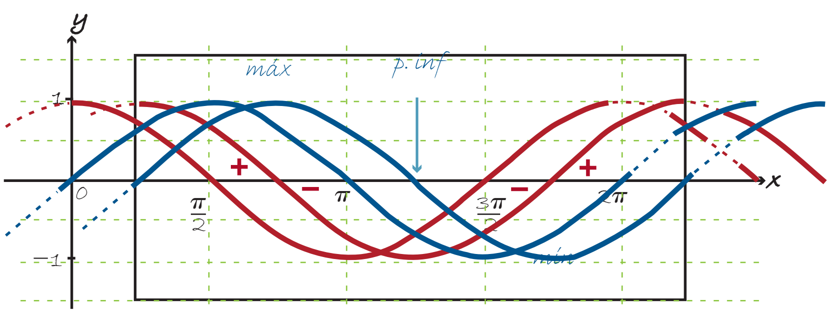
Si $\quad f(x) = \cos x + D \quad$ entonces $\quad f'(x) = -\operatorname{sen} x.$

Por otra parte, si consideramos ahora a

$$f(x) = \operatorname{sen}(x + C)$$

sabemos que el efecto es nuevamente una traslación "rígida" horizontal, sea a la derecha o a la izquierda.

Resulta relativamente natural recorrer la gráfica del coseno también para posicionarla justo de la forma en que se preserve la relación original (recordatorio visual) entre función seno y su derivada coseno. Observa la figura enseguida.



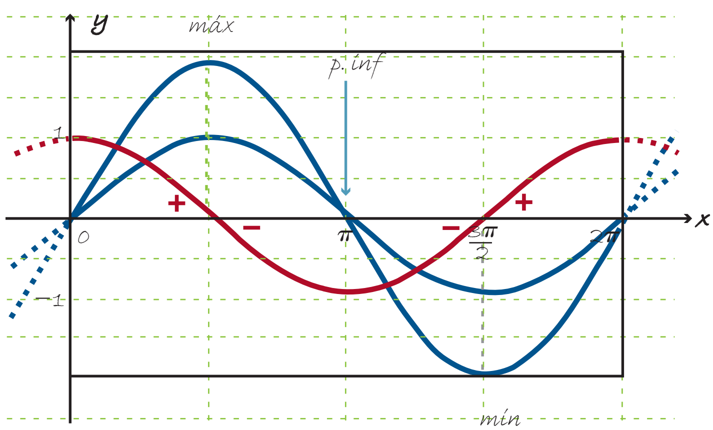
Estamos argumentando que al trasladar horizontalmente $y = sen(x + c)$, la traslación de $y' = \cos x$ a $y' = \cos(x + c)$ sigue manifestando la relación función/derivada de modo que:

Si $f(x) = sen(x + c)$ entonces $f'(x) = \cos(x + c)$

Si $f(x) = \cos(x + c)$ entonces $f'(x) = -sen(x + c)$

Para considerar el parámetro A, debemos ahora observar lo que ocurre gráficamente con este parámetro. Sabemos que modifica la amplitud. Propongamos un valor para guiar nuestros argumentos, sea $A = 2$, y veamos con detalle simultáneamente

$$y = sen\, x \quad \text{y} \quad y = 2\, sen\, x.$$



Observemos que la relación entre el gráfico nuevo $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x$ y el gráfico original $f(x) = \mathrm{sen}\,x$ se mantienen en cuanto al máximo y mínimo, pues estos se siguen dando en los cortes con el eje horizontal de la derivada, $f'(x) = \cos x$.

Sin embargo es notoria otra diferencia del comportamiento entre $f(x) = \mathrm{sen}\,x$ y $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x$, pues esta última, en su punto de inflexión π, muestra una "inclinación mayor" a la que tiene $f(x) = \mathrm{sen}\,x$. Esto debe reflejarse en su función derivada necesariamente, lo que nos lleva a concluir que **no puede coincidir** con $f'(x) = \cos x$ porque no preserva la relación numérica (recordatorio visual) que mantiene $y = \mathrm{sen}\,x$ con $y' = \cos x$.

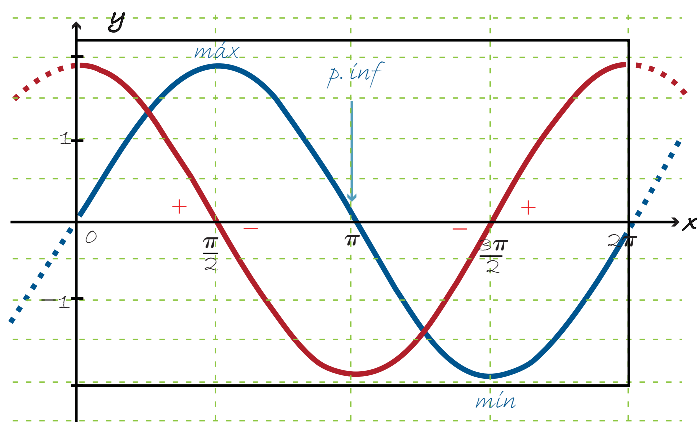
Pero... ¿qué le falta a la $f'(x) = \cos x$ para cumplir con esa relación numérica con $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x$?

Anteriormente hemos justificado un razonamiento relacionado con el contexto real del movimiento en línea recta: un "múltiplo de la velocidad" corresponde con un correspondiente "múltiplo de la posición".

Con esto en mente, es sugerente considerar que la derivada de

$$f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x \quad \text{sea} \quad f'(x) = 2\cos x,$$

y con ello se mantiene la relación visual de función y derivada entre estos nuevos gráficos, como se observa enseguida.

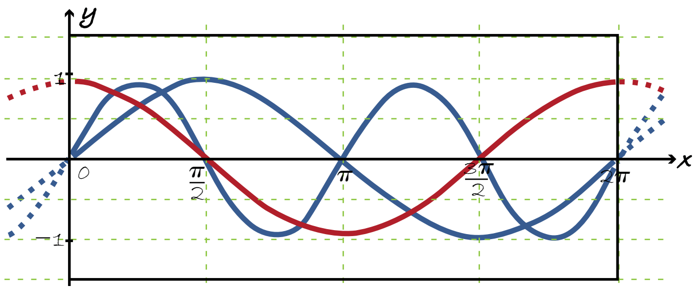


Si $f(x) = A\,\mathrm{sen}\,x$ entonces $f'(x) = A\cos x$

Si $f'(x) = A\cos x$ entonces $f'(x) = -A\,\mathrm{sen}\,x$

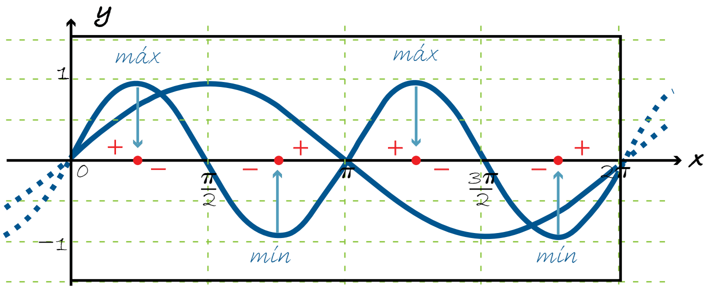
Vamos a considerar ahora lo que deba ocurrir al derivar la función $f(x) = \operatorname{sen} Bx$. Consideramos un valor particular de B que nos guíe en la argumentación, sea $B = 2$.

La gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ comparada con la de $f(x) = \operatorname{sen} x$ la mostramos enseguida.



La derivada de $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ no puede seguir siendo la misma derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ porque los máximos y mínimos de $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ han aumentado en cantidad, por tanto, su derivada debe cortar el eje horizontal más veces de las que lo hace la función $f'(x) = \cos x$.

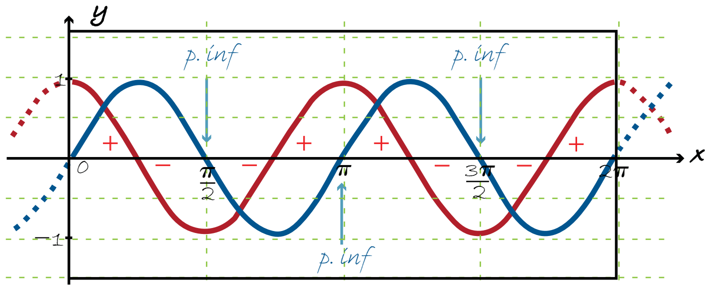
Señalemos en la gráfica los puntos en el eje x donde la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ debe cruzar.



Es evidente que la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ debe contemplar el mismo cambio de período… debe estar relacionada con la expresión $\cos 2x$... pero... ¿será igual a ésta?...

Al menos los cruces con el eje x señalan los valores máximos y mínimo, pero ciertamente, cualquier múltiplo de $\cos 2x$ $(A \cos 2x)$ también lo hace.

Observemos la relación que mantienen las gráficas de $\operatorname{sen} 2x$ y $\cos 2x$ en la siguiente figura.



Se debe tener una percepción visual reflexiva para notar que hay un detalle que no corresponde con la relación original de la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x \text{ y su derivada } f'(x) = \cos x$$

(recordatorio visual), se trata del comportamiento particular de la inclinación de la curva $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ en sus puntos de inflexión. En la gráfica anterior no se percibe la relación numérica original que mantienen las inclinaciones de los puntos de inflexión de $f(x) = \operatorname{sen} x$ con la altura máxima o mínima ± 1 en su derivada.

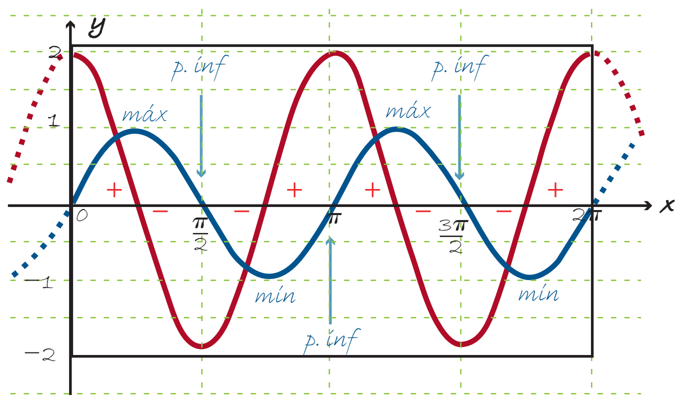
Apoyándonos en el desarrollo de la competencia de visualización desarrollada hasta el momento, sugerimos considerar una modificación en la amplitud de la función $\cos 2x$ para hacer corresponder sus valores máximo y mínimo con la inclinación de los puntos de inflexión en la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} 2x$.

En la figura enseguida proponemos

$$f'(x) = 2\cos 2x$$

para satisfacer esta condición y considerarle así como la derivada de

$$f(x) = \operatorname{sen} 2x.$$



Si $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ entonces $f'(x) = 2\cos 2x$

Si $f(x) = \cos 2x$ entonces $f'(x) = -2\operatorname{sen} 2x$

En síntesis,

reuniendo los cuatro efectos gráficos de los parámetros A, B, C, y D, podemos establecer que

si la función es

$$f(x) = A \operatorname{sen} B(x + C) + D$$

entonces su derivada es

$$f'(x) = AB \cos B(x + C)$$

y si la función es

$$f(x) = A \cos B(x + C) + D$$

entonces su derivada es

$$f'(x) = -AB \operatorname{sen} B(x + C)$$

Sabiendo derivar estos modelos sabemos antiderivarles también. Para proponer la función antiderivada, conjeturemos cuál puede ser, y derivémosle para de este modo verificar que la propuesta conjeturada sea la correcta. Hacemos explícita la propuesta de antiderivadas enseguida, y reuniendo ambos procesos algorítmicos en una sola "imagen".

antiderivada

$$F(x) = -\frac{A}{B}\cos B(x+C) + Dx + E$$

$$f(x) = A\,\mathrm{sen}\,B(x+C) + D$$

derivada

$$f'(x) = AB\cos B(x+C)$$

---

derivada

$$F(x) = \frac{A}{B}\,\mathrm{sen}\,B(x+C) + Dx + E$$

$$f(x) = A\cos B(x+C) + D$$

antiderivada

$$f'(x) = -AB\,\mathrm{sen}\,B(x+C)$$

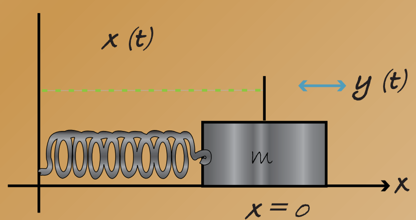
Aplicación. La función senoidal en contextos reales

Caso 1. Sistema Masa-resorte

Al inicio de este Tema planteamos un contexto real con la situación problema que guiara el desarrollo del contenido. Atendimos la situación para valores simples de los parámetros involucrados en las expresiones matemáticas, y ahora estamos en posibilidad de dar la solución completa. Recordemos la situación.

Un sistema masa resorte consiste de una masa m unida a un resorte que a su vez esta fijo en una pared. Suponemos que no hay rozamiento sobre la superficie horizontal de modo que el movimiento que experimenta la masa oscila continuamente entre dos valores extremos.

Siendo $x(t)$ y $v(t)$ la posición y la velocidad en todo tiempo de la masa, se tiene que se cumple el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:



$$x'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Mediante una hoja de cálculo hemos implementado un procedimiento numérico para visualizar el comportamiento de las funciones $x(t)$ y $v(t)$ en el caso particular de $k = 1$, $m = 1$ y las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $v(0)=1$. De este modo llegamos a establecer que, en el caso de las ecuaciones:

$$x'(t) = v(t) \quad \text{y} \quad v'(t) = -x(t)$$

la solución la dan las funciones $x(t) = \operatorname{sen}(t)$ y $v(t) = \cos(t)$

cuyas derivadas son: $x'(t) = \cos(t)$ y $v'(t) = -\operatorname{sen}(t)$

Conjetura y corrobora cuáles son las funciones $x(t)$ y $v(t)$ para que las ecuaciones originales (con k y m) se satisfagan. Considera las mismas condiciones iniciales $x(0) = 0$, $v(0) = 1$.

Conocemos la derivada de

$$f(x) = \operatorname{sen} Bx, \text{ que es } f'(x) = B\cos Bx$$

y la derivada de $f(x) = \cos Bx$, *que es* $f'(x) = -B\operatorname{sen} Bx$.

Estas reglas nos permiten hacer conjeturas sobre cuáles son las funciones $x(t)$ *y* $v(t)$ *que satisfacen las ecuaciones*

$$x'(t) = v(t) \quad \text{y} \quad v'(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Por ejemplo, a modo de "ensayo y error", podríamos proponer que la solución para $x(t)$ *del sistema de ecuaciones diferenciales sea*

$$x(t) = \frac{k}{m}\operatorname{sen} t.$$

Partiendo de la ***conjetura*** *hecha, debemos ver ahora que se cumplan las ecuaciones diferenciales, pero veamos lo que pasa porque, como conjetura, está sujeta a ser comprobada…*

Por una parte, derivando la función $x(t)$ *propuesta encontramos la función* $v(t)$.

$$x'(t) = \frac{k}{m}\cos t = v(t)$$

Tenemos entonces declarada la función $v(t)$ *en base a la conjetura hecha como*

$$v(t) = \frac{k}{m}\cos t.$$

Si derivamos ahora a $v(t)$, *deberíamos obtener lo que expresa la segunda ecuación diferencial arriba, a saber, que*

$$v'(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Veamos si esto es así… derivamos $v(t)$:

$$v'(t) = \frac{k}{m}\left(-\operatorname{sen} t\right) = -\frac{k}{m}\operatorname{sen} t$$

¡TOMA NOTA!

Hacer una **conjetura** es formarse un juicio sobre algo que no es evidente apoyándose en indicios y observaciones.

¡TOMA NOTA!

La historia de la Matemática está llena de inferencias que los matemáticos proponen como **conjeturas**… …después ganan su validez en la teoría.

¿Pero... es $v'(t) = -\frac{k}{m}\operatorname{sen} t = -\frac{k}{m}x(t)$*?*

La respuesta es ***no****, porque la* $x(t)$ *propuesta fue* $x(t) = \frac{k}{m}\operatorname{sen} t$. *Con esta* $x(t)$ *la ecuación diferencial no se satisface, pues por un lado tenemos*

$$v'(t) = -\frac{k}{m}\operatorname{sen} t$$

y por otro lado tenemos que

$$-\frac{k}{m}x(t) = -\frac{k}{m}\left(\frac{k}{m}\operatorname{sen} t\right) = -\frac{k^2}{m^2}\operatorname{sen} t.$$

que no es igual a $v'(t)$.

Esta forma de trabajar, ***conjeturando*** y ***comprobando****, puede llevarte a proponer diferentes funciones* $x(t)$ *donde compruebes si la ecuación diferencial* $v'(t) = -\frac{k}{m}x(t)$ *se cumple o no.*

Vale la pena que realices este tipo de proceso de pensamiento, muy propio del "hacer Matemáticas".

Probablemente después de intentarlo lo suficiente, llegarás hasta observar que si bien la primera conjetura que hicimos no fue la correcta, sin embargo ella misma nos sugiere identificar a la función

$$x(t) = \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

como la nueva propuesta que será la acertada.

Comprobemos que realmente lo es:

si $x(t) = \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$ *entonces*

$$x'(t) = \left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t = v(t)$$

Tenemos entonces declarada la función $v(t)$ *además de* $x(t)$:

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

y calculamos ahora su derivada:

$$v'(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(-\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= -\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{k}{m}}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

¡TOMA NOTA!

Multiplicar sen x por 2
puede escribirse
(sen x) (2)
pero es preferible escribir
2 sen x
y no confundir con .
sen 2x

$$= -\frac{k}{m}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

$$= -\frac{k}{m}\,x(t)$$

Hemos comprobado que con la función

$$x(t) = \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

sí se cumplen *las ecuaciones diferenciales del sistema masa resorte, a saber,* $x'(t) = v(t)$ *y* $v'(t) = -\frac{k}{m}x(t)$.

Con esto hemos encontrado la solución general del sistema masa-resorte sin restricciones de fricción y con condiciones iniciales $x(0) = 0$ *y* $v(0) = 1$.

Caso 2. Movimiento Armónico Simple (MAS)

El **movimiento circular uniforme** es el movimiento periódico que describe una partícula moviéndose con rapidez constante a lo largo de una circunferencia.

La proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro de la circunferencia es un movimiento (rectilíneo) que también es periódico y se conoce como **movimiento armónico simple (MAS)**.

La importancia de este movimiento es clara por el gran número de magnitudes en contextos reales que experimentan un cambio igual al que experimenta la posición de la partícula en el movimiento armónico simple, donde se produce un "ir y venir" de valores numéricos acotados entre un mínimo y un máximo valor.

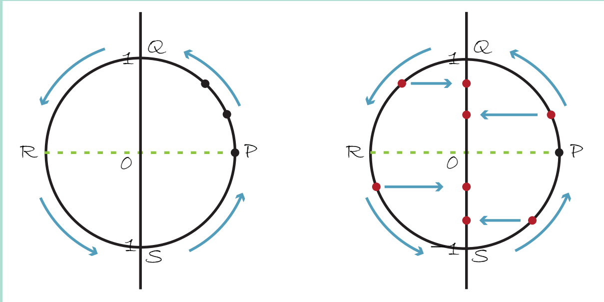
Para generar lo que podemos llamar el movimiento armónico simple "básico" consideremos un punto que se está moviendo con rapidez constante de 1 radián/segundo a lo largo del círculo de radio 1 como lo muestra la figura.

El punto lo comenzamos a observar a partir de la posición P sobre el círculo y se mueve en la dirección contraria a la de las manecillas del reloj, llegando al punto P nuevamente en 2π segundos.

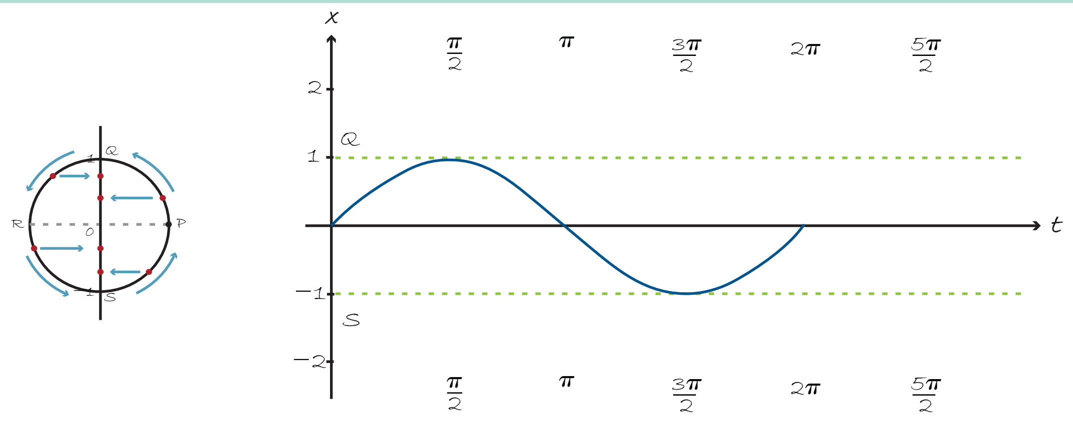
A medida que el punto se mueve sobre el círculo, pensemos en la **proyección** de este punto sobre el **diámetro vertical** QS e imaginemos una partícula sobre la recta vertical que contiene al diámetro. Esta partícula se está moviendo de acuerdo a un **movimiento armónico simple básico**.

¿Sabías que?...

El término **analógico** se refiere a magnitudes que varían en forma continua…en cambio, el término **digital** alude a lo discreto…
El tiempo es una magnitud continua, y tenemos de él una representación analógica en el reloj con manecillas que giran continuamente midiendo el paso del tiempo. Pero también usamos una representación del tiempo discreta, en lo relojes con pantalla digital.
No se trata de una competencia analógico/digital por la exactitud pues, al final de cuentas, la captura de información de la realidad siempre estará sujeta a limitaciones que llegan incluso a los límites de nuestra percepción por medio de los sentidos.
Se trata más bien de un desarrollo tecnológico que permite aprovechar la capacidad de almacenamiento de información y de realización de tareas con gran rapidez y mayor precisión.
De este desarrollo disfrutamos diariamente, basta voltear a nuestro alrededor y observar, por ejemplo, laptops, teléfonos, reproductores de música y demás objetos con los que hemos ganado nitidez en la percepción de nuestros sentidos de la vista, el oído e incluso… el tacto.



La gráfica que expresa la posición de la partícula sobre el diámetro vertical es la que hemos conocido como la función trigonométrica $y = \operatorname{sen} t$, puesto que se trata del movimiento que describe la ordenada $y(t)$ del punto sobre el círculo; punto que proyectamos al diámetro vertical para imaginar la partícula.



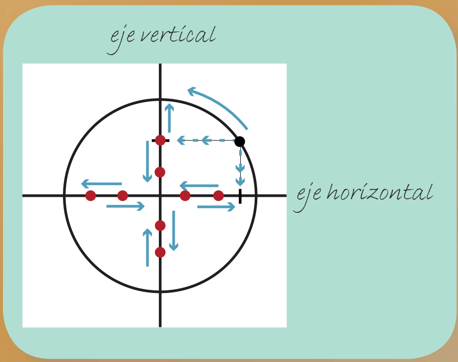
a) Describe el movimiento en línea recta que experimenta la partícula sobre el diámetro considera unidades de metros y segundos.

La descripción del movimiento de esta partícula "MAS básica", versa así:

"Comenzamos a ver la partícula en $(t = 0)$ *en la posición* 0 *y se dirigía hacia arriba cada vez más lento hasta que se detiene a los* $t = \frac{\pi}{2}$ *segundos en la posición* $y = 1$ *metro.*

Continúa su movimiento hacia abajo de una manera cada vez más rápida de modo que al pasar de nuevo por la posición 0 *iba lo más rápido posible hacia abajo. En ese instante, se tiene que* $t = \pi$ *y la partícula continúa moviéndose hacia abajo pero de modo cada vez más lento hasta que se detiene nuevamente cuando* $t = \frac{3\pi}{2}$ *segundos en la posición* $y = -1$ *metro. En ese instante vuelve hacia arriba cada vez más rápido y a los* $t = 2\pi$ *segundos pasa nuevamente por la posición* $y = 0$ *y es cuando iba lo más rápido posible hacia arriba... con la misma velocidad que llevaba justo cuando comenzamos a observarla.*

De ahí en adelante, el movimiento se repite íntegramente tal como sucedió en el inicio de esta descripción."

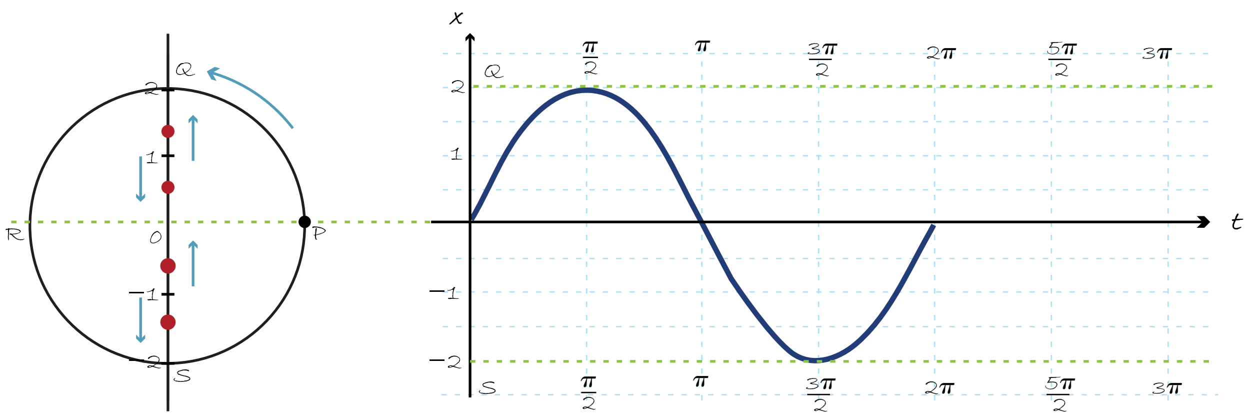


En general, un **movimiento armónico simple**, se determina con la **proyección** del movimiento circular uniforme sobre uno de sus diámetros. En ese sentido, debe quedar caracterizado por cuatro condiciones: el **radio** del círculo sobre el cual se da el movimiento circular uniforme asociado, la **rapidez constante** con la cual se mueve el punto sobre el círculo, el **sistema de coordenadas** de la recta sobre la cual se realiza el movimiento armónico, y la **posición inicial** del punto sobre el círculo.

b) Analiza cada una de estas características de la partícula MAS para relacionarlas con la función de posición y su gráfica correspondiente, la cual se verá afectada por los parámetros A, B, C y D tratados en los efectos gráficos de este tema.

La primera característica considera el ***radio*** *del círculo sobre el cual se da el movimiento circular uniforme asociado al movimiento armónico simple. Se le llama la* ***amplitud*** *del movimiento armónico simple y usaremos la letra* A *para denotarlo. El doble de la amplitud* $2A$ *es justamente la distancia entre las posiciones mínima y máxima que se alcanzan en el movimiento.*

La amplitud en el "MAS básico" es $A = 1$ *y si variamos el radio, digamos para que la amplitud sea* 2, *pero manteniendo el tiempo que tarda en volver al origen igual a* 2π, *tendremos una gráfica como la siguiente.*



Podemos identificar esta gráfica como $y(t) = A\,\text{sen}\,t$, *donde el parámetro* A *se relaciona con el radio del círculo del movimiento circular que generó al movimiento armónico simple.*

*Analicemos ahora la segunda característica de este tipo de movimiento, que trata sobre la **rapidez constante** con que se mueve el punto en el círculo, la que determina cuál va a ser el tiempo mínimo T en que el movimiento se repite íntegramente. A dicho tiempo T se le llama el **período** del movimiento armónico simple.*

Llamemos v a la rapidez con la cual se mueve el punto sobre el círculo y r al radio del mismo. Entonces, como T señala el tiempo en que el punto ha dado una vuelta completa sobre el círculo, el producto vT calcula la distancia recorrida por el punto en su "vuelta completa" por el círculo. Por otra parte, esa "vuelta completa" es igual al perímetro del círculo, de modo que:

$$vT = 2\pi r \qquad \text{y así} \qquad T = \frac{2\pi r}{v}$$

Podemos reescribir esa última igualdad de un modo que parece ser más complicado, mas sin embargo, resulta conveniente:

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{v}{r}\right)}$$

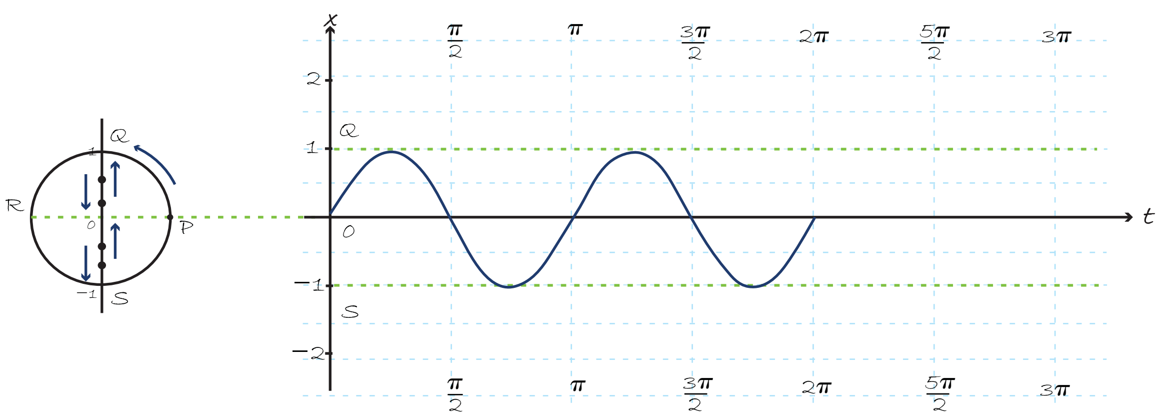
Escrito de ese modo, si llamamos al denominador $B = \frac{v}{r}$

*el **período** quedará expresado como* $T = \frac{2\pi}{B}$

Así tenemos relacionados periodo T y parámetro B para determinar uno en base al otro mediante esta relación inversamente proporcional que mantienen.

Reconozcamos la utilidad de esta última expresión en el análisis de la situación en que el punto se mueve sobre el círculo de radio 1 con rapidez constante y tarda $\frac{\pi}{2}$ segundos en llegar de P a R.

Observamos que el movimiento se repite íntegramente cada π segundos, tiempo en que el punto da toda una vuelta al círculo. Si consideramos dos vueltas al círculo se obtiene la gráfica que se muestra enseguida.



Podemos identificar que la gráfica que modela este MAS es $y = \text{sen}\, 2t$ *donde el parámetro* $B = 2$ *provocó la reducción del período original* 2π *en*

$$T = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Análogamente, si consideramos $y = \text{sen}\,\frac{1}{2}t$ *sabemos que el período se amplía a* 4π, *lo que ahora podemos calcular como*

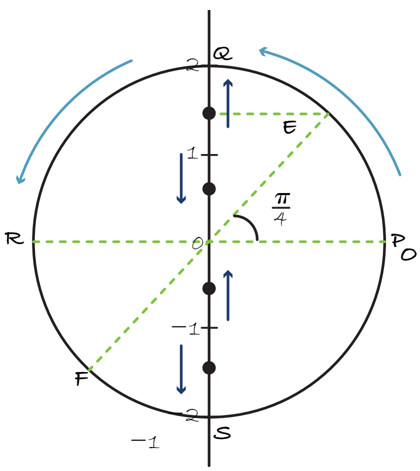
$$T = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Hasta este momento hemos analizado la función $y = A\,\text{sen}\,Bt$ *que modela la posición de una partícula en movimiento MAS con amplitud* A *correspondiente al radio del círculo y periodo* $T = \frac{2\pi}{B}$ *correspondiendo con la rapidez que lleva el punto en el círculo.* $B = \frac{\text{rapidez}}{\text{radio}}$.

Veamos ahora cómo se modifica el modelo senoidal cuando consideramos que la posición inicial del punto en el círculo ya no sea el punto P *en el eje horizontal.*

Veamos lo que sucede en la función por el hecho de que el movimiento lo empecemos a describir cuando el punto que está girando sobre el círculo con rapidez constante se encuentra en algún lugar intermedio del círculo.

Consideremos la situación en que el círculo tiene radio 2 *y comenzamos a observar el movimiento de la partícula en el diámetro a partir del punto* E *que se muestra en la figura. El punto en el círculo se mueve en la dirección contraria a las manecillas del reloj y tarda* $\frac{\pi}{2}$ *segundos en llegar de* E *a* F. *¿Cuál es la función de posición de la proyección de este punto sobre el diámetro vertical* QS*?*



Si hubiésemos empezado a observar este movimiento en el instante cuando el punto sobre el círculo estuvo justo en la posición P, *su función hubiera sido*

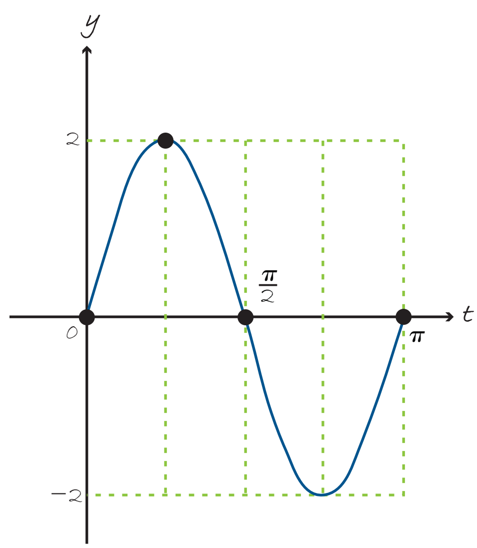
$$y = \text{sen}\,Bt$$

donde $A = 2$ por ser la **amplitud** del movimiento, y $T = \pi$ es el **período** del movimiento, luego $B = \frac{2\pi}{T} = 2$.

El modelo sería en este caso

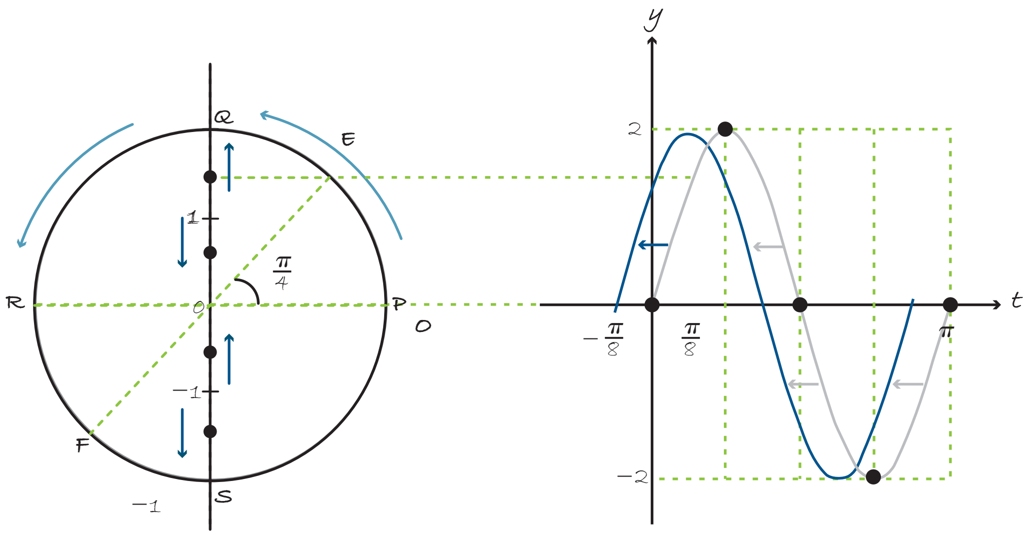
$$y(t) = 2\,\text{sen}\,2t$$

Del cual podemos tener una imagen clara señalando el período y la amplitud.



Pero como el movimiento del punto en el círculo, y por tanto, de la partícula en el diámetro, lo observamos a partir del punto que E *se localiza a* $\frac{\pi}{4}$ *segundos después de* $t = 0$ *podemos ver que la curva que hemos trazado se comenzará a considerar a partir de cierta altura... ¿cuál?... justo a la mitad entre* $t = 0$ *y* $t = \frac{\pi}{4}$, *por tanto, en* $t = \frac{\pi}{8}$.

Ahí es donde debemos "iniciar" la gráfica.



Recordando los efectos gráficos, vemos que se trata de una **traslación hacia la izquierda** *de* $\frac{\pi}{8}$ *unidades, de modo que la función es*

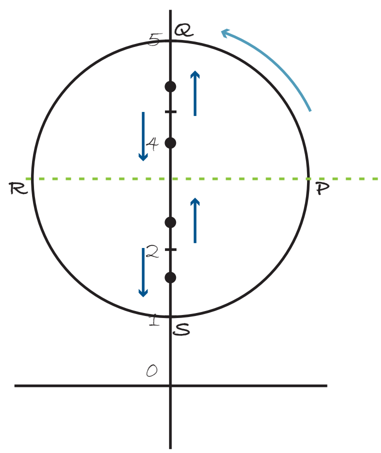
$$y = 2 \operatorname{sen} 2\left(t + \frac{\pi}{8}\right).$$

Hemos relacionado el parámetro C *en la expresión*

$$y(t) = A \operatorname{sen} B(t + C)$$

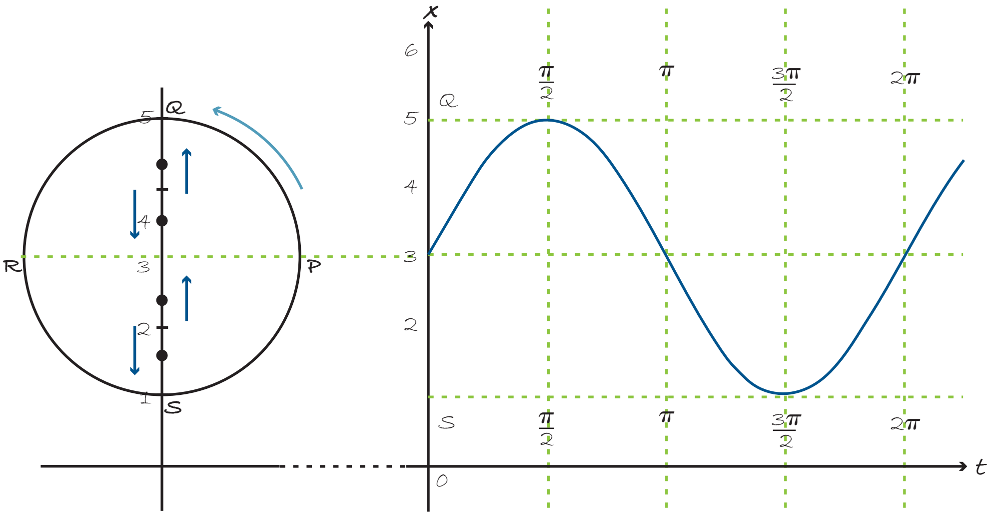
con la posición inicial del movimiento en consideración.

Procedemos por último a considerar el cambio en el **sistema de coordenadas** *de la recta donde se da el movimiento.*



Apoyamos nuestro razonamiento en la situación en que el punto se estará moviendo con rapidez constante a lo largo del círculo de radio 2, *y tarda* π *segundos en llegar de* P *a* R, *la diferencia ahora es que el centro del círculo se ha recorrido al punto* $(0, 3)$ *¿cuál sería una función de posición de este movimiento?*

Con esta información realizamos la gráfica de la función de posición de *la proyección en la siguiente figura con los datos de amplitud* $A=2$ *y periodo* $T=2\pi$, *luego* $B=1$.



Al observar esta gráfica podemos identificar el efecto de una traslación vertical hacia arriba de 3 *unidades, lo que nos lleva a expresar la función*

$$y(t) = 2\,\mathrm{sen}\, t + 3$$

como el modelo senoidal para el movimiento MAS en cuestión.

El efecto del último parámetro D *lo hemos relacionado con la* ***traslación vertical*** *del gráfico que se construye previamente con la parte de la función dada por*

$$A\,\mathrm{sen}\,B\left(t + C\right),$$

y esto en respuesta a la ubicación del origen del sistema de coordenadas cuando el movimiento armónico simple se realiza en el diámetro de un círculo cuyo centro no se encuentra al mismo nivel del eje horizontal del tiempo.

En **resumen** podemos establecer que la función de posición de cualquier **movimiento armónico simple** tiene la forma del modelo senoidal

$$y(t) = A\,\mathrm{sen}\,B(t+C)+D$$

donde:

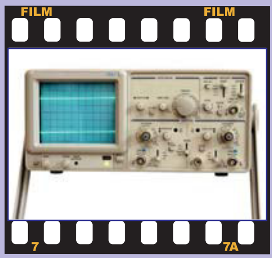
- ♦ A indica la amplitud o radio del círculo.
- ♦ $B = \frac{2\pi}{T}$ siendo T el período del movimiento, cuando se completa un ciclo del gráfico
- ♦ C indica el desfasamiento o traslación horizontal respecto de la gráfica de

$$y(t) = A\,\mathrm{sen}\,Bt + D$$

- ♦ D indica la ordenada del centro del círculo o traslación vertical respecto de la grafica de

$$y(t) = A\,\mathrm{sen}\,B(t+C)$$

¿Sabías que?...



Hay dos maneras de modular una onda portadora de señales eléctricas: modulación de **amplitud** y modulación de **frecuencias.**
Como sus nombres lo indican, la primera incide sobre los niveles (superior e inferior) en que la onda se encuentra contenida, mientras que la segunda, incide sobre el número de ciclos por unidad de tiempo, o con el período que la onda posee.
Las señales de Amplitud Modulada (AM) están más expuestas a interferencias eléctricas, las que producen ese ruido que reconocemos como estática cuando vamos escuchando el noticiero en el coche y pasamos debajo de un tendido eléctrico de alta potencia.
Fue precisamente la búsqueda de mayor fidelidad de transmisión lo que motivó a modular la frecuencia en vez de la amplitud.
Pero si la Frecuencia Modulada (FM) supera en calidad a la Amplitud Modulada, en cuanto a la cobertura sucede al contrario pues el alcance de la señal en FM es menor que en AM.
Los radios que transmiten en FM trabajan longitudes pequeñas desplazándose por el espacio en línea recta, y como no tienen donde "rebotar" se atenúan rápido y recorren distancias no muy grandes, En cambio en AM las longitudes de onda son largas y las frecuencias bajas, y por su gran amplitud pueden "saltar" los edificios e incluso hasta "rebotar" en la ionosfera y continuar su desplazamiento.
Por otra parte, en cuestión de costos, es más económico el equipo e instalación para FM que para AM, pero con eso aparece otra variable en escena, pues esto provoca la saturación del espectro de FM y se tienen que buscar opciones de AM. Eso además de agregar las condiciones que el país o ciudad tengan establecidas para los diferentes tipos de emisoras.
Como en todo evento en la vida…las variables por considerar para tomar alguna decisión, a veces pueden llevarnos a cambiar completamente nuestra expectativa inicial.

¿Sabías que?...

El **sonido** es todo aquello que percibe nuestro oído… pero lo que ocurre físicamente es que existe una fuente de vibración mecánica que provoca variaciones en la presión del aire (o de un medio elástico), y esa perturbación se propaga hasta llegar y producir una vibración similar en nuestro tímpano.

Un sonido audible es el que percibimos porque se encuentra en un rango entre 20 vibraciones por segundo hasta 20,000 vibraciones por segundo.

Es entendible que ante este tipo de fenómeno natural, el modelo senoidal ofrezca un modo científico de estudiarle… aunque una onda senoidal pura represente un sonido artificial.

Se dice **tono puro** al tono con una forma de onda senoidal. Un diapasón que vibra 440 veces por segundo crea un tono que tiene una frecuencia de 440 Hertz, lo que significa simplemente "ciclos por segundo".

La nota musical A 440 se ha estandarizado como la frecuencia correspondiente a un tono de afinación estándar; el tono LA en la escala musical…y su representación matemática suena así:

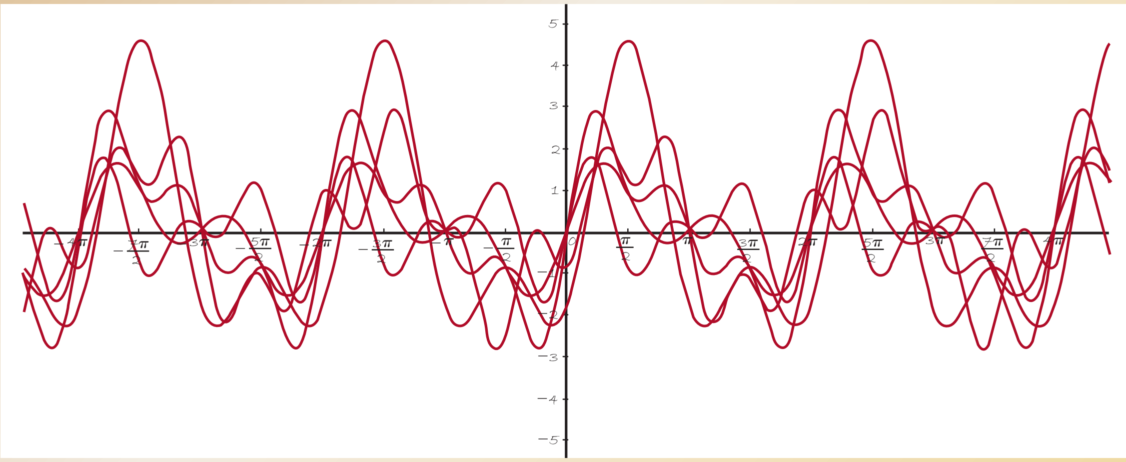
$$y = sen(2\pi * 440x)$$

Caso 3. Ondas de sonido y Superposición en Acústica

La Música se hace con sonido, y el sonido con la repetición de ondas de sonido. La Matemática representa estas ondas con el modelo senoidal de tal modo que el tono musical se hace corresponder con una cierta frecuencia... que es el recíproco del período. La relación entre Música y Matemáticas está presente desde la relación entre las notas musicales y la frecuencia que caracteriza matemáticamente a esas notas. Duplicar la frecuencia produce una nota una octava más alta, e inversamente, dividir entre 2 la frecuencia crea una nota una octava más baja.

Una misma nota tocada con una flauta y con un violín suena diferente, esta diferencia se distingue musicalmente por la armonía, que matemáticamente, trata de ondas senoidales con frecuencias proporcionales y con amplitudes inversamente proporcionales. Al tocar con la flauta la nota $A440$ hz no sólo se produce ese tono sino además tonos que son armónicos, es decir, no sólo se escucha el tono de 440 hz, sino también el tono 880 hz con la mitad del volumen, y el tono 1320 hz a un tercio del volumen… y así hasta el límite de audición.

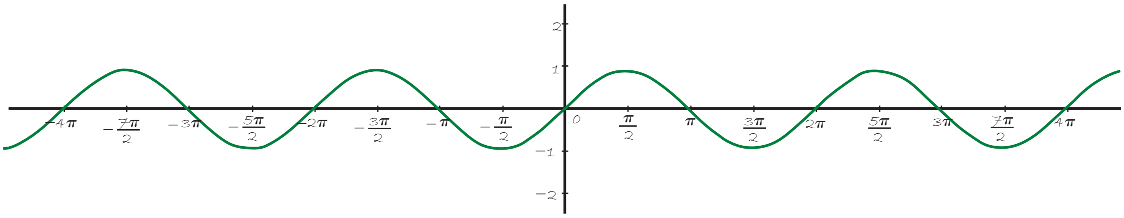
La superposición de ondas trata de la suma algebraica de ondas senoidales para componer un movimiento musical complejo. Resulta importante la descomposición de todo movimiento complejo en una superposición de distintas proporciones de movimientos armónicos. Cuando alguien canta desafinado, es que está creando armonías para notas que no existen…pero matemáticamente no tendremos este problema al presentarte la siguiente combinación de curvas que resultan de la superposición de ondas senoidales y que sin duda han de representar un movimiento "complejo":



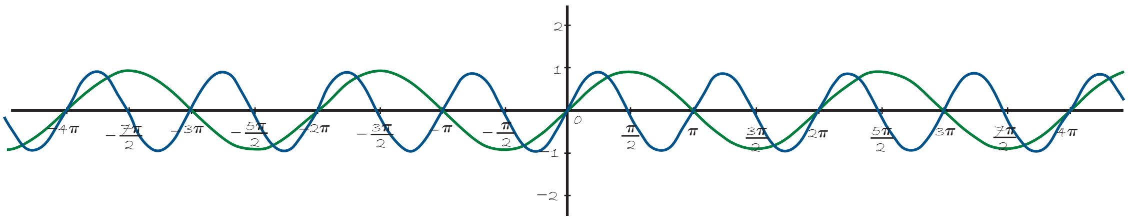
Utiliza un software de graficación para que logres descifrar la descomposición de los elementos en la imagen anterior al realizar sucesivamente las superposiciones que te señalamos en cada uno de los siguientes incisos.

a) Grafica las dos funciones dadas y obtén su superposición. Calcula el período de esta última.

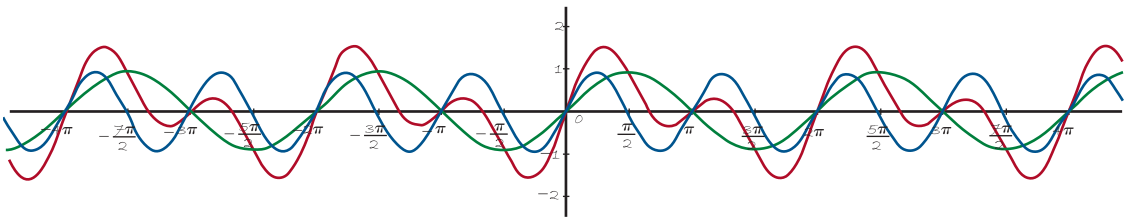
$y = \operatorname{sen} t$



$y = \operatorname{sen} t,\;\; y = \operatorname{sen} 2t$



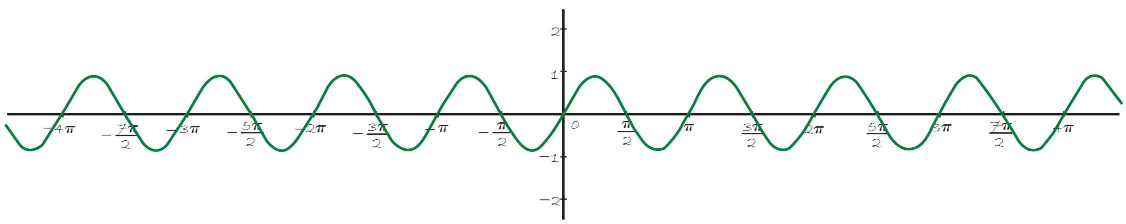
$y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t$



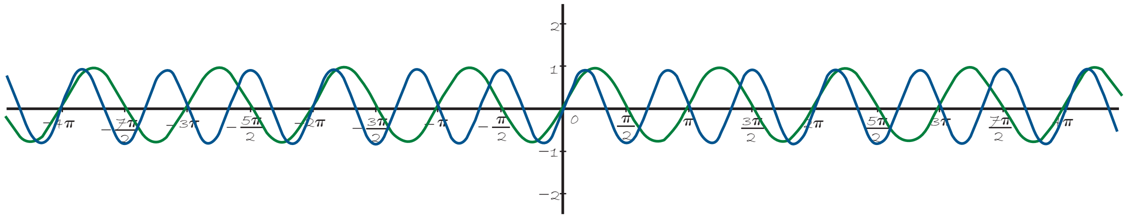
Período 2π.

b) Grafica las dos funciones dadas y obtén su superposición. Calcula el período de esta última.

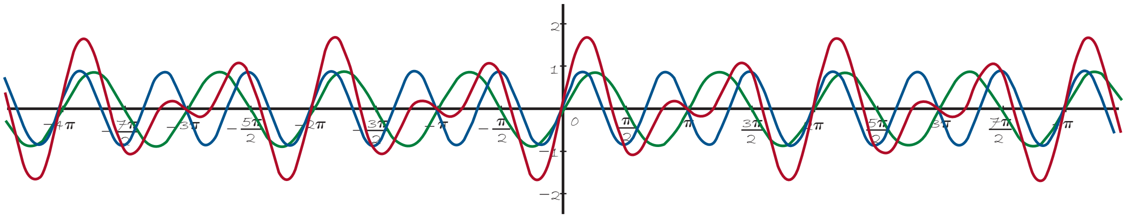
$y = \operatorname{sen} 2t$



$y = \text{sen}\, 2t\,,\ \ y = \text{sen}\, 3t$



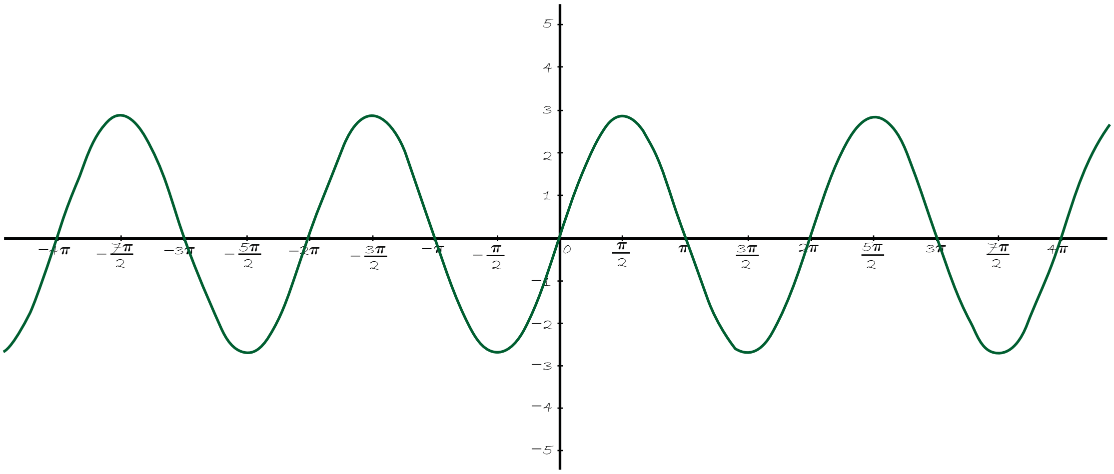
$y = \text{sen}\, 2t + \text{sen}\, 3t$



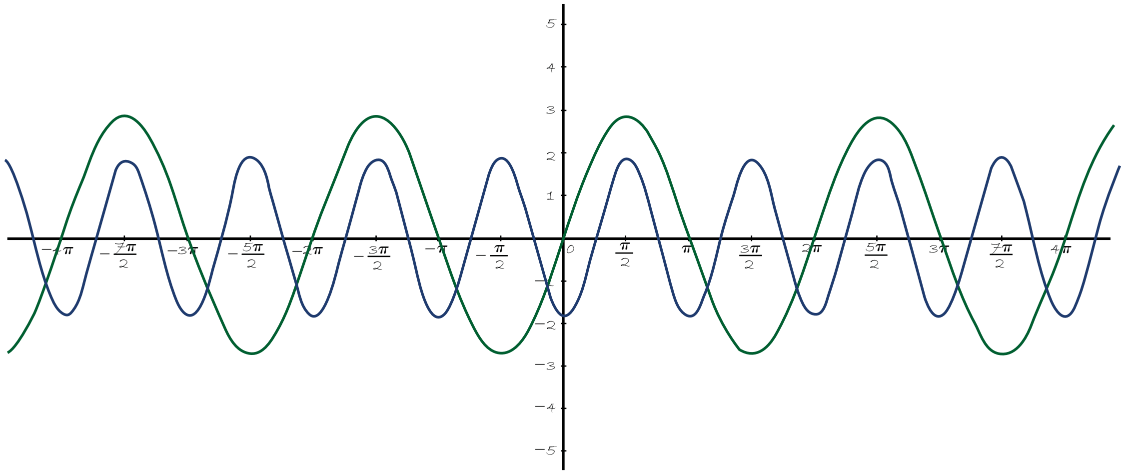
Período 2π .

c) Grafica las dos funciones dadas y obtén su superposición. Calcula el período de esta última.

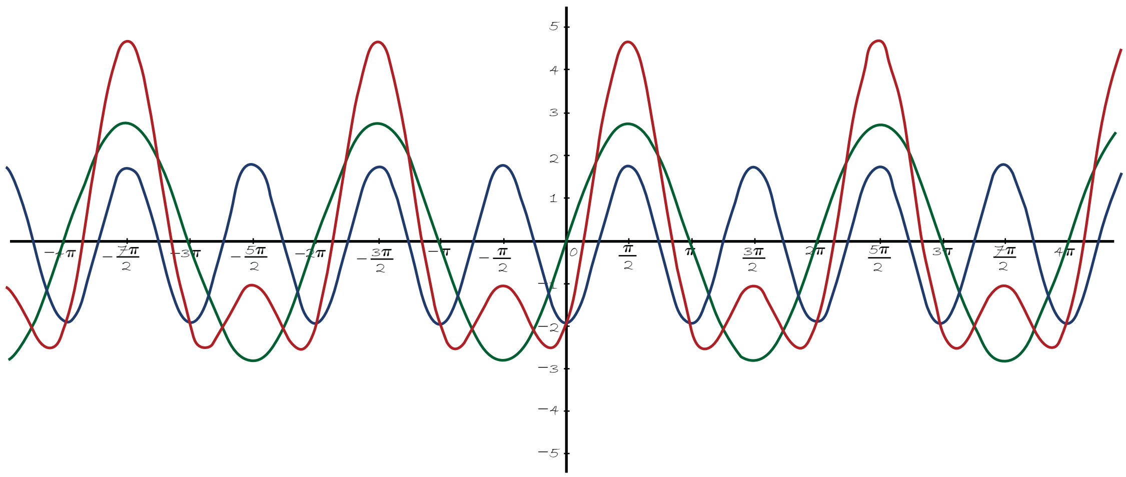
$y = 3\ \text{sen}\, t$



$$y = 3\,\text{sen}\,t,\quad y = 2\,\text{sen}\,2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$



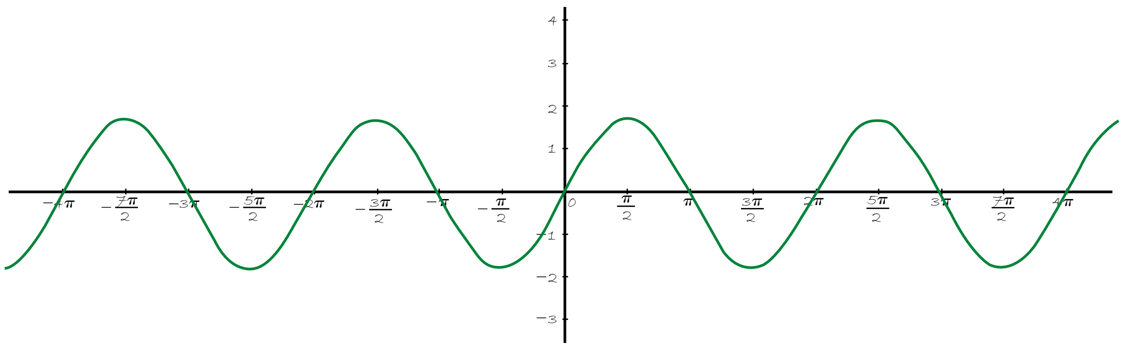
$$y = 3\,\text{sen}\,t + 2\,\text{sen}\,2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$



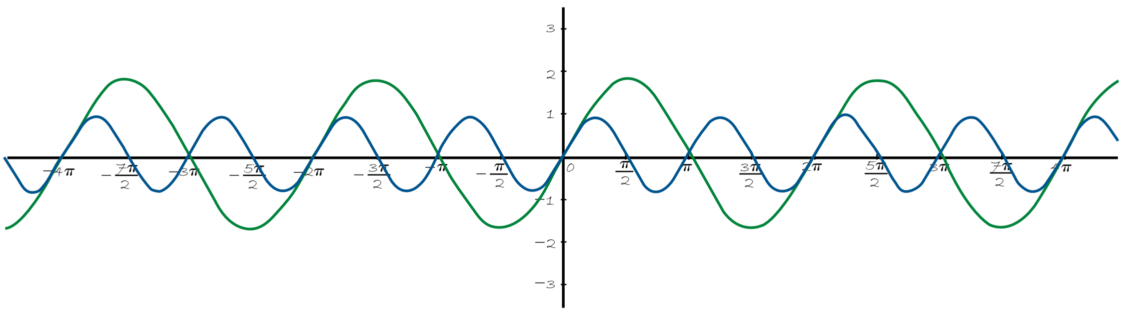
Período 2π.

d) Grafica las tres funciones dadas y obtén su superposición. Calcula el periodo de esta última.

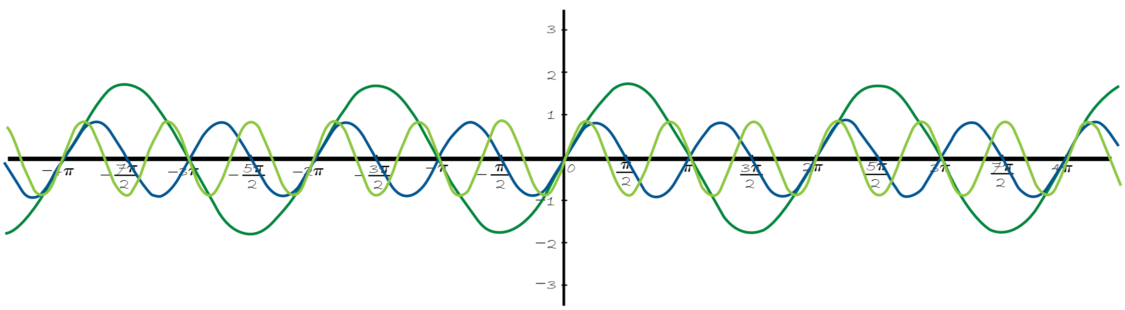
$y = 2 \operatorname{sen} t$



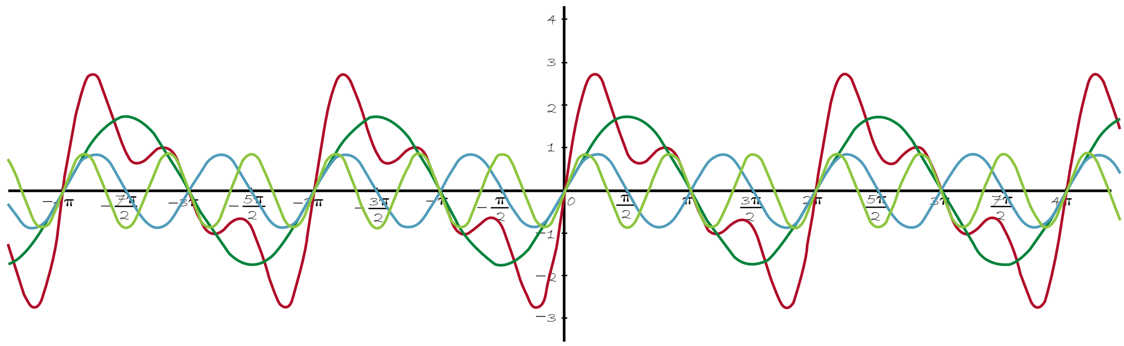
$y = 2 \operatorname{sen} t,\ y = \operatorname{sen} 2t$



$y = 2 \operatorname{sen} t,\ y = \operatorname{sen} 2t\quad y = \operatorname{sen} 3t$



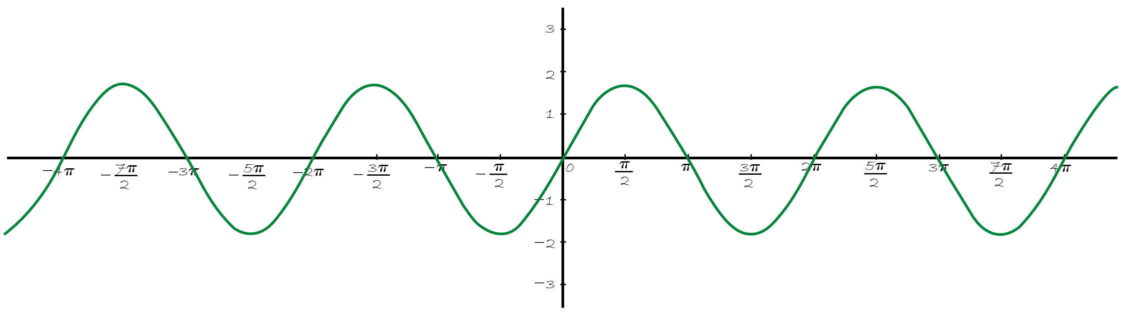
$y = 2\text{sen}\,t + \text{sen}\,2t + \text{sen}\,3t$



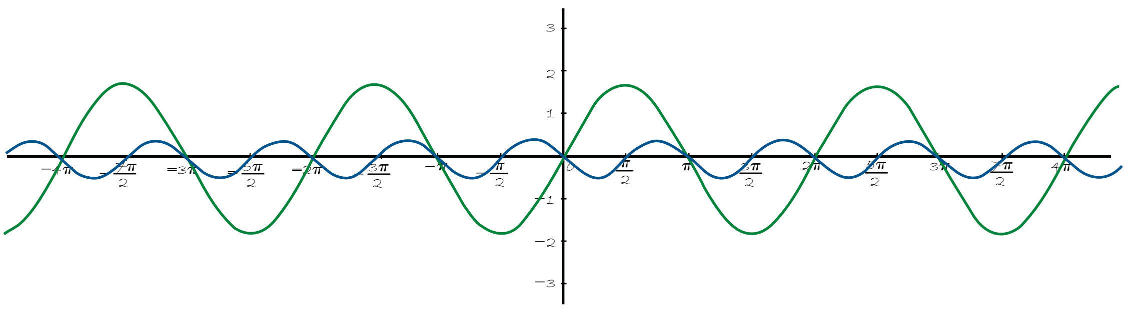
Período 2π

e) Grafica las tres funciones dadas y obtén su superposición. Calcula el periodo de esta última.

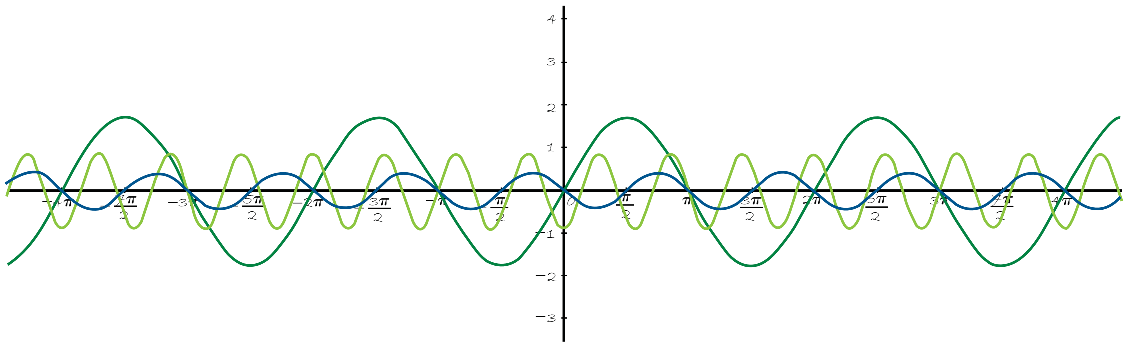
$y = 2\text{sen}\,t$



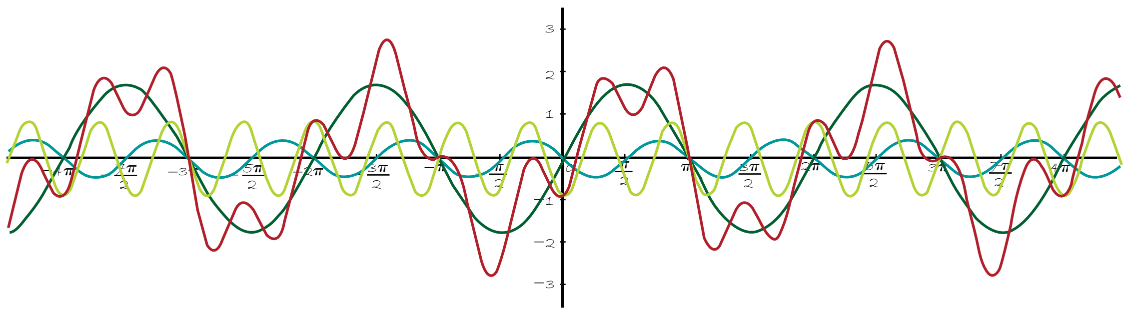
$y = 2\text{sen}\,t, \; y = \dfrac{1}{2}\text{sen}\,2\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$



$$y = 2\,\text{sen}\,t, \quad y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \quad y = \text{sen}\,3.5\left(t - \frac{\pi}{7}\right)$$



$$y = 2\,\text{sen}\,t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\,3.5\left(t - \frac{\pi}{7}\right)$$

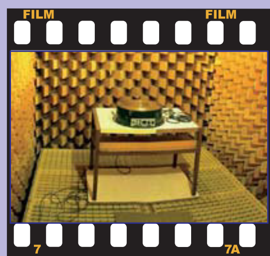


Período 4π

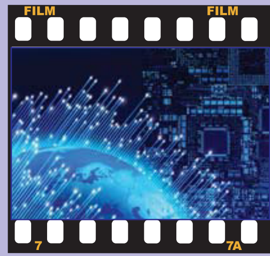
Nota: La imagen original del problema la obtuvimos graficando las curvas finales en cada secuencia en el mismo sistema coordenado… y no es una nota musical.

¿Sabías que?...

Una cámara **anecoica** no es un lugar para ir a escuchar el silencio…
Estas construcciones son salas diseñadas especialmente para absorber el sonido. Siendo el sonido una onda que transmite energía mecánica a través de un medio, al incidir sobre una superficie se produce un efecto de reflexión además de uno de absorción.
La sala anacoica tiene sus paredes recubiertas de cuñas construidas con materiales que absorben el sonido, como la fibra de vidrio, por ejemplo, y con formas de pirámide cuyo vértice apunta hacia el interior.
Al entrar uno a esta sala, la sensación de ausencia de sonidos es intrigante, y hay quienes señalan la presencia de un zumbido agudo típico… hoy se ha relacionado con el evento llamado tinnitus …¿existirá el silencio?



¿Sabías que?...



Un **osciloscopio** es un aparato para la visualización de señales eléctricas en el tiempo que resulta tan útil a un técnico que repara un automóvil como a un médico que diagnostica problemas cardiacos.
Su versatilidad es consecuencia de la creación de transductores adecuados que convierten una magnitud física en una señal eléctrica.
Como todo equipo electrónico puede trabajar con variables continuas (analógicos) o con discretas (digitales).
Un osciloscopio analógico trabaja directamente con la señal aplicada la cual, al amplificarse, desvía un haz de electrones con dirección e intensidad controladas que al incidir sobre la pantalla produce la imagen.
El osciloscopio digital, en cambio, utiliza antes un conversor analógico-digital para almacenar digitalmente la señal de entrada y después reconstruye esa información en la pantalla.
La preferencia en el uso de uno o el otro depende de los fines, pues mientras que los osciloscopios analógicos permiten visualizar variaciones rápidas de la señal de entrada en tiempo real, los osciloscopios digitales son preferibles cuando se estudian eventos no repetitivos o aleatorios.

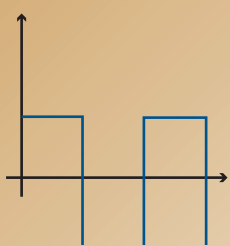
Caso 4. Corriente Alterna y Electrónica Digital

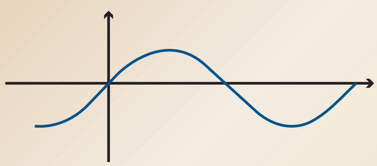
La corriente alterna que se conoce como **onda cuadrada** en Electrónica Digital, se utiliza para la generación de pulsos eléctricos que se usan como señales (1 y 0). Esta onda alterna sus valores entre los dos valores extremos que toma durante un lapso de tiempo, pero sin pasar por los valores intermedios, pues cambia instantáneamente de polaridad, es decir, cambia abruptamente de su valor máximo a su valor mínimo.

En el lenguaje matemático se trata de una función con discontinuidades esenciales. Esta es una característica que le diferencia con respecto a la onda senoidal, la cual toma todos los valores intermedios entre el máximo y el mínimo, que determinan su amplitud, es decir, es continua.

En el desarrollo de la Matemática han sido variados contextos reales los que han llevado a considerar a las ondas senoidales; como en el estudio de la música, de la luz, del sonido, del flujo de calor y temperatura y en el electromagnetismo.

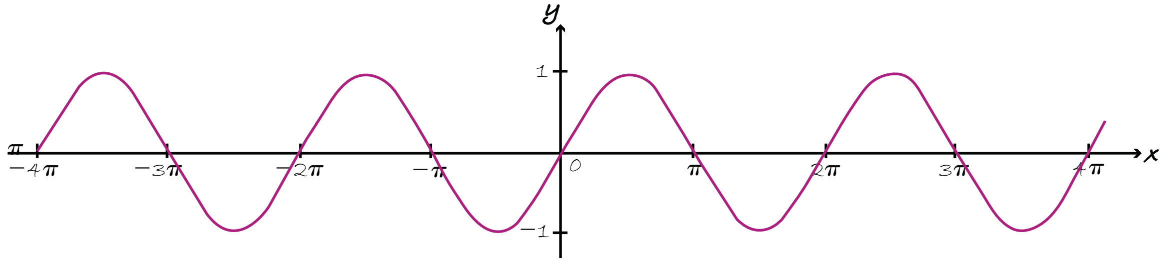
La expansión en serie de Fourier para una función es un resultado de la teoría formal que viene a evidenciar la importancia de las ondas senoidales en el estudio de los fenómenos nombrados, y matemáticamente plantea el resultado intrigante de que una **serie infinita** de funciones continuas puede desarrollar la discontinuidad.



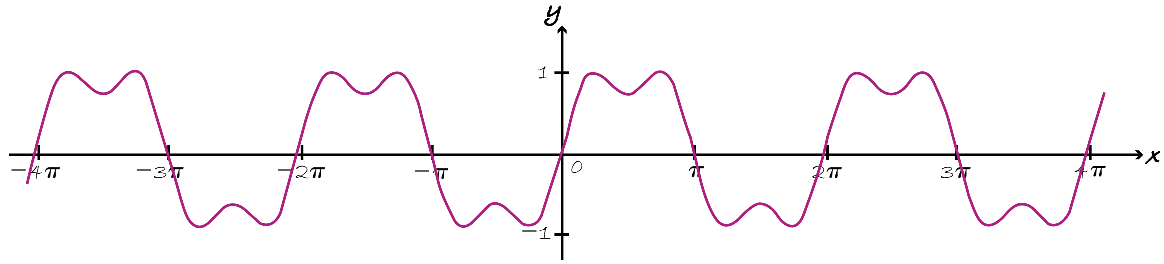


Con ayuda de un software de graficación, obtén las gráficas de las funciones senoidales que te son propuestas para finalmente visualizar su tendencia.

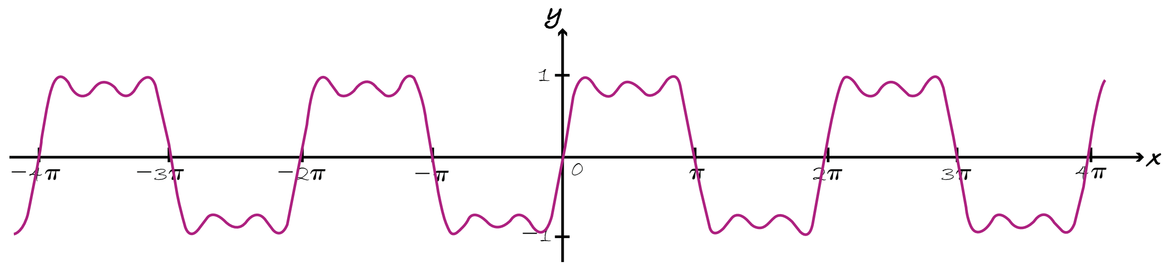
a) $y = \operatorname{sen} x$



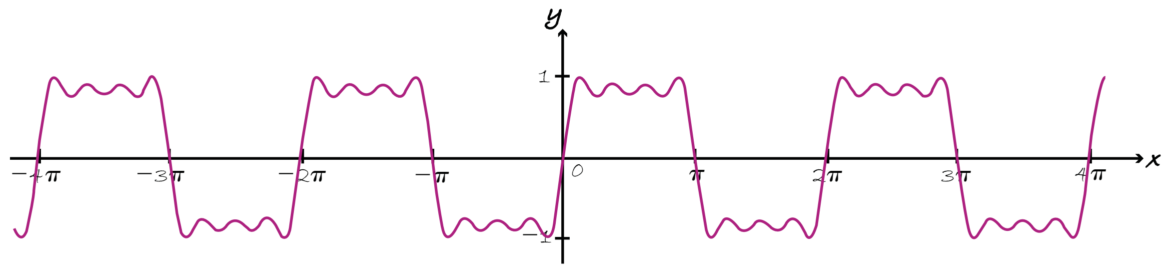
b) $y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$



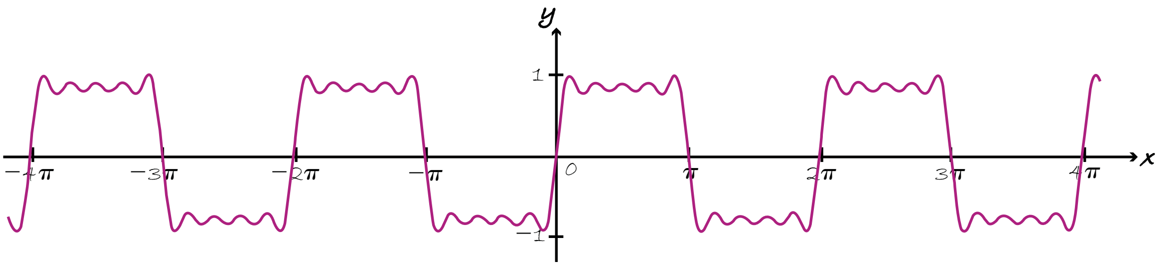
c) $y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x$



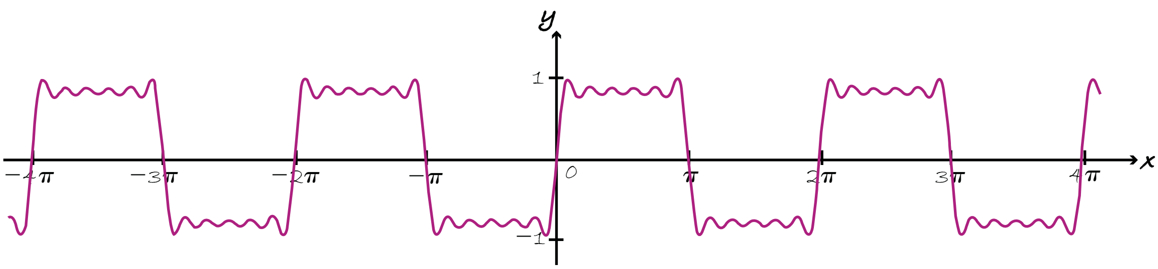
d) $y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x$



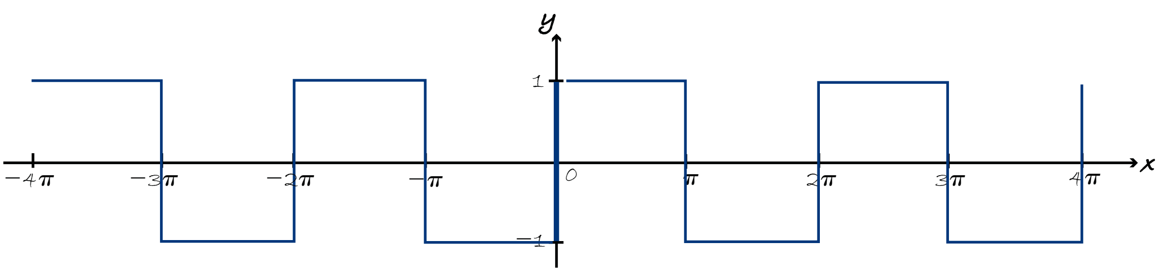
e) $y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x + \frac{1}{9}\operatorname{sen} 9x$



f) $y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x + \frac{1}{9}\operatorname{sen} 9x + \frac{1}{11}\operatorname{sen} 11x$



g) El proceso anterior permite visualizar la tendencia de las funciones senoidales construidas sucesivamente con una función constante por intervalos, que matemáticamente representa a una onda cuadrada. Dibuja esta última enseguida:



Práctica de percepción visual y conversión.

En esta práctica se desarrolla la habilidad para transitar de la representación algebraica del modelo senoidal

$$y = A \operatorname{sen} B(x + C) + D$$

a su representación gráfica... y viceversa.

Con lo visto en este tema, hemos desarrollado una estrategia para producir una imagen del comportamiento del **primer ciclo** de una gráfica senoidal, el que corresponde con su período $T = \frac{2\pi}{B}$.

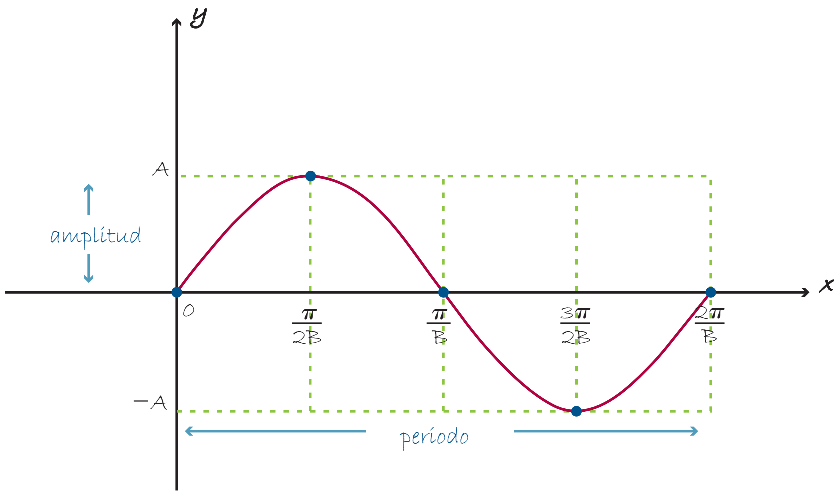
Consideraremos las variables en el contexto formal x e y, y nuestro propósito es construir la imagen que nos muestra a la función

$$y = f(x) = A\,\mathrm{sen}\,Bx$$

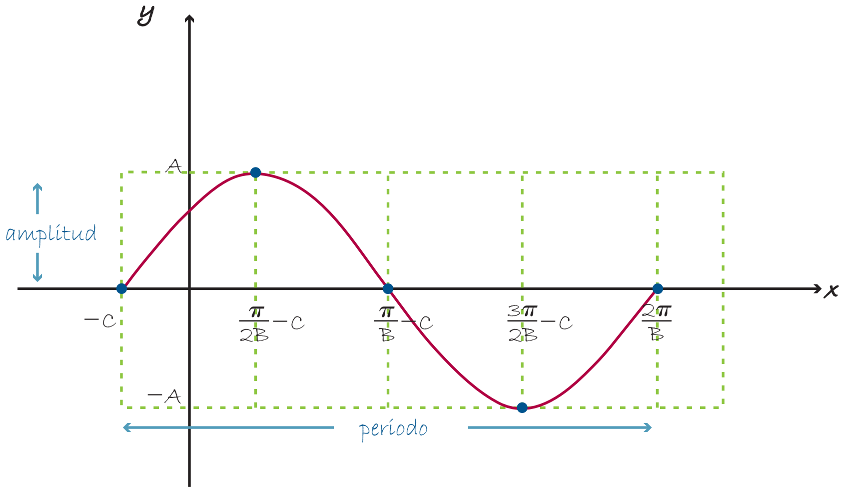
en su primer ciclo.

Para realizar la gráfica, fijamos primero el período de 0 a $T = \frac{2\pi}{B}$; lo partimos por la mitad y después en la mitad de cada mitad. De este modo se obtienen los 5 lugares correspondientes a: inicio, máximo, corte, mínimo y corte (final) de la gráfica.

Situamos el máximo y mínimo con la amplitud A, para lo cual marcamos las **cotas** $-A$ y A en el eje vertical, trazando las rectas horizontales punteadas $y = \pm A$.

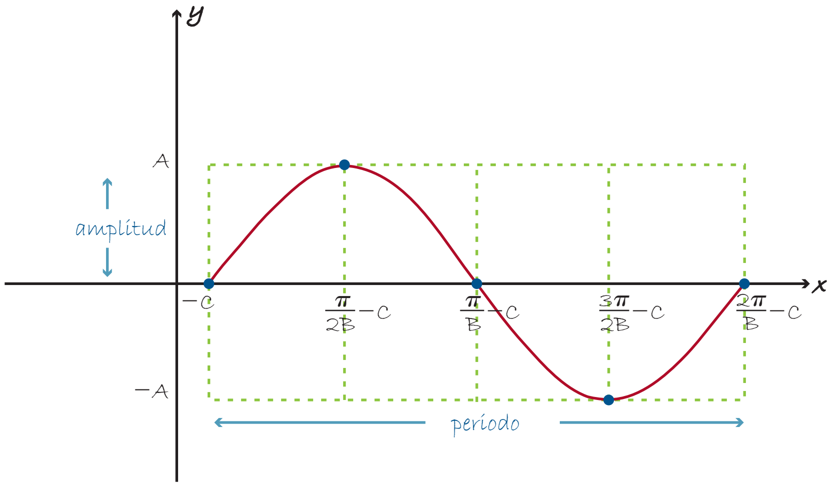


En el modelo senoidal $y = A\,\mathrm{sen}\,B(x + C)$ se incluye la traslación horizontal C, donde $C > 0$ se relaciona con traslación hacia la izquierda y $C < 0$ se relaciona con traslación hacia la derecha. Mostramos en la figura enseguida una imagen que muestra esa información gráfica para C positivo y C negativo respectivamente.



El efecto del último parámetro D para $y = A \operatorname{sen} B\left(x + C\right) + D$ se relaciona con la traslación vertical del gráfico que construimos previamente.

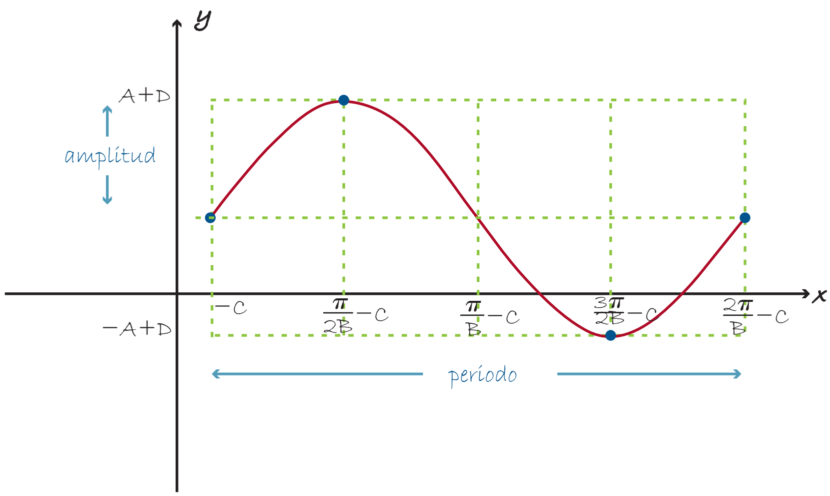
Ilustramos en la siguiente figura un caso particular de los cuatro casos posibles, donde $C < 0$ y $D > 0$.



Con esto podrás haber observado que un ciclo principal del modelo senoidal

$$y = A \operatorname{sen} B(x + C) + D$$

siempre estará manifestando un comportamiento contenido en un rectángulo con "largo" igual al periodo y "ancho" igual al doble de su amplitud y siguiendo la "ruta" de 5 puntos.

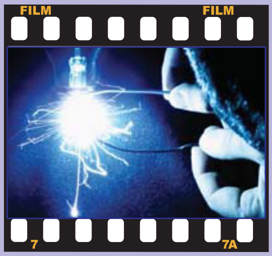


Puedes trazar ese rectángulo con el punto 1 en el origen, de modo que has dibujado

$$y = A \operatorname{sen} Bx$$

e inmediatamente después trasladas el rectángulo según los valores de C y D. Te dejamos pensando en la ubicación del rectángulo para los 3 casos restantes: $c > 0$ y $d > 0$, $c < 0$ y $d < 0$, $c > 0$ y $d < 0$.

¿Sabías que?...



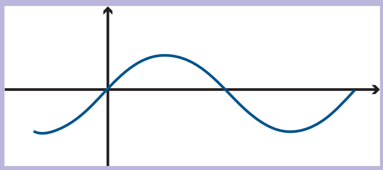
La **corriente eléctrica** es un fenómeno físico que ocurre con el desplazamiento de carga eléctrica.
Cuando se habla de **corriente continua** (CC) se considera que la corriente eléctrica fluye de forma constante en una dirección. Matemáticamente su intensidad se representa con una función constante, una recta horizontal.

La CC es un sistema que resulta ineficiente para la distribución de energía a gran escala por problemas relacionados con la transformación de potencia.

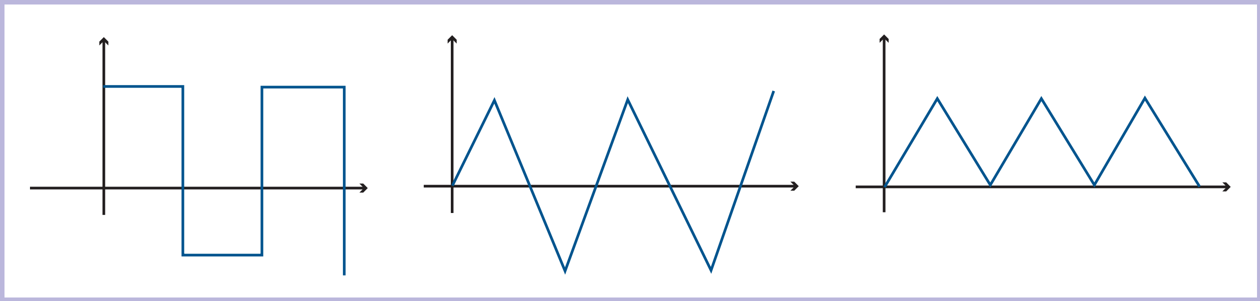
La corriente alterna (CA) vino a superar las limitaciones de la CC y es la forma en la cual la electricidad llega a las casas y las empresas, a través de los enchufes en la pared.

El amplio uso de la CA se debe a su facilidad de transformación; el dispositivo que conocemos como transformador permite elevar la tensión de un modo eficiente, lo que resulta además relativamente económico.

En la CA la magnitud y dirección varían cíclicamente, la forma de onda más comúnmente utilizada para representarla matemáticamente es mediante una función senoidal.



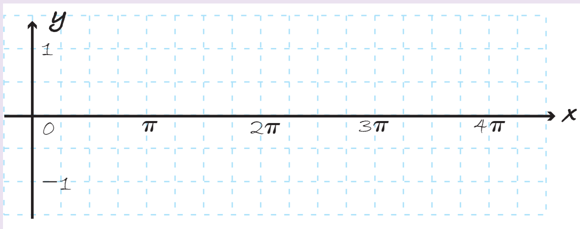
Sin embargo, en ciertas aplicaciones se utilizan otras formas, como la corriente pulsatoria que se acostumbra nombrar como onda cuadrada, o la onda triangular y la onda diente de sierra. Todas ellas muestran eventos periódicos.



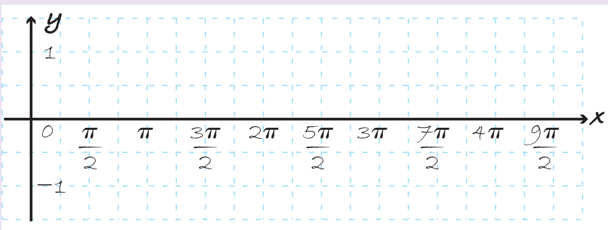
PRÁCTICA DE PERCEPCIÓN VISUAL Y CONVERSIÓN

Aplica la identificación del primer ciclo de la función senoidal para resolver los siguientes 5 ejercicios. Utiliza el rectángulo en que está contenido el modelo (parámetros A y B) y trasládale según lo establecen los parámetros C y D.

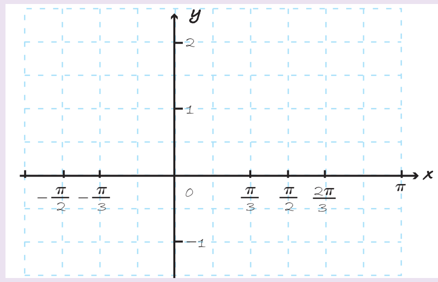
$$y = \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

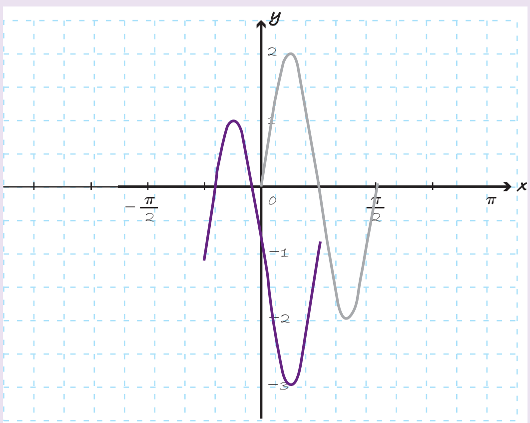


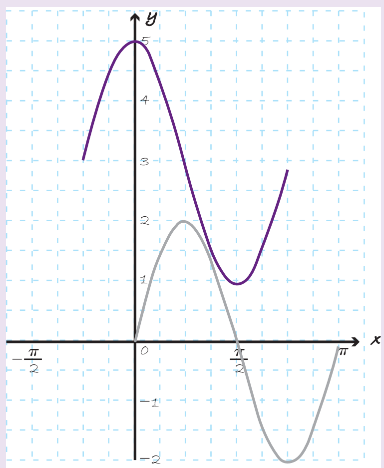
$$y = \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2x}{3} - \pi\right) + \frac{1}{2}$$



$$y = -\mathrm{sen}\,3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$$







ALGORITMIA EN DERIVADAS Y ANTIDERIVADAS.

Calcula la derivada y la antiderivada de cada función. Observa que en ocasiones deberás realizar algunas simplificaciones algebraicas en la función hasta llevarla a la forma que sabemos derivar. Podrás comprobar tus respuestas al final.

1.

Antiderivada	
Función	$f(x) = 2\,\text{sen}(2x+2)+2$
Derivada	

2.

Antiderivada	
Función	$f(x) = \frac{1}{3}\cos\left[\frac{\pi x}{3}\right]$
Derivada	

3.

Antiderivada	
Función	$f(\theta) = \pi - \frac{2}{3}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\pi}{2}\right]$
Derivada	

4.

Antiderivada	
Función	$f(\theta) = 4\cos\left[\frac{\theta-\pi}{4}\right] + \frac{\pi}{4}$
Derivada	

5.

Antiderivada	
Función	$L(\omega) = 2\,\text{sen}\,\frac{\omega}{3} + 3\omega^2$
Derivada	

6.

Antiderivada	
Función	$L(t) = \frac{\cos(3-2t)}{2} + \frac{3-2t}{2}$
Derivada	

7.

Antiderivada	
Función	$x(t) = A\,sen(\omega t + \beta)$
Derivada	

9.

Antiderivada	
Función	$y(x) = \sqrt{\gamma}\,sen\,2\pi(\beta - \alpha x) + \gamma$
Derivada	

8.

Antiderivada	
Función	$x(t) = -\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{\omega t}\right)$
Derivada	

10.

Antiderivada	
Función	$y(x) = \alpha^2 \cos 2\pi\left(\alpha^2 - \beta^2 x\right)$
Derivada	

11.

Antiderivada	
Función	$y(x) = 3\,sen(4x + \pi) - 2\cos(2x + \pi)$
Derivada	

12.

Antiderivada	
Función	$y(t) = \alpha \cos\left(\omega^2 t\right) + \beta\,sen\left(\frac{t}{\omega^2}\right)$
Derivada	

13.

Antiderivada	
Función	$x(t) = \omega t - sen(\pi - \omega t)$
Derivada	

14.

Antiderivada	
Función	$\theta(t) = \gamma \cos(\alpha - t) + \gamma(\alpha - t)$
Derivada	

15.

Antiderivada	
Función	$\omega(\theta) = \theta + sen\left(\frac{\theta}{\pi}\right) + \pi \cos(\pi \theta)$
Derivada	

1.

Antiderivada	$f(x) = -\cos(2x+2) + 2x + c$
Función	$f(x) = 2\,\text{sen}(2x+2) + 2$
Derivada	$f'(x) = 4\cos(2x+2)$

2.

Antiderivada	$f(x) = \frac{1}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) + c$
Función	$f(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$
Derivada	$f'(x) = -\frac{\pi}{9}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$

3.

Antiderivada	$f(\theta) = \pi x - \frac{4}{3}\cos\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + c$
Función	$f(\theta) = \pi - \frac{2}{3}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
Derivada	$f'(\theta) = -\frac{1}{3}\cos\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

4.

Antiderivada	$f(\theta) = 16\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta - \pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\theta + C$
Función	$f(\theta) = 4\cos\left(\frac{\theta - \pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = 4\cos\left(\frac{1}{4}\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}$
Derivada	$f'(\theta) = -4\left(\frac{1}{4}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{4}\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta - \pi}{4}\right)$

5.

Antiderivada	$L(\omega) = -6\cos\frac{\omega}{3} + \omega^3 + C$
Función	$l(\omega) = 2\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{3} + 3\omega^2$
Derivada	$l'(\omega) = \frac{2}{3}\cos\frac{\omega}{3} + 6\omega$

6.

Antiderivada	$L(t) = -\frac{1}{4}\mathrm{sen}(3 - 2t) + \frac{3}{2}t - \frac{t^2}{2} + C$
Función	$l(t) = \frac{\cos(3 - 2t)}{2} + \frac{3 - 2t}{2}$ $= \frac{1}{2}\cos(3 - 2t) + \frac{3}{2} - t$
Derivada	$l'(t) = \mathrm{sen}(3 - 2t) - 1$

7.

Antiderivada	$x(t) = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \beta) + c$
Función	$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \beta)$
Derivada	$x'(t) = A\,\omega\cos(\omega t + \beta)$

8.

Antiderivada	$x(t) = -\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\omega}\,t\right) + C$
Función	$x(t) = -\frac{1}{\omega}\cos\left(\sqrt{\omega}\,t\right)$
Derivada	$x'(t) = \frac{\sqrt{\omega}}{\omega}\,\text{sen}\left(\sqrt{\omega}t\right) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\omega}\,t\right)$

9.

Antiderivada	$y(x) = \frac{\sqrt{\gamma}}{2\pi\alpha}\cos 2\pi(\beta - \alpha x) + \gamma x + C$
Función	$y(x) = \sqrt{\gamma}\,\text{sen}\,2\pi(\beta - \alpha x) + \gamma$ $= \sqrt{\gamma}\,\text{sen}(2\pi\beta - 2\pi\alpha x) +$
Derivada	$y'(x) = -2\pi\alpha\sqrt{\gamma}\cos 2\pi(\beta - \alpha x)$

10.

Antiderivada	$y(x) = -\frac{\alpha^2}{2\pi\beta^2}\operatorname{sen} 2\pi\left(\alpha^2 - \beta^2 x\right) + C$
Función	$y(x) = \alpha^2 \cos 2\pi\left(\alpha^2 - \beta^2 x\right)$ $= \alpha^2 \cos\left(2\pi d^2 - 2\pi\beta^{2x}\right)$ $= -\alpha^2\left(-2\pi\beta^2\right)\operatorname{sen} 2\pi\left(\alpha^2 - \beta^2 x\right)$
Derivada	$y'(x) = 2\pi\alpha^2\beta^2 \operatorname{sen} 2\pi\left(\alpha^2 - \beta^2 x\right)$

11.

Antiderivada	$y(x) = -\frac{3}{4}\cos(4x + \pi) - \operatorname{sen}(2x + \pi) + C$
Función	$y(x) = 3 \operatorname{sen}(4x + \pi) - 2\cos(2x + \pi)$
Derivada	$y'(x) = 12\cos(4x + \pi) + 4\operatorname{sen}(2x + \pi)$

12.

Antiderivada	$y(t) = \frac{\alpha}{\omega^2}\operatorname{sen}\left(\omega^2 t\right) - \omega^2\beta\cos\left(\frac{t}{\omega^2}\right) + C$
Función	$y(t) = \alpha\cos\left(\omega^2 t\right) + \beta\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\omega^2}\right)$
Derivada	$y'(t) = -\alpha\omega^2\operatorname{sen}\left(\omega^2 t\right) + \frac{\beta}{\omega^2}\cos\left(\frac{t}{\omega^2}\right)$

13.

Antiderivada	$x(t) = \frac{\omega}{2}t^2 - \frac{1}{\omega}\cos(\pi - \omega t) + C$
Función	$x(t) = \omega t - \operatorname{sen}(\pi - \omega t)$
Derivada	$x'(t) = \omega + \omega \cos(\pi - \omega t)$

14.

Antiderivada	$\theta(t) = -\gamma \operatorname{sen}(\alpha - t) + \gamma \alpha t - \frac{\gamma}{2}t^2 + C$
Función	$\theta(t) = \gamma \cos(\alpha - t) + \gamma(\alpha - t)$ $= \gamma \cos(\alpha - t) + \gamma \alpha - \gamma t$
Derivada	$\theta'(t) = \gamma \operatorname{sen}(\alpha - t) - \gamma$

15.

Antiderivada	$\omega(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \pi \cos\left(\frac{\theta}{\pi}\right) + \operatorname{sen}(\pi \theta) + C$
Función	$\omega(\theta) = \theta + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{\pi}\right) + \pi \cos(\pi \theta)$
Derivada	$\omega'(\theta) = 1 + \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\theta}{\pi}\right) - \pi^2 \operatorname{sen}(\pi \theta)$

1.8 Nuevos Modelos

Introducción al tema 1.8. Cuando ya se tiene el conocimiento de las funciones polinomiales, exponencial natural y seno/coseno, se tiene un amplio panorama del tipo de comportamiento que experimentan un variado conjunto de magnitudes reales. Sin embargo, es conveniente conocer y manipular simbólicamente otros modelos que provienen de los anteriores mediante la realización de operaciones como la suma/resta, el producto/cociente de funciones y la obtención de la función inversa.

Será de este modo que se presentan en este tema las funciones racionales, con radicales, las funciones logarítmicas, exponenciales de distinta base, las funciones trigonométricas, trigonométricas inversas y las funciones hiperbólicas.

A diferencia de los temas anteriores, no será mediante el conocimiento de la razón de cambio de estas funciones como las construiremos, sino más bien nos apoyaremos en las operaciones realizadas con las funciones que previamente construimos de esa forma. Trataremos con aspectos del manejo del lenguaje simbólico, la representación gráfica de los modelos introducidos y algunas aplicaciones.

Funciones Racionales

Las **funciones racionales** son el cociente de funciones polinomiales. Nuevamente la palabra **razón** nos indica división, y precisamente por causa de esa división, en estas funciones aparece la obligación matemática de evitar la división entre 0.

La variedad de funciones racionales es muy amplia, sin pretender cubrir todas las posibilidades, haremos un recorrido que nos introduzca al nuevo tipo de comportamiento que estas funciones presentan.

Cuando se dice que una magnitud y es **inversamente proporcional** a otra, x, el lenguaje matemático expresa esta relación en la forma

$$y = \frac{k}{x}$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Por ejemplo, si buscamos recorrer una distancia fija, digamos k kilómetros, con una velocidad constante, la relación entre velocidad y tiempo transcurrido es

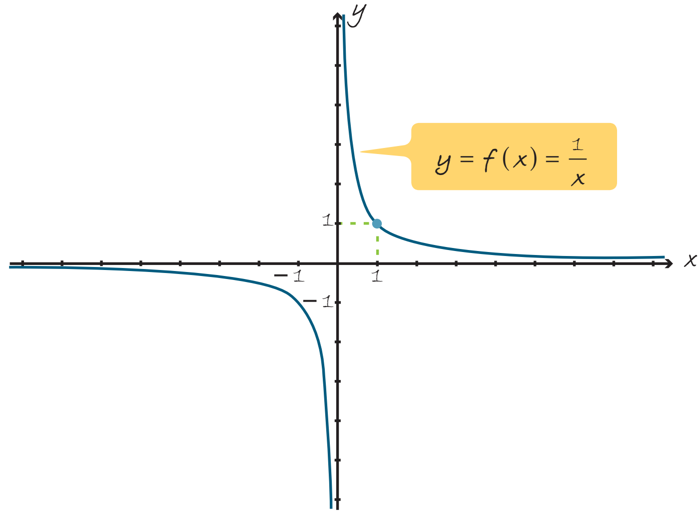
$$v = \frac{k}{t}$$

lo que nos informa que si el tiempo en que se hace el recorrido es mayor, la velocidad constante requerida es menor; y si el tiempo en el recorrido es menor, la velocidad requerida es mayor... de ahí la expresión **inversamente** proporcional.

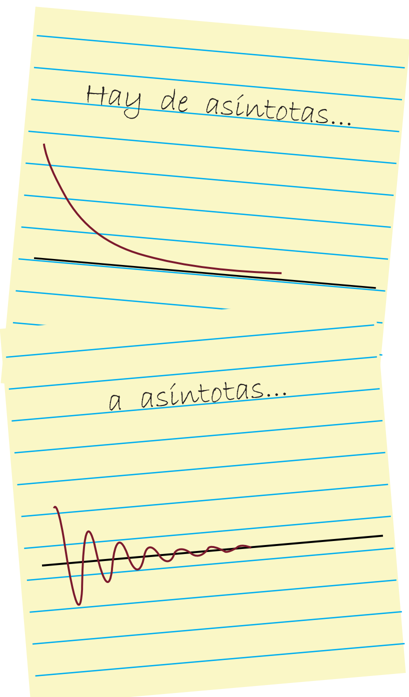
Consideremos la función racional "básica" como el cociente de la función constante 1 (función polinomial de grado 0) y la función lineal $y = x$ (función polinomial de grado 1).

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

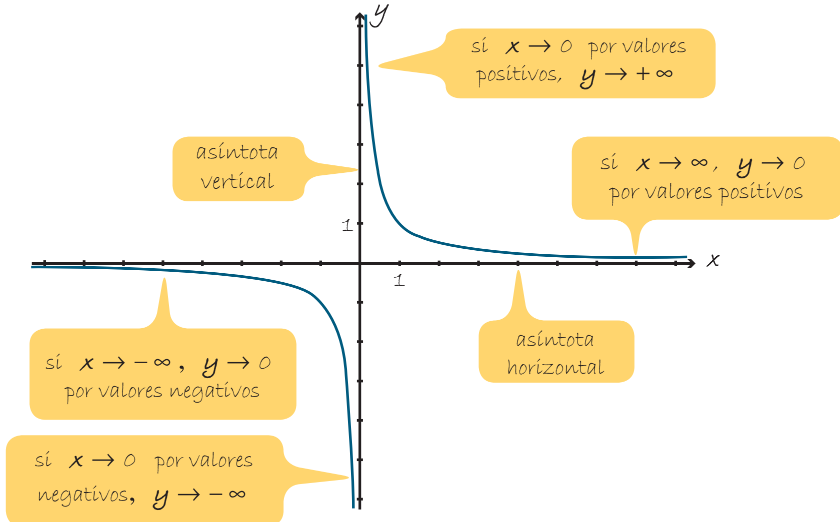
Su gráfica, que por cierto, no admite valor de y en $x = 0$, es la siguiente:

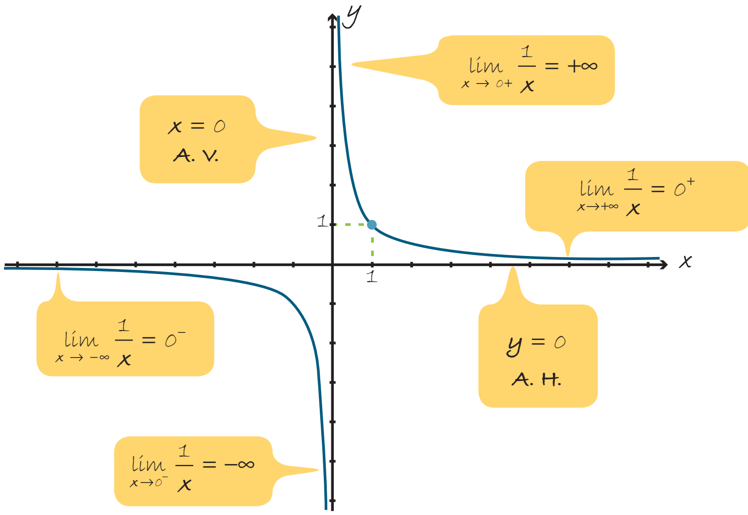


Una **asíntota** es una recta a la que la curva se acerca indefinidamente. Esto quiere decir que la distancia entre los puntos de la curva y la recta tiende a 0.



Esta gráfica fue realizada con un software de graficación en el que ajustamos las escalas de los ejes para tener una buena percepción visual del comportamiento de esta curva formada por dos partes que se encuentran "desconectadas". Estamos ante un primer ejemplo de función con una discontinuidad que no habíamos observado antes, se trata de una **discontinuidad esencial infinita,** que manifiesta la presencia de una **asíntota vertical** (el eje y). Esta asíntota es la recta a la que la curva $y = \frac{1}{x}$ se acerca indefinidamente, y lo hace en cada una de sus "ramas" a medida que x se acerca a 0, tanto por valores positivos (derecha) como por valores negativos (izquierdo). El lenguaje matemático nos permitirá expresar las particularidades de este comportamiento en la gráfica de $y = f(x) = \frac{1}{x}$.





Observa que el valor 0 para los límites al infinito $(x \to \pm\infty)$ indica la presencia de una **asíntota horizontal** en el eje x. A su vez, los límites infinitos que se obtienen cuando x se acerca a 0, (cuyo resultado es $\pm\infty$) indican la presencia de la **asíntota vertical** en el eje y.

¿Sabías que?...

La gráfica de la función $y = f(x) = \frac{1}{x}$ es una **hipérbola**...

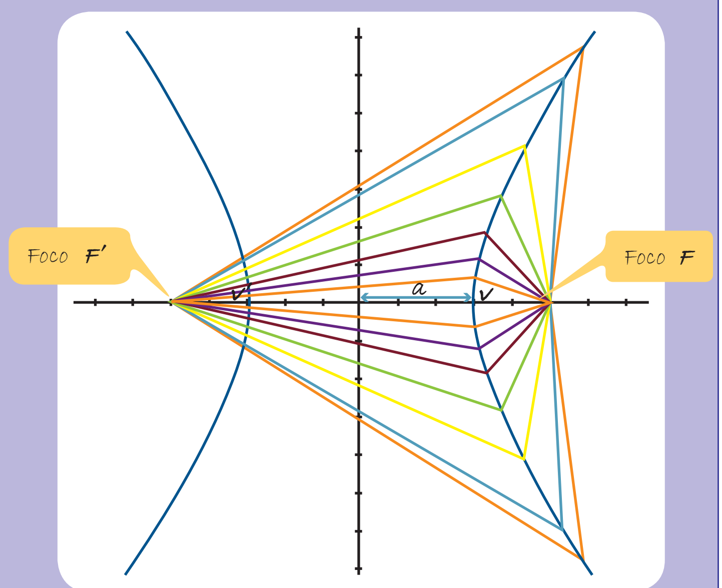
En Geometría Analítica conociste esa curva en su forma canónica: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ o bien $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ sólo que entonces se trataba de una hipérbola con eje transverso horizontal o vertical. Una rotación de 45 grados lleva, gráfica y algebraicamente, a la función $y = \frac{1}{x}$.

La hipérbola es una curva que cumple con una propiedad muy particular: se trata del lugar geométrico de todos los puntos que cumplen cierta condición. Vale la pena traer una figura donde podamos indicarte visualmente esa propiedad.

Observa los puntos F y F' que se conocen como los focos de la hipérbola. Estos dos puntos **no** pertenecen a la curva pero en base a ellos se forma la curva.

Observa los puntos V y V' que se conocen como los vértices de la hipérbola. Estos dos puntos **sí** pertenecen a la curva, y la distancia entre ellos es justamente igual al doble del número “a” que aparece en la ecuación.

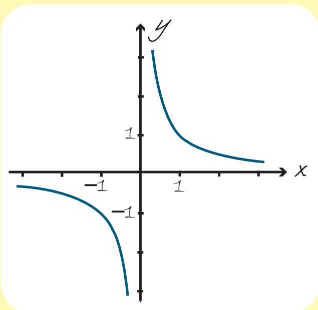
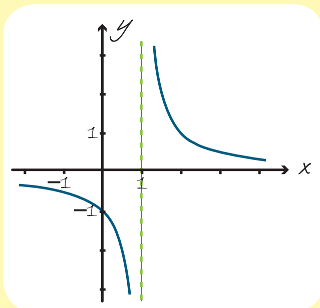
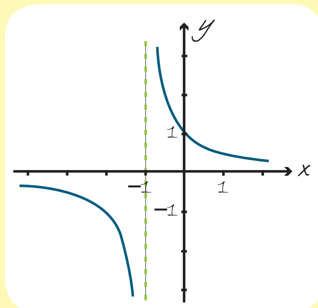
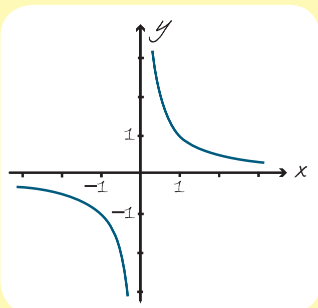
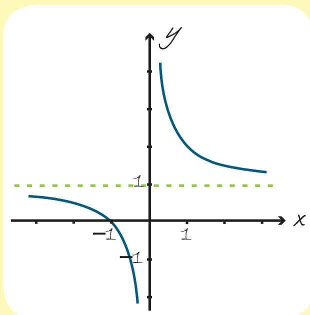
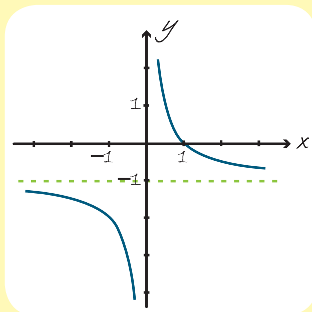
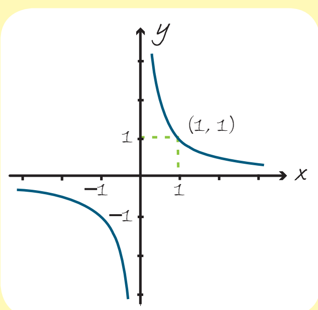
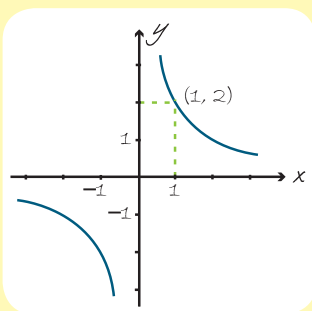
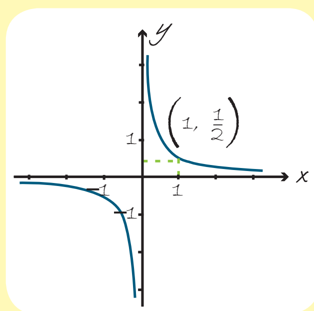
La condición que caracteriza a todos los puntos de la hipérbola es la siguiente: Si tomas cualesquier punto P en la curva, la distancia de P a F' menos la distancia de P a F es igual a la distancia entre los vértices V y V'. Puedes apreciar esto en los diferentes trazados que hicimos.



Efectos gráficos en $y = f(x) = \frac{1}{x}$

Como hemos visto en otros modelos matemáticos, el efecto de agregar en la expresión de la función algunos valores constantes (parámetros) se corresponde con un efecto en la gráfica que hemos aprendido a identificar de manera inmediata. A eso se refiere la siguiente tabla donde te mostramos diferentes modos de alterar la expresión de $y = \frac{1}{x}$.

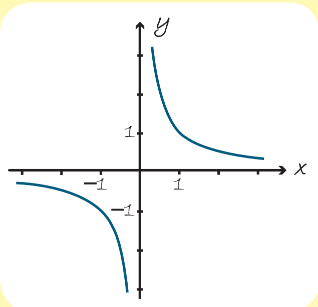
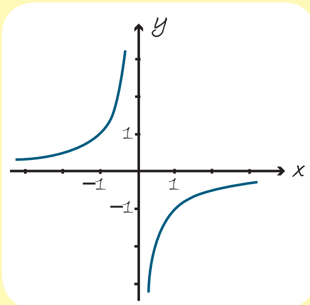
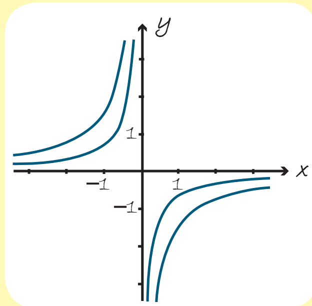
Es recomendable que utilices un recurso tecnológico de graficación para seguir el trazado sucesivo que proponemos.

$y = \frac{1}{x}$ (básica)	$y = \frac{1}{x-1}$	$y = \frac{1}{x+1}$	Traslación Horizontal
			$y = \frac{1}{x + C}$ $C > 0$ izquierda $C < 0$ derecha
$y = \frac{1}{x}$ (básica)	$y = \frac{1}{x} + 1$	$y = \frac{1}{x} - 1$	Traslación Vertical
			$y = \frac{1}{x} + D$ $D > 0$ arriba $D < 0$ abajo
$y = \frac{1}{x}$ (básica)	$y = \frac{2}{x} = 2\left(\frac{1}{x}\right)$	$y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)$	Expansión Contracción
			$y = \frac{A}{x} = A\left(\frac{1}{x}\right)$ $A > 1$ aleja de la asíntota horizontal $0 < A < 1$ acerca a la asíntota horizontal

Observa que en este caso en que se multiplica la función por el parámetro A, el análisis del efecto gráfico es equivalente al que se tendría si se multiplica x por el parámetro B, ya que algebraicamente:

$$\frac{1}{Bx} = \left(\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = A\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{para} \quad A = \frac{1}{B}$$

Por otra parte, podemos además considerar que el parámetro A sea negativo:

$y = \frac{1}{x}$ (básica)	$y = -\frac{1}{x}$	$y = -\frac{3}{2x}$ $y = -\frac{2}{3x}$	Reflexión con contracción o expansión
			$y = \frac{A}{x}$ $A < -1$ aleja de la asíntota $-1 < A < 0$ acerca a la asíntota

Identificación de asíntotas para graficación.

Para el caso de funciones racionales que sean cociente de dos funciones lineales, se puede visualizar su gráfica a través de la identificación de las asíntotas y los puntos de intersección con los ejes coordenados.

Ilustraremos este procedimiento con la función racional

$$y = f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

Para aplicar los efectos gráficos debemos manipular algebraicamente la expresión de la función, lo hacemos ahora para llegar a su gráfica, aunque el propósito de este procedimiento es que finalmente lleguemos a identificar una estrategia que, prescindiendo del trabajo algebraico, nos permita rápidamente ubicar las asíntotas y graficar.

Observa lo que se puede hacer.

Partimos de $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$

sumo y resto — factorizo — sumo

$$= \frac{2x-2+3+2}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1}$$

separo — cancelo, $x \neq 1$

$$= \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$$

conmuto

$$= 5\left(\frac{1}{x-1}\right) + 2$$

La palabra **conmutar** significa cambiar orden

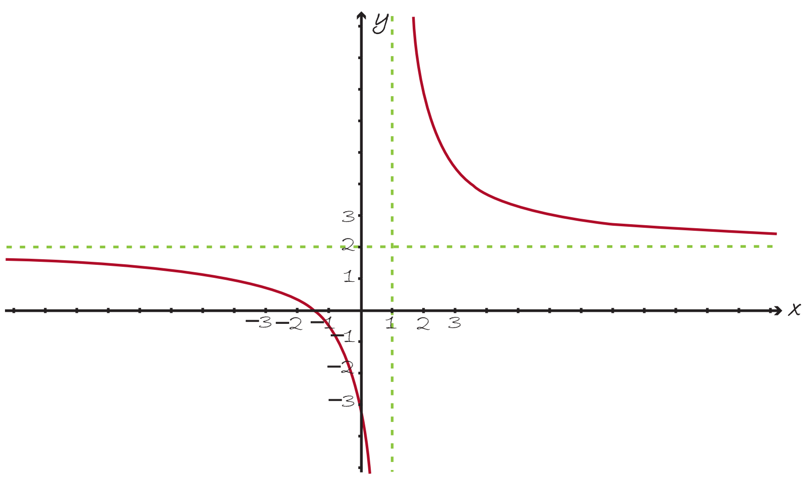
$a+b=b+a \qquad ab=ba$

$2+x^2=x^2+2 \qquad 2x^2=x^2 2$

$2+\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} x+2$

$2\operatorname{sen} x=(\operatorname{sen} x)2$

Expresada la función de esa manera podemos identificar la secuencia de efectos gráficos: afectar la gráfica $y = \dfrac{1}{x}$ por el factor 5, trasladarla 1 unidad a la derecha y finalmente trasladarla 2 unidades hacia arriba, lo mostramos enseguida.



Observa que la **asíntota vertical** corresponde con el valor $x=1$ que es el valor que hace cero al denominador de la función; esto es, si en $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ igualamos el denominador a cero, $x-1=0$ obtenemos $x=1$ que es justo la ecuación de la asíntota vertical. Esto es de esperarse porque estando x cercano a 1, el número $x-1$ es muy pequeño y el cociente entre él crece más mientras más cercano esté x a 1.

Observa además que la **asíntota horizontal** corresponde con la recta $y=2$ y este valor podemos capturarlo considerando el comportamiento al infinito que ya hemos manejado antes en el Tema 1.5:

domina

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+3}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}2=2$$

domina

Por tanto, la asíntota horizontal coincide con la división del coeficiente de x en el numerador y el coeficiente de x en el denominador.

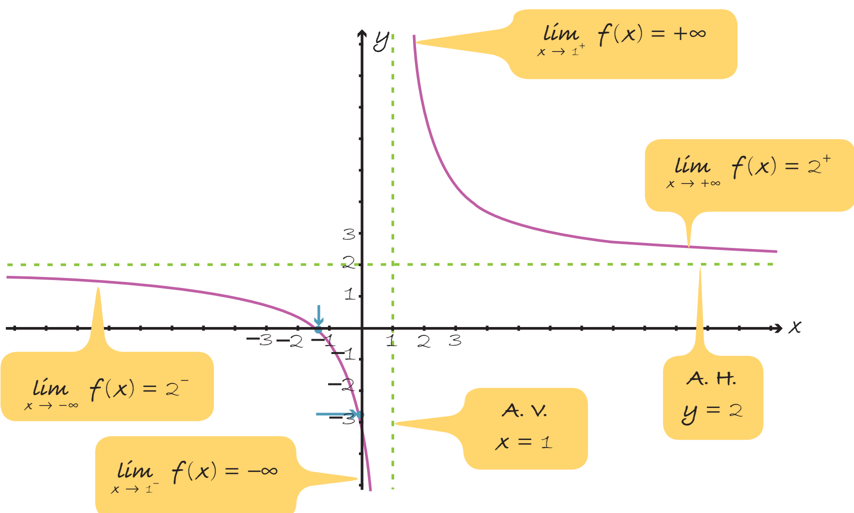
Las dos observaciones anteriores nos permiten trazar las asíntotas que guían el dibujo de la gráfica y finalmente, encontramos los cortes con el eje x e y para precisar el trazado:

Corte eje x: $y=f(x)=0$

$$\frac{2x+3}{x-1}=0 \qquad 2x=-3 \qquad x=-\frac{3}{2} \qquad P\left(-\frac{3}{2},0\right)$$

Corte eje y: $x=0$

$$y=f(0)=\frac{2(0)+3}{0-1}=\frac{3}{-1}=-3 \qquad P(0,-3)$$



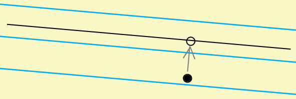
La gráfica de la **función racional** que es el cociente de dos funciones lineales

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

tiene la forma de la función básica $y = \frac{1}{x}$ modificada con efectos gráficos que producen una asíntota vertical cuando $cx + d = 0$, esto es, en $x = -\frac{d}{c}$ y una asíntota horizontal en $y = \frac{a}{c}$, que es la división de los coeficientes de x.

¡Toma nota!

Una discontinuidad removible prácticamente no es discontinuidad. Basta "agregar" un punto para hacer continuo el trazo...



*Una discontinuidad **removible** también se llama **evitable**.*

Nota: El caso en que las expresiones $ax + b$ y $cx + d$ sean múltiplos una de la otra no corresponde con la forma de $y = \frac{1}{x}$. En efecto, usa un software de graficación para que compruebes su capacidad al graficar

$$y = \frac{2x-1}{4x-2}.$$

Debe verse que grafica la recta horizontal $y = \frac{1}{2}$ y que en $x = \frac{1}{2}$ tiene un hueco. Este hueco aparece porque al realizar la cancelación de $2x - 1$ en la función:

$$y = \frac{2x-1}{4x-2} = \frac{\cancel{2x-1}}{2(\cancel{2x-1})} = \frac{1}{2} \quad \text{debe suponerse que} \quad 2x - 1 \neq 0$$

y esto obliga a que x no tome el valor $\frac{1}{2}$. El dominio de la función no incluye a este número real. En el lenguaje matemático se dice que en $x = \frac{1}{2}$ se tiene una **discontinuidad removible**.

¿Sabías que?...

Bolzano (1781-1848) ...intuyó la continuidad y la formalizó.

Este matemático, lógico, filósofo, y teólogo de origen checo, estructuró en una base lógica los conceptos de Cálculo de su época, pero partía de considerar la existencia de los números reales como un hecho, sin meterse en problemas por aceptar los infinitesimales o los números infinitamente grandes.

Antes de él, cuando se hablaba de función matemática, se consideraba que era **continua**, esta propiedad no se la cuestionaban.

Pero Bolzano definió la continuidad al establecer que la diferencia $f(x + \Delta x) - f(x)$ puede hacerse tan pequeña como se quiera al escoger el número Δx suficientemente pequeño.

Bolzano "demostró" la continuidad de las funciones polinomiales por vez primera en la historia y lo publicó en una revista que difícilmente era leída por los matemáticos... y por unos 50 años nadie supo de su prueba.

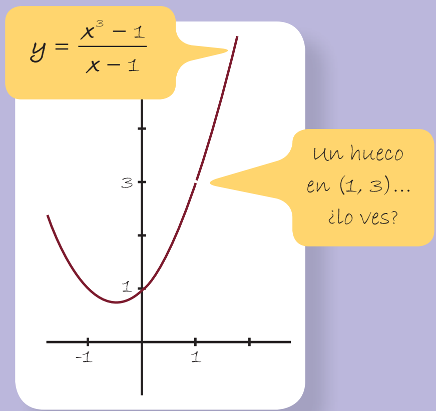
Es difícil creer esa falta de comunicación e información en nuestra realidad cibernética... ¿no lo crees?

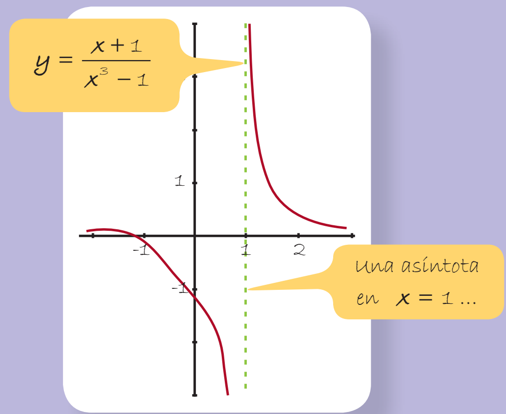
¿Sabías que?...

Una discontinuidad en la gráfica de una función puede verse muy simple… o muy complicada.

Un hueco en la curva…la ausencia de un solo valor numérico … es una **discontinuidad removible** o **evitable** que, como tal, se puede remover evitando la discontinuidad y alcanzando la continuidad.

La presencia de una asíntota vertical es una **discontinuidad esencial** que, como tal, es ya una característica de la curva que no se puede evitar.





No obstante hay discontinuidades removibles que uno pudiera pensar "a simple vista" son equiparables a las esenciales.

En la figura a la izquierda te presentamos una secuencia de acercamientos a la función

$y = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ que tiene en

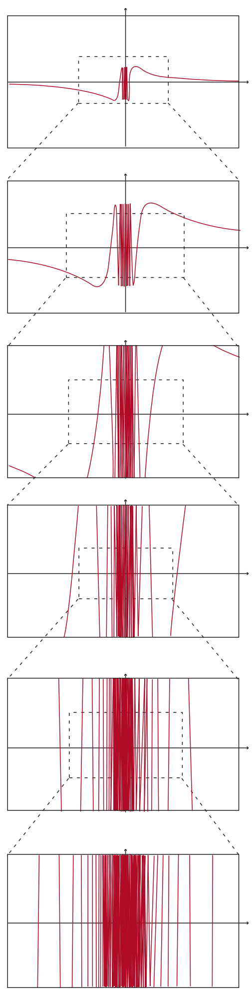
$x = 0$ una discontinuidad esencial.

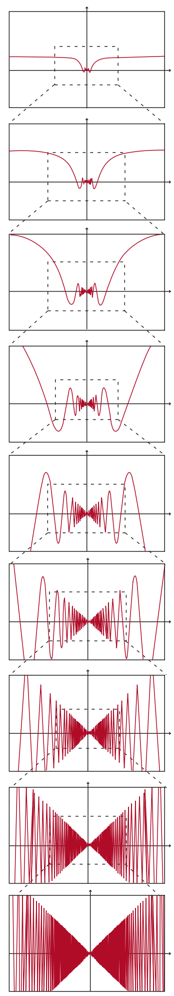
Y en la figura a la derecha la secuencia te muestra el acercamiento a la función

$y = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ que tiene en

$x = 0$ una discontinuidad removible.

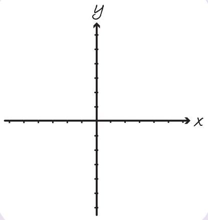
Probablemente coincidas en que aunque removamos esta última agregando el punto $(0,\ 0)$, la curva sigue viéndose igual de complicada. A veces es la misma continuidad la que nos ofrece aspectos desconcertantes.





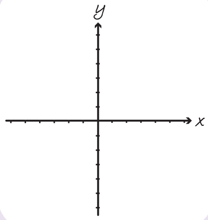
1. Grafica "a mano" las siguientes funciones racionales, identificando las asíntotas y calculando los cortes con los ejes coordenados.

$y = \frac{1}{x}$



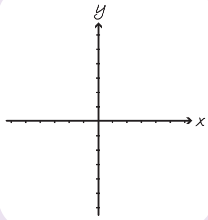
A. V.:
A. H.:

$y = -\frac{1}{x}$



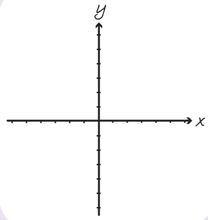
A. V.:
A. H.:

$y = \frac{3}{x}$



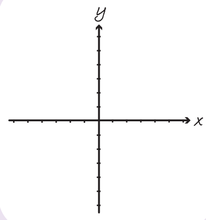
A. V.:
A. H.:

$y = \frac{1}{3x}$



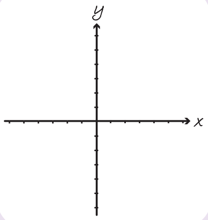
A. V.:
A. H.:

$y = -\frac{1}{3x}$



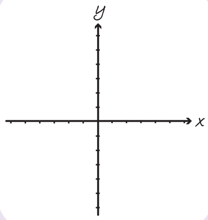
A. V.:
A. H.:

$y = \frac{1}{x-3}$



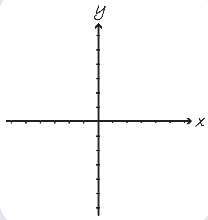
A. V.:
A. H.:

$y = \frac{1}{x+3}$



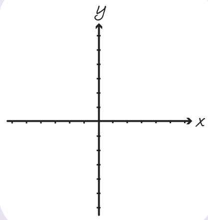
A. V.:
A. H.:

$y = \frac{1}{x} + 3$



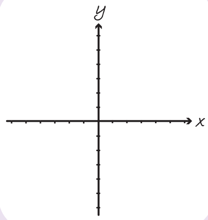
A. V.:
A. H.:

$y = \frac{1}{x} - 3$



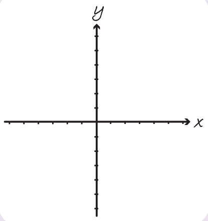
A. V.:
A. H.:

$y = \frac{1}{x-3} + 3$



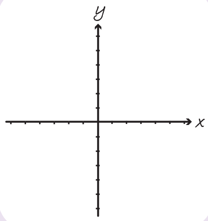
A. V.:
A. H.:

$y = \frac{x+1}{x-1}$



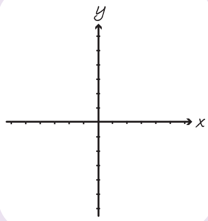
A. V.:
A. H.:

$y = \frac{1-x}{x+1}$



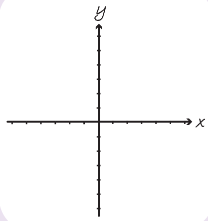
A. V.:
A. H.:

$y = \frac{x-2}{2x+3}$



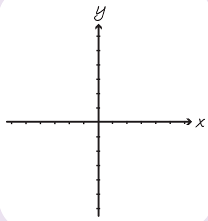
A. V.:
A. H.:

$y = \frac{2x-3}{3x-1}$

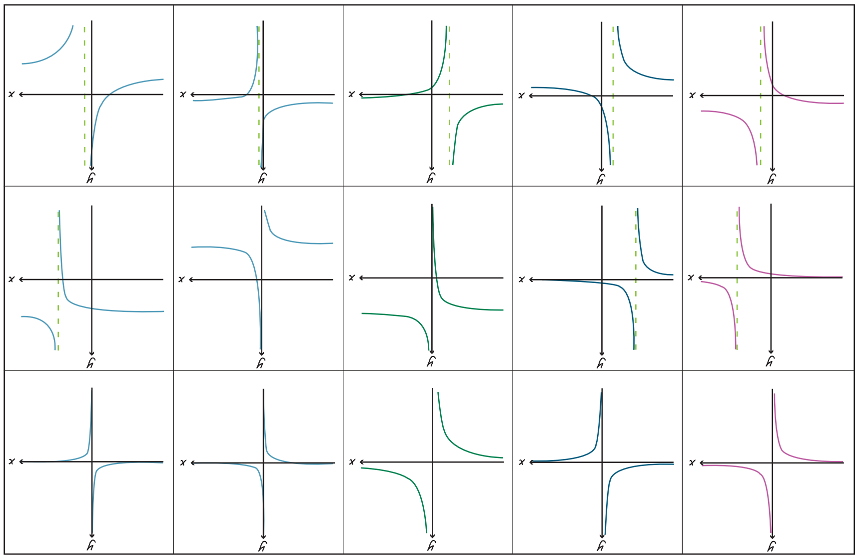


A. V.:
A. H.:

$y = \frac{6x+9}{2-3x}$



A. V.:
A. H.:



Respuestas:

2. Utiliza un software de graficación para que calcules los límites al infinito comprobando el comportamiento de la asíntota horizontal de las siguientes funciones racionales.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^4 + 1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 1}{2x^4 + 1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 1}{2x^4 + 1} =$$

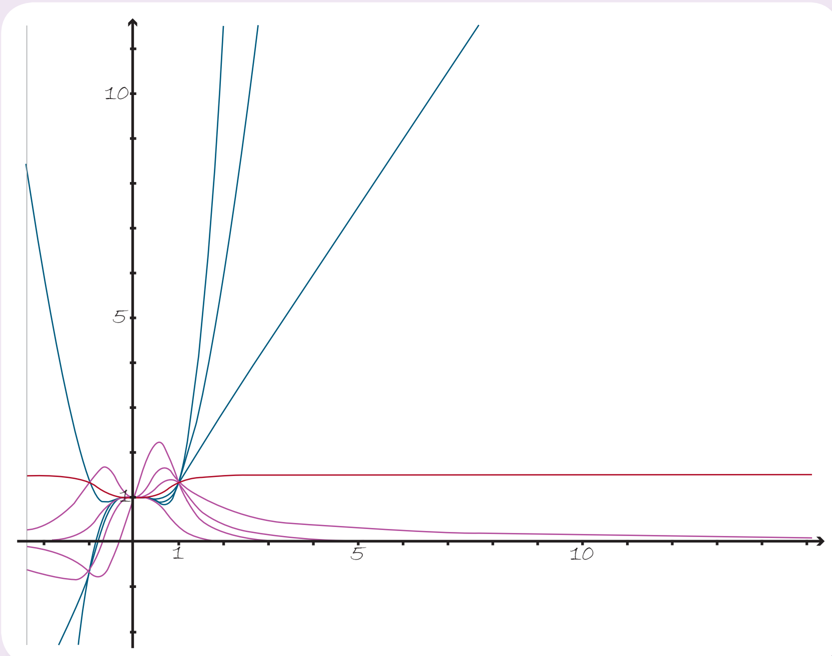
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 1}{2x^4 + 1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 + 1}{2x^4 + 1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5 + 1}{2x^4 + 1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^6 + 1}{2x^4 + 1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^7 + 1}{2x^4 + 1} =$$



Respuestas: $0, 0, 0, 0, \frac{3}{2}, \infty, \infty, \infty$

3. Con base en tu práctica de graficación usando el software podrás inferir y argumentar el valor de los límites siguientes:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 3}{3x^2 + 2x - 1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 3}{3x^3 + 2x - 1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 + 3}{9x^8 + x^4 - 5} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^7 + 5x^6}{4x^5 + 6x^2 - 7x^7} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{100 - x^3 + 4x^8}{2x^8 + 100} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 2x - 1}{2x^2 + 3} =$$

Respuestas: $\frac{2}{3}$, 0, 0, $-\frac{1}{7}$, 2, ∞

4. Concluye una estrategia para calcular límites al infinito de funciones racionales

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = ?$$

donde el grado de $p(x)$ es n y el de $q(x)$ es m.

¿Qué diferencia habría si fuese el límite cuando $x \to -\infty$

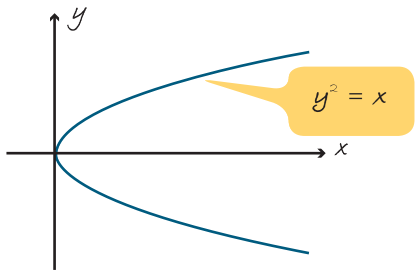
Funciones con radicales

En este apartado analizaremos algunos ejemplos de funciones que, a diferencia de las polinomiales y racionales, aceptan la operación de obtener la raíz cuadrada, cúbica, cuártica,... etcétera. Nos restringiremos a analizar las funciones cuya gráfica corresponde con parte de una parábola horizontal, de un círculo o de una elipse.

En cada uno de estos casos, plantearemos la función "básica" para cada modelo matemático y la manipularemos con los efectos gráficos para desarrollar la competencia de visualización y conversión entre representaciones algebraicas y representaciones gráficas.

Caso 1. Mitad de parábola horizontal.

La parábola horizontal tiene como ecuación $y^2 = x$. Al observar su gráfica es claro que no podemos utilizar ésta como el modelo matemático para representar el comportamiento de una magnitud real y, pues no es admisible que la magnitud tome dos valores distintos para un mismo valor de la magnitud de la que depende.

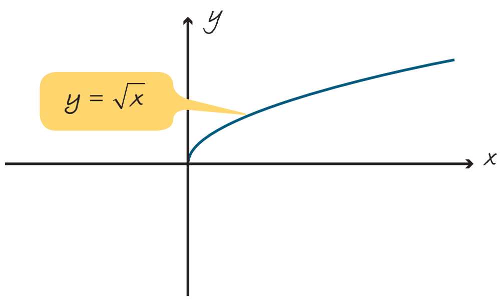


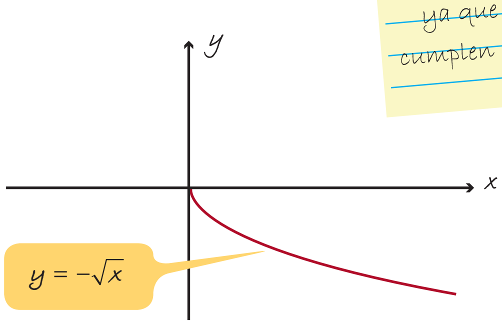
Sin embargo, al despejar la variable y en la ecuación extraemos raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad y obtenemos que si

$$y^2 = x \quad \text{entonces} \quad y = \pm\sqrt{x}$$

donde el signo $\pm$ nos indica los dos valores que acepta y para el mismo x.

Tomando el valor positivo tenemos la raíz cuadrada $y = f(x) = \sqrt{x}$, y con su reflexión respecto al eje x identificamos la otra función como $y = -\sqrt{x}$





Observa que en ambas el dominio (valores de x) es el intervalo $[0, +\infty)$ y la imagen es $[0, +\infty)$ en la básica y $(-\infty, 0]$ en la reflejada.

En el lenguaje simbólico
se economiza al
para escribir con radicales
$\sqrt{x} = +\sqrt{x}$
$\sqrt{4} = +\sqrt{4} = 2$

Si el símbolo $\sqrt{\ }$
no trae un signo detrás,
entonces... es positivo
$\sqrt{\ } = +\sqrt{\ }$

Cuando tengas que sacar
raíz cuadrada
en una expresión,
nunca olvides introducir
un $\pm$ en un lado
de la igualdad...

Por ejemplo, en
$x^2 = 4$
sacamos raíz cuadrada
$x = \pm\sqrt{4}$ $\quad x = \pm 2$
ya que tanto 2 como -2
cumplen que su cuadrado es 4

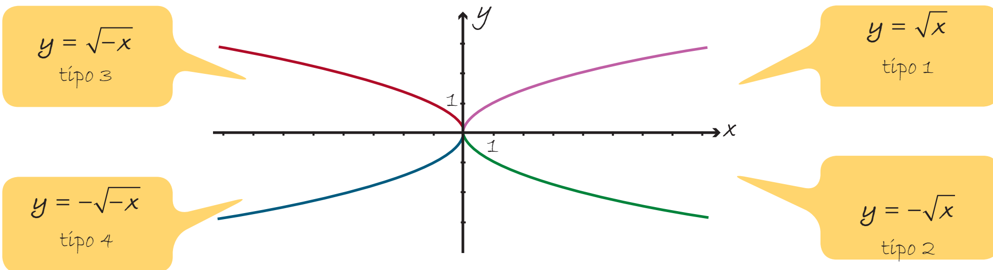
Nos conviene introducir otro cambio en la expresión básica:

$$\text{de} \qquad y = \sqrt{x} \qquad \text{a} \qquad y = \sqrt{-x}$$

Esta última expresión indica que la variable x debe tomar valores negativos, para que de este modo $-x$ sea un número positivo.

El efecto del cambio en la expresión altera la gráfica básica al reflejarla con respecto al eje y y análogamente, podemos reflejar respecto al eje x la nueva función para obtener la gráfica de $y = -\sqrt{-x}$.

Presentamos en la siguiente figura las 4 gráficas que comparten esta forma de "mitad" de parábola horizontal; las identificaremos como mitades de parábolas del tipo 1, 2, 3 y 4, según el orden expresado en la figura.



Estas cuatro gráficas pueden ser alteradas además por parámetros que modifiquen su ubicación (traslaciones vertical y horizontal) o su "grado de abertura" (contracción/expansión).

Te proponemos observar la siguiente secuencia de gráficas para que reconozcas en ella los efectos gráficos que hemos estado manipulando aplicados ahora a los cuatro tipos de gráficas identificadas. El propósito es desarrollar habilidad para convertir representaciones algebraicas en gráficas y viceversa.

El **orden** en la recta numérica real dicta la escritura correcta con intervalos...

No es correcto...

$(-\infty, 0]$, $[0, 8)$,

$[5, 2]$, $[-1, -7]$,

$[3, -3]$, $[10, 0]$

Es correcto...

$[0, 8)$, $(-\infty, 0]$,

$[2, 5]$, $[-7, -1]$,

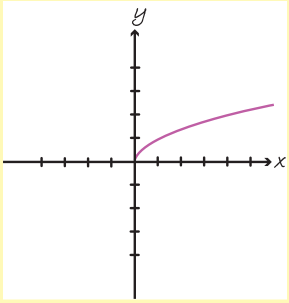
$[-3, 3]$, $[0, 10]$

Nunca se [encierra] el ∞...

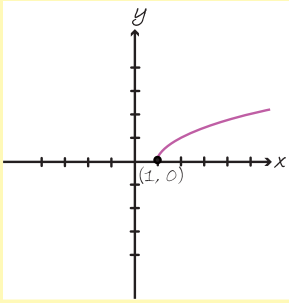
$(2, +\infty)$ es correcto

$(2, +\infty]$ es **incorrecto**.

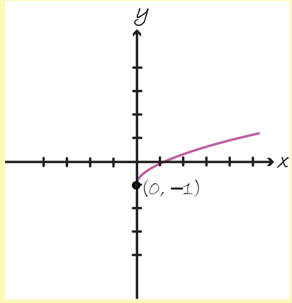
$y = \sqrt{x}$



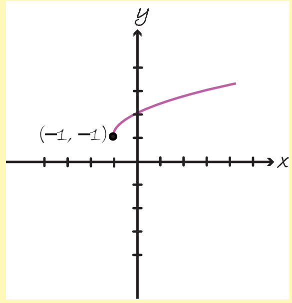
$y = \sqrt{x - 1}$



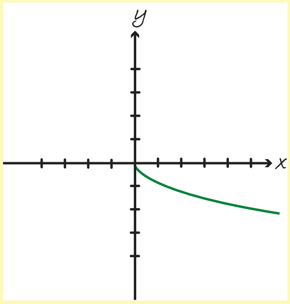
$y = \sqrt{x} - 1$



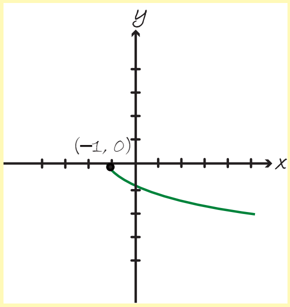
$y = \sqrt{x + 1} + 1$



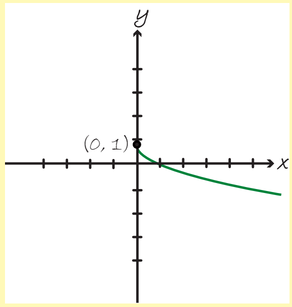
$y = -\sqrt{x}$



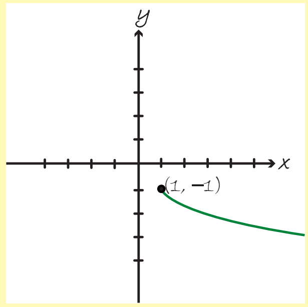
$y = -\sqrt{x + 1}$



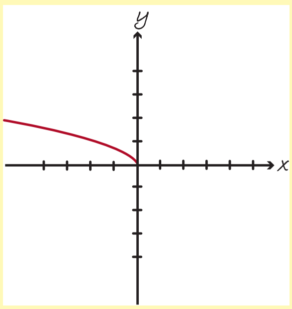
$y = -\sqrt{x} + 1$



$y = -\sqrt{x - 1} - 1$

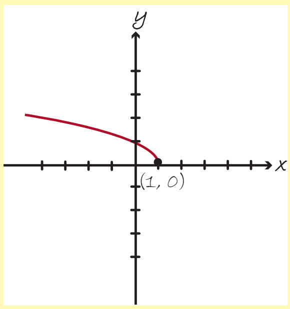


$y = \sqrt{-x}$



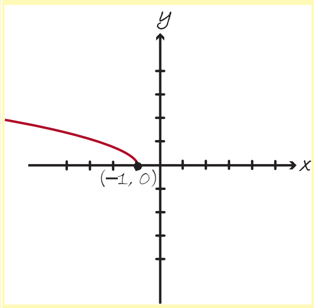
$y = \sqrt{-(x - 1)}$

$= \sqrt{-x + 1}$



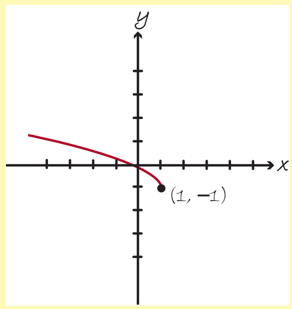
$y = \sqrt{-(x + 1)}$

$= \sqrt{-x - 1}$

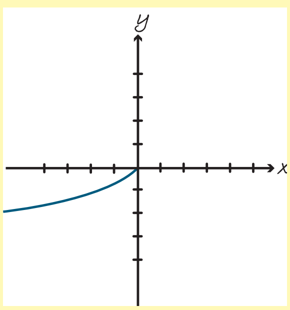


$y = \sqrt{1 - x} - 1$

$= \sqrt{-(x - 1)} - 1$

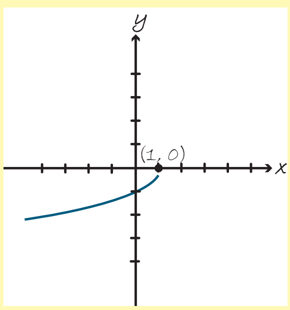


$y = -\sqrt{-x}$



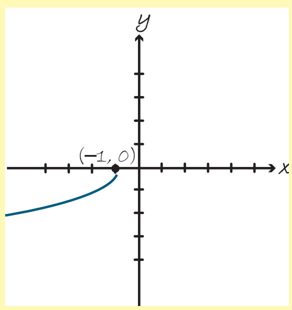
$y = -\sqrt{-x + 1}$

$= -\sqrt{-(x - 1)}$



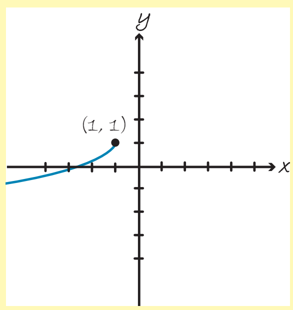
$y = -\sqrt{-x - 1}$

$= -\sqrt{-(x + 1)}$

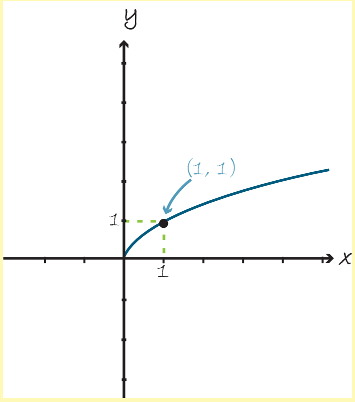
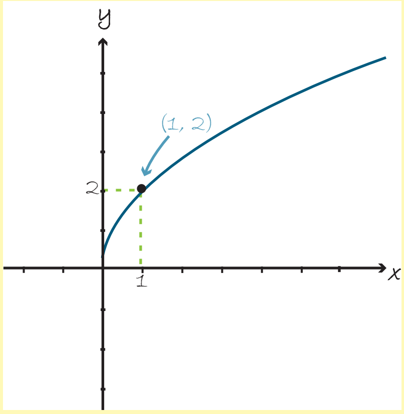
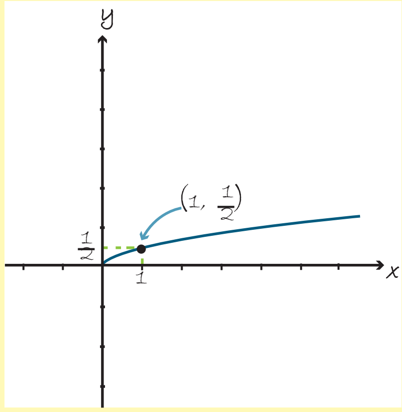


$y = \sqrt{-1 - x} + 1$

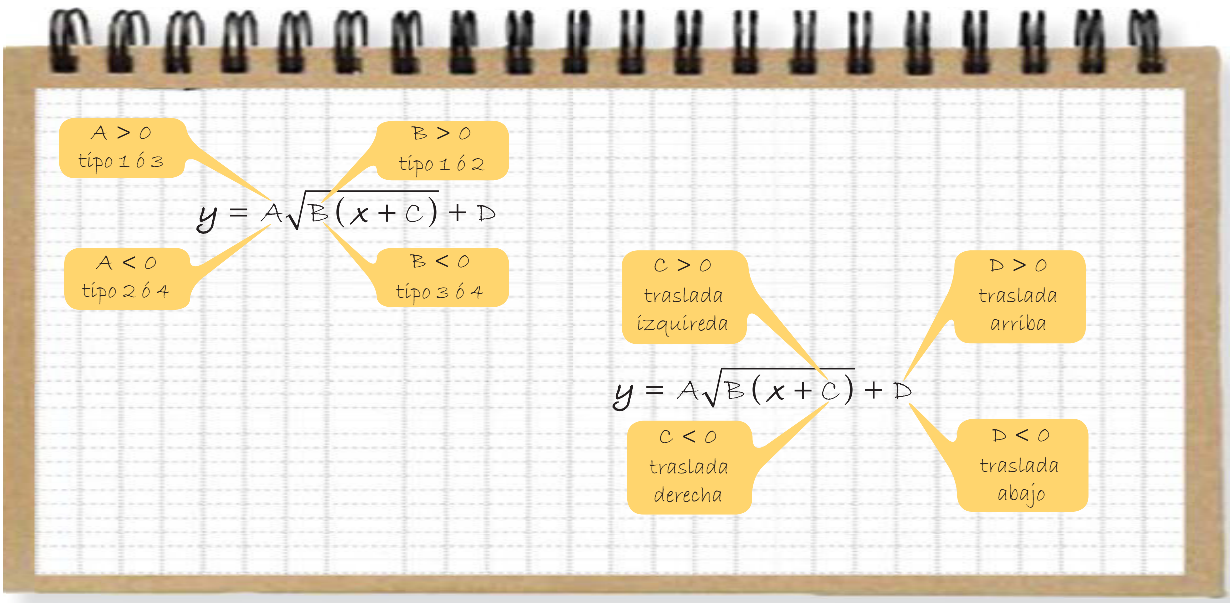
$= \sqrt{-(x + 1)} + 1$



Para el efecto de la multiplicación por el parámetro A o bien el B (que se pueden resumir en uno sólo) mostramos enseguida las gráficas:

$y = \sqrt{x}$	$y = 2\sqrt{x} = \sqrt{4x}$	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x} = \sqrt{\dfrac{x}{4}}$
		
$x = 1 \longrightarrow y = 1$	$x = 1 \longrightarrow y = 2$	$x = 1 \longrightarrow y = \dfrac{1}{2}$
El punto $(1, 1)$ permite diferenciar los casos de $A > 1$ y $0 < A < 1$	Al multiplicar por 2 la altura de $x = 1$ aumenta a 2 y la gráfica se "abre"	Al multiplicar por $\dfrac{1}{2}$ la altura de $x = 1$ disminuye a $\dfrac{1}{2}$ y la gráfica se "cierra"

Después de haber observado con detenimiento la tabla anterior podemos economizar nuestro pensamiento con las siguientes imagenes que resumen lo visto.



Práctica de percepción visual y conversión

En cada función realiza la secuencia de efectos gráficos que te lleven a su gráfica finalmente. Calcula además los cortes con el eje x y eje y, y señálalos en la gráfica. Termina expresando el dominio y la imagen de la función utilizando intervalos.

1) $y = 2\sqrt{4 + 2x} - 3$

Procedimiento algebraico:

$$y = 2\sqrt{4 + 2x} - 3$$

$$= 2\sqrt{2(x + 2)} - 3$$

$$= 2\sqrt{2}\sqrt{x + 2} - 3$$

tipo 1 $\quad y = 2\sqrt{2}\sqrt{x + 2} - 3$

> 1 agranda $\quad > 0$ izquierda $\quad < 0$ abajo

Secuencia gráfica:

① $y = \sqrt{x}$

② $y = 2\sqrt{2}\sqrt{x}$

③ $y = 2\sqrt{2}\sqrt{x + 2}$

④ $y = 2\sqrt{2}\sqrt{x + 2} - 3$

Corte con eje x: $\quad y = 0$

$$2\sqrt{4 + 2x} - 3 = 0$$

$$2\sqrt{4 + 2x} = 3$$

$$\sqrt{4 + 2x} = \frac{3}{2}$$

$$4 + 2x = \frac{9}{4}$$

$$2x = \frac{9}{4} - 4 = \frac{9 - 16}{4} = -\frac{7}{4}$$

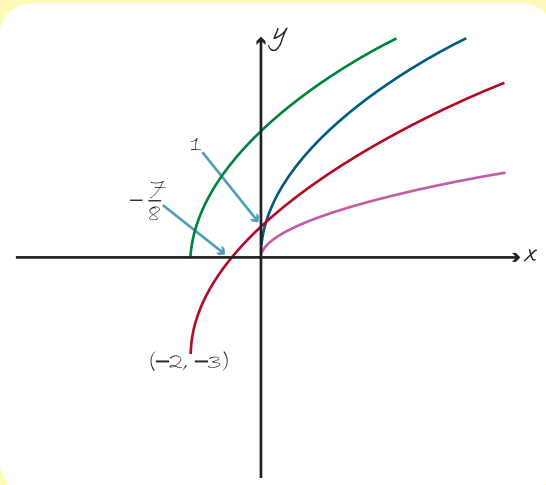
$$x = -\frac{7}{8}$$

Corte con eje y: $\quad x = 0$

$$y = 2\sqrt{4 + 2(0)} - 3 = 2\sqrt{4} - 3$$

$$= 4 - 3 = 1$$

Gráfica



Dominio: $[-2, \infty)$

Imagen: $[-3, \infty)$

2) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4-2x} - 3$

Procedimiento algebraico:

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{4-2x} - 3$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-2(x-2)} - 3$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-(x-2)} - 3$$

tipo 4 $\quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-(x-2)} - 3$

<1 reduce $\qquad$ <0 derecha $\qquad$ <0 abajo

Secuencia gráfica:

① $y = -\sqrt{-x}$

② $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-x}$

③ $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-(x-2)}$

④ $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-(x-2)} - 3$

Corte con eje x: $\qquad y = 0$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{4-2x} - 3 = 0$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{4-2x} = 3$$

$$\sqrt{4-2x} = -6 \quad \text{¡Alto!}$$

...no hay solución

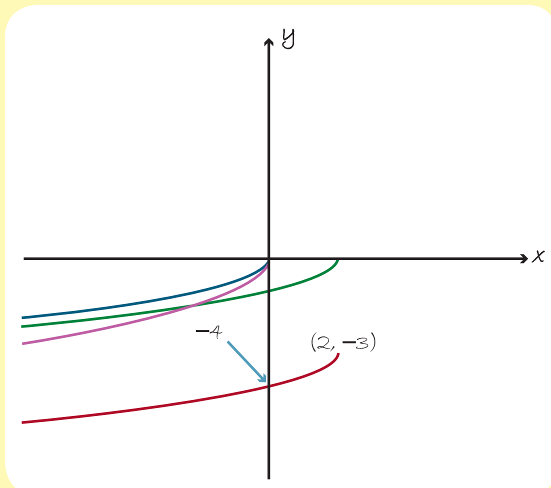
Corte con eje y: $\qquad x = 0$

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{4-2(0)} - 3$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{4} - 3$$

$$= -1 - 3 = -4$$

Gráfica:



Dominio: $(-\infty, 2]$

Imagen: $(-\infty, -3]$

$\sqrt{4-2x} = -6$ ¡Alto!

un positivo no puede ser negativo

Y si sigues...

$4 - 2x = 36$

$-32 = 2x$

$x = -16$

¡sale una solución artificial!

Si te encuentras una igualdad como

$\sqrt{x} = -2$

no eleves al cuadrado pues si lo haces obtienes una raíz "artificial".

El procedimiento

$\sqrt{x} = -2$

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (-2)^2$

$x = 4$

es incorrecto porque

$\sqrt{4} \neq -2$

3) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{2x-4}+3$

Procedimiento algebraico:

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{2x-4}+3$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2(x-2)}+3$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x-2}+3$$

tipo 2 $\quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x-2}+3$

< 1 reduce

< 0 derecha

> 0 arriba

Secuencia gráfica:

① $y = -\sqrt{x}$

② $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x}$

③ $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x-2}$

④ $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x-2}+3$

Corte con eje x: $\quad y = 0$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2x-4}+3 = 0$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2x-4} = -3$$

$$\sqrt{2x-4} = 6$$

$$2x-4 = 36$$

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

Corte con eje y: $\quad x = 0$

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{0-4}+3$$

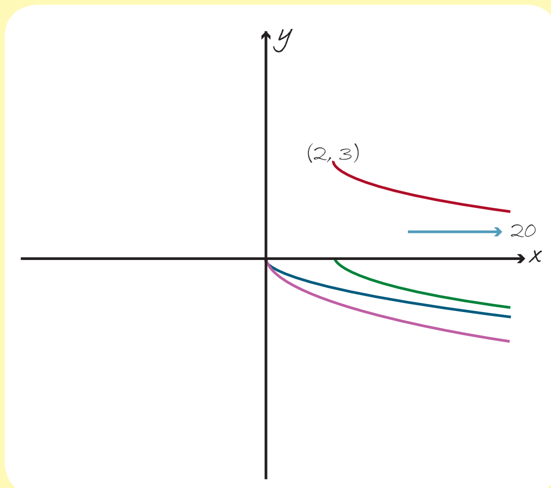
No hay corte.

$$y = -\frac{1}{2}2i+3$$

$$y = -i+3$$

solución imaginaria

Gráfica



Dominio: $[2, \infty)$

Imagen: $(-\infty, 3]$

4) $y = 2\sqrt{-4-2x}+3$

Procedimiento algebraico:

$$y = 2\sqrt{-4-2x}+3$$
$$y = 2\sqrt{-2(x+2)}+3$$
$$= 2\sqrt{2}\sqrt{-(x+2)}+3$$

tipo 3 $\quad y = 2\sqrt{2}\sqrt{-(x+2)}+3$

>1 aumenta

>0 izquierda

>0 arriba

Secuencia gráfica:

① $y = \sqrt{-x}$

② $y = 2\sqrt{2}\sqrt{-x}$

③ $y = 2\sqrt{2}\sqrt{-(x+2)}$

④ $y = 2\sqrt{2}\sqrt{-(x+2)}+3$

Corte con eje x: $\quad y = 0$

$$2\sqrt{-4-2x}+3 = 0$$
$$2\sqrt{-4-2x} = -3$$
$$\sqrt{-4-2x} = -\frac{3}{2} \quad \text{¡Alto!}$$

¿positivo = negativo?

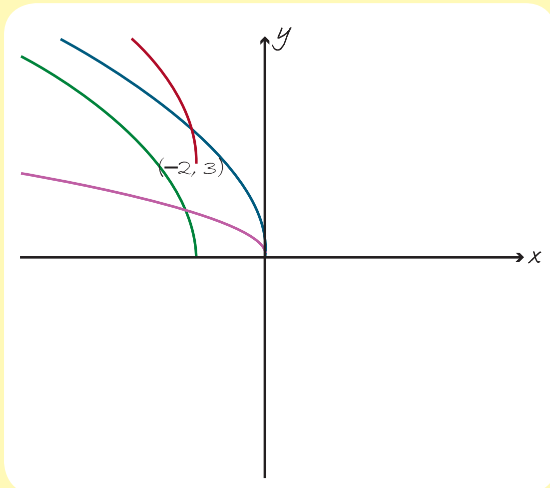
No hay corte

Corte con eje y: $\quad x = 0$

$$y = 2\sqrt{-4-2(0)}+3$$
$$= 2\sqrt{-4}+3$$
$$= 4i+3$$

No hay corte

Gráfica



Dominio: $(-\infty, -2]$

Imagen: $[3, \infty)$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

se vale separar...

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

no se vale separar...

$\sqrt{a^2} = |a|$

porque $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

¡no es -5!

$\sqrt{a^2} = a$ sólo cuando $a > 0$

si $a > 0$, $b > 0$

$\sqrt{a^2+b^2}$ **no** es $a+b$

$\sqrt{a^2b^2}$ **sí** es ab

$2\sqrt{2} = \sqrt{2^2(2)} = \sqrt{8}$

$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2(5)} = \sqrt{45}$

$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2(3)} = \sqrt{48}$

Caso 2. Mitad del círculo

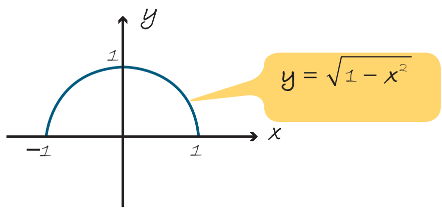
El círculo con centro en el origen y radio 1 tiene ecuación $x^2 + y^2 = 1$ Su gráfica, nuevamente, requiere de ser dividida para poder hablar de una **función**. Eso haremos al despejar de la ecuación del círculo a la variable y:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad y^2 = 1 - x^2 \qquad y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Elegimos el signo positivo y así consideramos la función básica:

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

cuya gráfica es la mitad superior del círculo con centro en el origen $(0,0)$ y radio 1.



Observando su gráfica visualizamos que su dominio consiste de los números reales x en el intervalo $[-1,\ 1]$ y su rango o imagen consiste de los números reales en el intervalo $[0,\ 1]$.

Esta gráfica básica tiene la condición de provenir de un círculo de radio 1, pero conviene tomar en cuenta que el tamaño del radio del círculo funcione como un parámetro, y así podemos considerar valores diferentes en el radio. Designemos ese valor con la letra R para recordar la palabra radio.

La ecuación del círculo con centro en el origen y radio R es:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Despejando la variable y de ella, y eligiendo el valor positivo, tenemos la función básica

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

cuya gráfica es la mitad superior del círculo con centro en el origen y radio R. Su dominio es el intervalo $[-R, R]$ y su imagen, $[0, R]$.

Para reconocer o identificar algunas graficas que se ajustan al comportamiento de esta función, analizaremos los efectos gráficos rígidos consistentes en traslaciones horizontales y verticales. No obstante, debemos considerar primeramente el tamaño del radio que nos establecerá la mitad de círculo por trasladar.

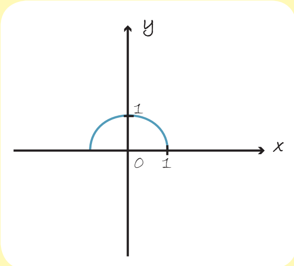
La siguiente figura te guiará en esta identificación. Es un buen ejercicio el expresar Dominio e Imagen utilizando intervalos,

Los puntos del círculo
equidistan
(igual distancia)
de su centro...
y esa distancia es el radio.

La distancia entre el
punto $P(x, y)$ y el $C(0, 0)$
se calcula con
$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$
¡es el Teorema de Pitágoras!

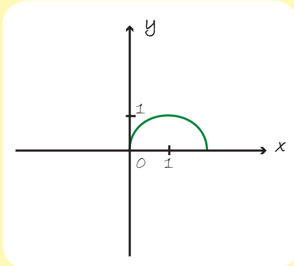
Si todos los puntos
equidistan del centro
$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \text{Radio}$
$\sqrt{x^2 + y^2} = R$
$x^2 + y^2 = R^2$

$y = \sqrt{1 - x^2}$



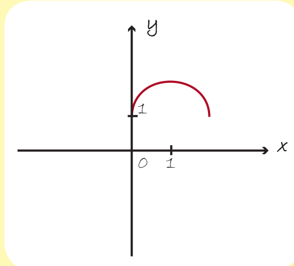
D: __________ I: __________

$y = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$



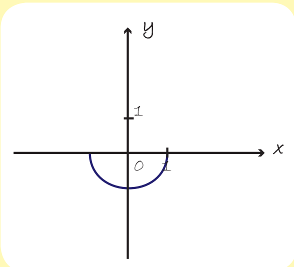
D: __________ I: __________

$y = \sqrt{1 - (x - 1)^2} + 1$



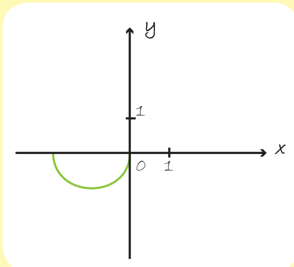
D: __________ I: __________

$y = -\sqrt{1 - x^2}$



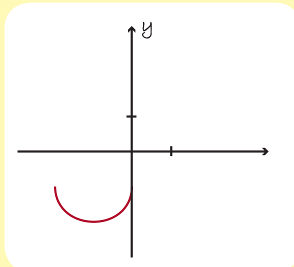
D: __________ I: __________

$y = -\sqrt{1 - (x + 1)^2}$



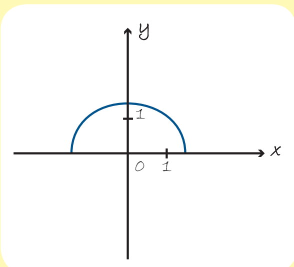
D: __________ I: __________

$y = -\sqrt{1 - (x - 1)^2} - 1$



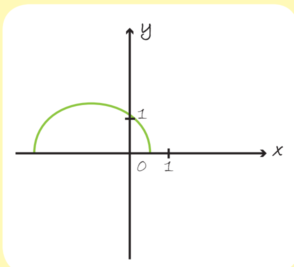
D: __________ I: __________

$y = \sqrt{2 - x^2}$



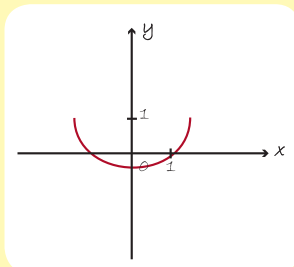
D: __________ I: __________

$y = \sqrt{2 - (x + 1)^2}$



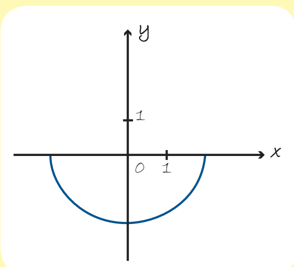
D: __________ I: __________

$y = -\sqrt{2 - x^2} + 1$



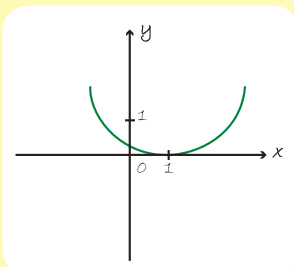
D: __________ I: __________

$y = -\sqrt{4 - x^2}$



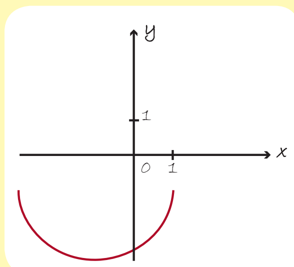
D: __________ I: __________

$y = 2 - \sqrt{4 - (x - 1)^2}$



D: __________ I: __________

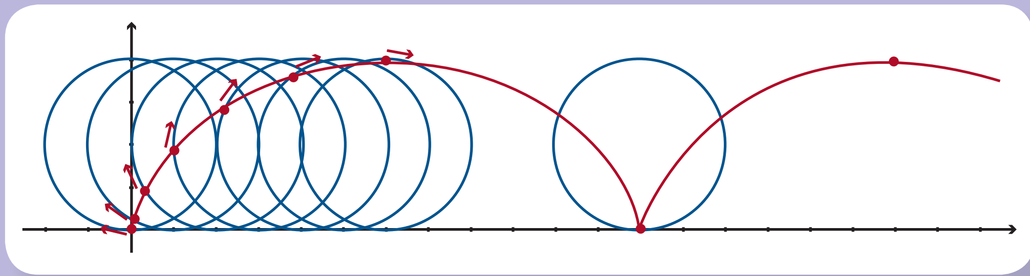
$y = -\sqrt{4 - (x + 1)^2} - 1$



D: __________ I: __________

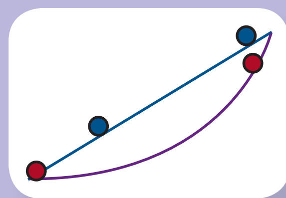
¿Sabías que?...

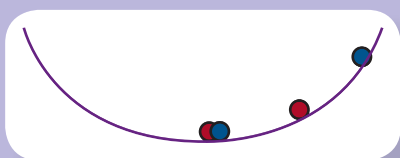
La curva que se traza por un punto de un círculo que rueda sobre una línea recta ha sido solución a importantes problemas relativos al estudio del movimiento.



La **cicloide** fue estudiada (no por primera vez) por Galileo en 1599, quien conjeturó sobre la medida del área que encierra un primer ciclo de ella, y como ocurre a menudo, su conjetura fue acertada. Posteriormente, en 1634 Roberval y en 1658 Wren, demostraron que el área del ciclo es 3 veces el área del círculo y que la longitud del arco de ese ciclo es 4 veces el diámetro del círculo.

Las peculiaridades de la cicloide van más allá. Resuelve el problema de encontrar la curva de descenso más rápido de un cuerpo que inicia del reposo y desciende bajo la acción de la fuerza de gravedad sin fricción. Si un punto está colocado más arriba de otro y se unen con un segmento de recta y a la vez se unen con una cicloide reflejada…resulta que la partícula que se deje rodar por la cicloide llega más rápido que la que se deje rodar por la recta. Aquí la cicloide se conoce como **braquistócrona** (mínimo tiempo).





También se le conoce como tautócrona (mismo tiempo) porque si ponemos una cicloide reflejada y colocamos y soltamos dos partículas en diferente altura, ambas llegarán al punto mínimo al mismo tiempo.

Visualizar la expresión

$\sqrt{R^2 - x^2}$

quiere decir que notas

un signo $-$ antes de x^2

y un $R^2 > 0$ antes del $-$

Por ejemplo

$\sqrt{25 - x^2}$ y $\sqrt{5 - x^2}$

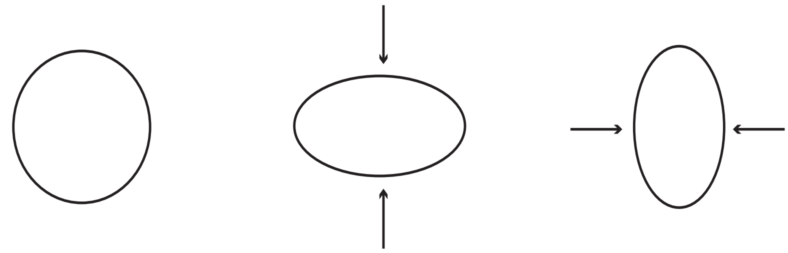
son así… pero

$\sqrt{x^2 - 25}$ y $\sqrt{5 + x^2}$

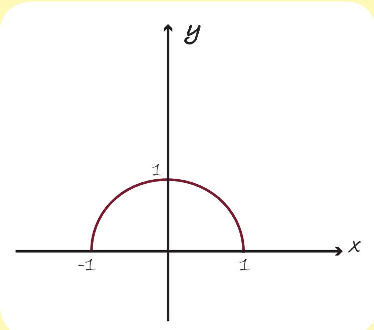
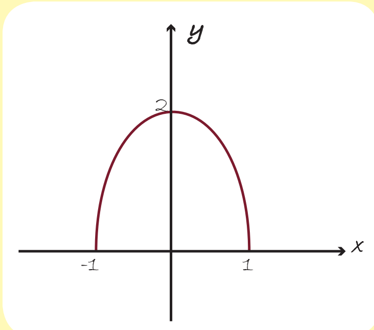
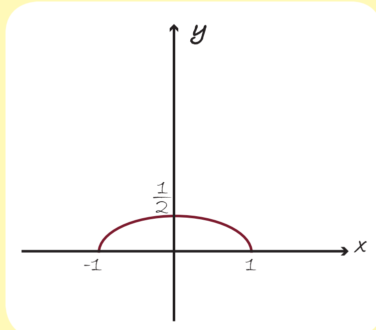
no son así…

Caso 3. Mitad de elipse

El caso de la curva que conociste en Geometría Analítica como la elipse, lo consideramos como un caso particular del efecto gráfico producido sobre el círculo... porque podemos visualizar a la elipse como un círculo que ha sido "deformado" como mostramos en la figura.



El efecto al que nos referimos es consecuencia de la introducción de un parámetro A que multiplica la expresión original. Lo proponemos enseguida ejemplificando el caso en que el parámetro positivo A es mayor que 1 o menor que este número:

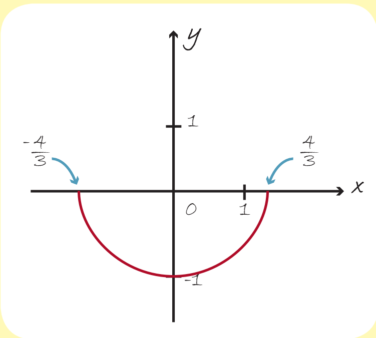
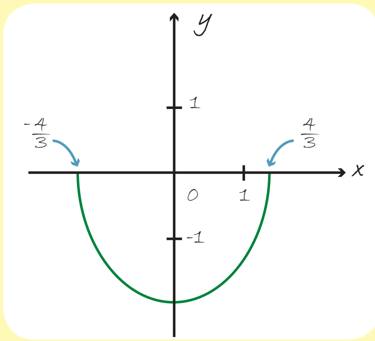
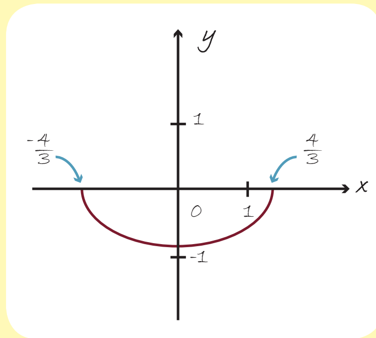
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$y = 2\sqrt{1 - x^2}$	$y = \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$
		

Vale la pena que al observar la figura anterior notes que los puntos del medio círculo que están sobre el eje x, en $x = \pm 1$, tienen el valor $y = 0$ y al ser multiplicados por 2, o por $\frac{1}{2}$ vuelven a tener el mismo valor 0, por tanto, no cambiarán su lugar.

Por otra parte, el punto sobre el eje y de la curva básica, donde $x = 0$ tiene asignado el valor $y = 1$ y al ser multiplicado por 2 o por $\frac{1}{2}$ se moverá más arriba o más abajo, respectivamente.

Todos los puntos intermedios del intervalo $(-1, 1)$ al multiplicarse por 2 o por $\frac{1}{2}$ adquieren alturas proporcionales a las que poseían en el círculo quedando las curvas que mostramos en la tabla anterior.

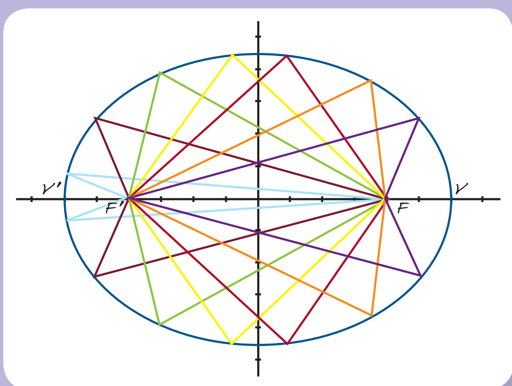
Lo mismo ocurre en el caso de tener la mitad inferior del círculo original, como en la tabla siguiente.

$y=-\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}$	$y=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}$	$y=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}$
		

¿Sabías que?...

Con un cordel puedes dibujar una elipse…

En la figura la elipse azul estaría dibujada con un cordel de longitud igual a la distancia entre V y V', puntos que son llamados Vértices de la elipse.



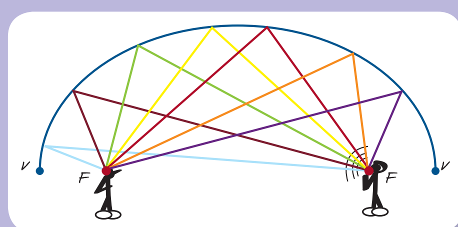
Los extremos del cordel se colocan en los puntos F y F' y se fijan ahí de modo que el cordel cuelgue.

Cada vez que estiras el cordel y colocas un punto en el vértice del triángulo que se forma con el cordel y el lado FF', vas obteniendo un punto de la elipse.

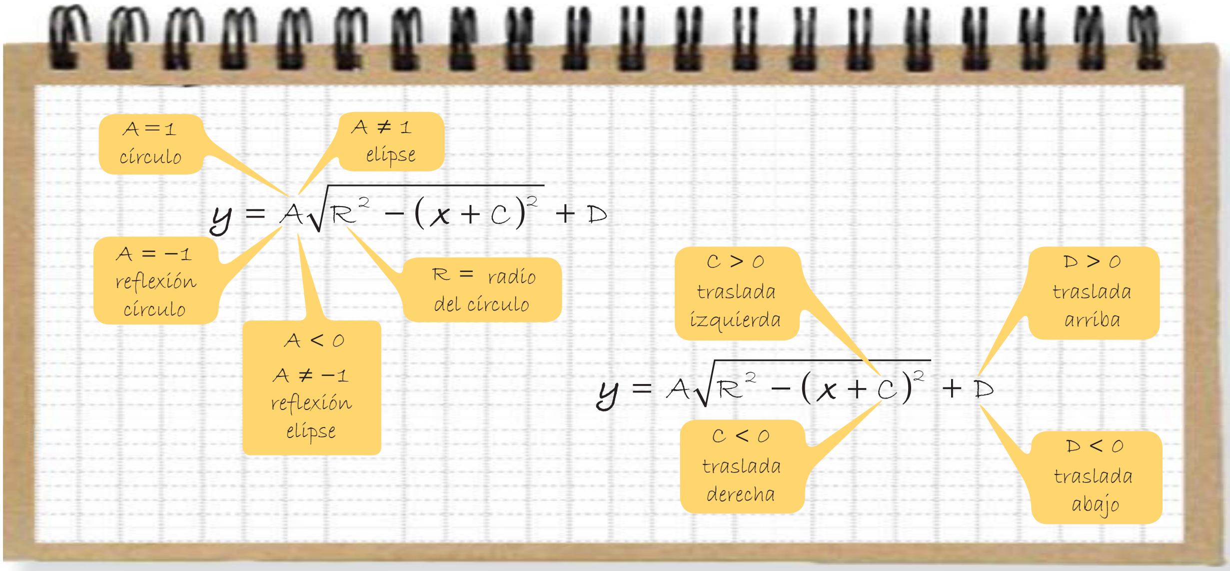
Todos los puntos de la elipse cumplen que la suma de sus distancias a dos punto fijos (F y F') llamados Focos… es siempre la misma.

Esta propiedad de la elipse tiene consecuencias interesantes para el sonido, porque si se construye una enorme bóveda elíptica, ocurrirá que si una persona habla en voz baja desde uno de los Focos, la persona que se encuentre colocada en el otro Foco escuchará perfectamente lo que dice. Este efecto se debe a que las ondas de sonido topan con la bóveda y se reflejan de tal manera que recorren la misma distancia y llegan al mismo tiempo al oído del otro.

En el Parque Nacional conocido como Desierto de los Leones, al sureste de la ciudad de México y sobre la carretera Federal México-Toluca se encuentra el Convento carmelita en cuyos jardines destaca un capitel con bóveda elíptica. Le llaman "el secreto" por esta curiosidad de escuchar lo que el otro apenas susurra cuando se colocan en la posición adecuada.



Reuniendo las gráficas que corresponden con mitades de círculos o de elipses, podemos recordar la combinación de efectos posibles de la siguiente manera:



Podríamos dudar de que el efecto del parámetro A en $y = f(x) = A\sqrt{R^2 - x^2}$ deforma el círculo $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ y produce una elipse... las imágenes lo sugieren... pero verifiquemos que algebraicamente podemos argumentar que, efectivamente, sí se produce una elipse.

Para ello haremos uso del conocimiento de la ecuación de la elipse que se estudia en el curso de Geometría Analítica.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde los valores positivos de a y b indican el lado mayor y el lado menor de la elipse, según cuál de ellos sea el número más grande.

En esa ecuación vamos a despejar y:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \qquad y^2 = b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) \qquad y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)}$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

¿Sabías que?...

La elipse siempre ha sido una curva con gran aceptación en obras arquitectónicas monumentales, desde la época de la antigüedad hasta nuestros días.

El Coliseo de Roma es una gran construcción de forma elíptica y fabricado con cerca de 100,000 metros cúbicos de piedra travertina, donde en los años 70-82 D.C. los romanos ofrecían diversión a todas las clases sociales celebrando la gloria de Roma.

El conocido como "Edificio Lipstick" fue construido en 1986 en Nueva York y tiene una forma elíptica que le destaca de los demás edificios de su entorno en Manhattan. Es una contribución post-moderna de 143 metros de alto y con 4 cilindros elípticos colocados uno sobre el otro. Su arquitecto Johnson comenta que es una reminiscencia de la época barroca en que la forma elíptica estuvo muy de moda.

La última expresión con su signo positivo tiene la forma que hemos considerado haciendo que $A = \frac{b}{a}$ y $R = a$

$$y = f(x) = A\sqrt{R^2 - x^2}$$

Esta función corresponde con la mitad superior de una elipse que es vertical u horizontal según si el valor del parámetro A es mayor a 1 o menor que él. El caso del signo negativo atrás de la expresión agrega la reflexión respecto al eje x, correspondiendo a la mitad inferior de la elipse.

La gráfica de las funciones cuya representación algebraica incluye radicales de la forma

$$y = f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} = \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

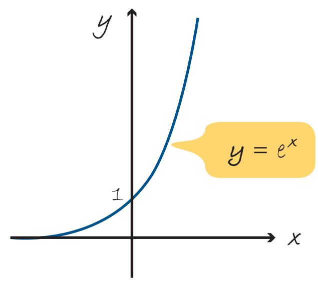
Representan la mitad de una parábola horizontal y la mitad de un círculo de radio R, repectivamente.
Estas representaciones pueden ser alteradas por parámetros A, C y D que provocan efectos de contracción/expansión y traslación horizontal/vertical, además de reflexión respecto al eje x.
La contracción/expansión en la mitad de círculo produce la gráfica de mitad de elipse.

La función logaritmo natural

En el Tema 1.6 conocimos la función logaritmo natural en respuesta al análisis de un problema de predicción, donde la magnitud involucrada se comportaba exponencialmente. Establecimos en ese momento la relación inversa que guarda con la función exponencial natural de base e.

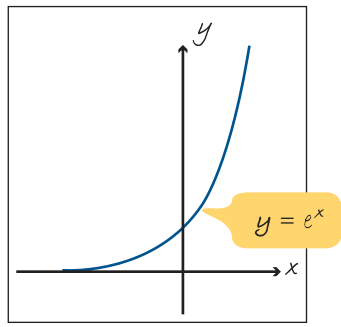
En este tema lo que haremos es familiarizarnos con su comportamiento gráfico y considerar sus propiedades para la simplificación de procesos algebraicos y aplicaciones.

A continuación aparece la gráfica de la función $y = e^x$

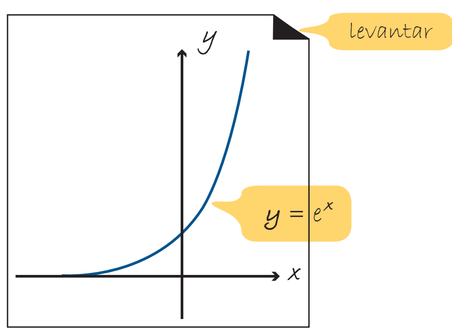


Podemos visualizar el aspecto que tendrá la gráfica correspondiente al logaritmo natural si realizamos la secuencia de eventos geométricos que te proponemos enseguida. Estos eventos los hemos pensado con el propósito de ver la misma gráfica de $y = e^x$ de tal forma que el eje y tome la posición del eje x, y el eje x tome la posición del eje y.

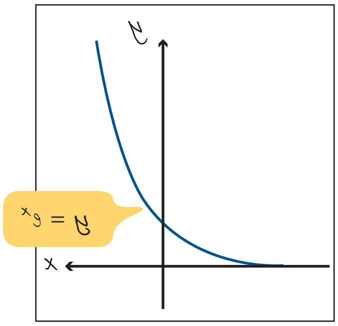
Lo comprobarás al realizarlo físicamente. Para eso necesitas calcar la gráfica anterior en un pequeño pedazo de papel.



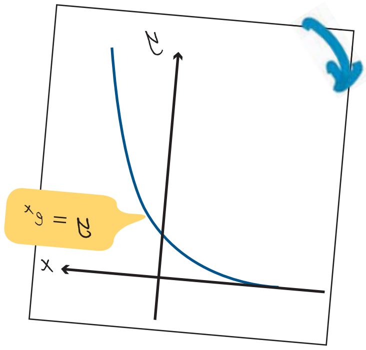
Imaginemos que hemos copiado esta gráfica en una hoja transparente o en un acetato que colocamos encima de esta página. Después, levantamos el acetato y lo volteamos de modo que lo podamos ver “por atrás”.



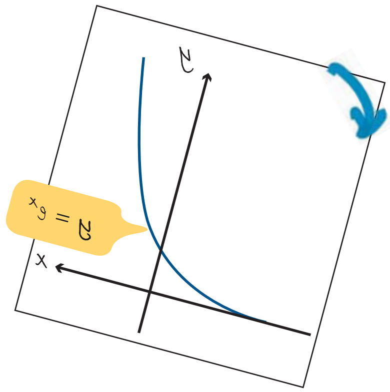
Una vez que lo estamos viendo "por atrás", lo colocamos de nuevo sobre la página observando cómo las letras están al revés.



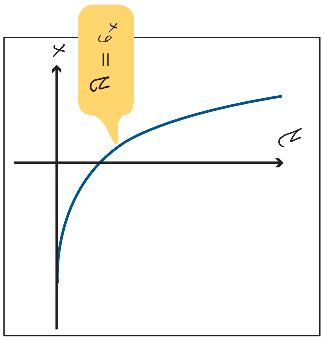
Ahora vamos a girar el acetato "a favor de las manecillas del reloj" y permaneciendo sobre la página.



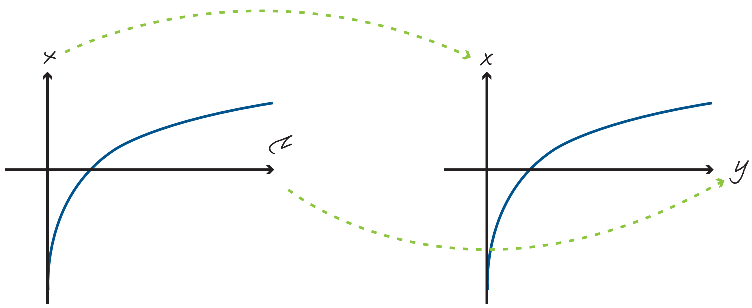
Realicemos este giro o rotación hasta que logremos que la flecha del eje x quede apuntando hacia arriba y la flecha del eje y quede apuntando hacia la derecha.



Esta última gráfica que obtuvimos corresponde a la gráfica que buscamos, con el eje x ahora en la posición que tradicionalmente tiene el eje y y a su vez, el eje y en la posición en que tradicionalmente se tiene el eje x.



Sólo nos hace falta "retocarla" un poco desde este frente:



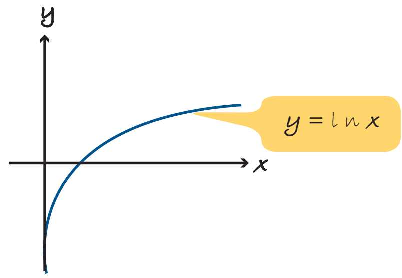
Lo que hemos hecho nos permite visualizar a la variable x "despejada", en el sentido de que logramos colocar la variable x en el eje vertical (apuntando hacia arriba) y la variable y en el eje horizontal (apuntando hacia la derecha).

La representación algebraica, una vez que realizamos la secuencia de eventos geométricos, sigue expresando $y = e^x$ aunque también ya sabemos que eso equivale a expresar $\ln y = x$; esto es, la expresión $x = \ln y$ corresponde con la misma gráfica pero vista desde esta nueva perspectiva.

Lo que nos está haciendo falta es regresar a la tradicional notación donde y representa la magnitud o variable dependiente, y x representa a la magnitud de la que depende, o variable independiente.

Si renombramos los ejes en la última gráfica podremos identificar la "nueva" forma gráfica y su "fórmula", correspondiente a la función logaritmo natural.

Si en tu calculadora pides $\ln(-1)$ y no te marca error... ¡puede que sí sirva!



Por tanto, concluimos que la gráfica anterior corresponde a la función logaritmo natural

$$y = f(x) = \ln x$$

y a la vez esto equivale a expresar $x = e^y$.

Tal vez conoce los valores imaginarios de la función $\ln z$ de variable compleja.

$\ln(-1) = \ln|-1| + i(\pi) = \pi i$

Se observa que la variable x toma valores estrictamente positivos, mientras que la variable y toma todos los valores reales. Esto es, el dominio es $(0, +\infty)$ mientras que la imagen cubre todos los números reales, $(-\infty, +\infty)$.

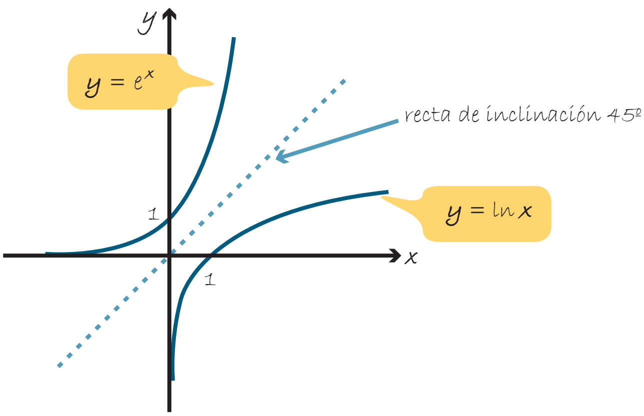
Esperaríamos que una calculadora científica común marque error al solicitarle el logaritmo natural de un número negativo... ¿lo hace la tuya? Además, la gráfica informa que el logaritmo de un número entre 0 y 1 es negativo y el de números mayores a 1 es positivo... en particular, $\ln e = 1$.

Es conveniente que puedas reconocer en un mismo sistema coordenado a las gráficas de ambas funciones

$$y = e^x \quad \text{y} \quad y = \ln x\,.$$

Observa con atención la figura siguiente para notar que la secuencia de efectos geométricos realizada nos ha llevado a obtener una nueva gráfica que guarda cierta simetría con respecto a la gráfica original.

El eje de simetría es la recta $y = x$ que pasa por el origen y tiene una inclinación de $45°$.



Recuerda...

$e^0 = 1$ $\qquad \ln 1 = 0$

$\ln 0$ no existe

$e^1 = e$ $\qquad \ln e = 1$

La función logaritmo natural

$$y = f(x) = \ln x$$

Es la inversa de la función exponencial natural $y = e^x$ en el sentido que lo expresan los dos hechos siguientes:

$$\ln e^x = x \qquad\qquad e^{\ln x} = x$$

El Dominio de la función logaritmo natural es la Imagen de la función exponencial natural, esto es, los números positivos exclusivamente, $(0, +\infty)$.

La gráfica de la función tiene en el eje y una asíntota vertical.

La Imagen de la función logaritmo natural es el Dominio de la función exponencial natural, esto es, todos los números reales, $(-\infty, +\infty)$.

Las propiedades de esta función son un reflejo de que los logaritmos son exponentes, por eso se heredan de las propiedades de los exponentes:

$$\ln xy = \ln x + \ln y \qquad\qquad e^a e^b = e^{a+b}$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \qquad\qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$\ln x^y = y \ln x \qquad\qquad \left(e^a\right)^b = e^{ab}$$

Problema 1

El Álgebra con logaritmos exige el manejo fluido de sus propiedades:

$$\ln e^{x} = x \qquad e^{\ln x} = x$$

$$\ln xy = \ln x + \ln y \qquad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \qquad \ln x^{y} = y \ln x$$

En expresiones matemáticas donde aparece la variable en el exponente, tomar el logaritmo en ambos lados de la igualdad es una acción "equivalente" a la que se realiza cuando se divide entre un mismo número en ambos lados de la igualdad. En las siguientes ecuaciones practicaremos con el álgebra de logaritmos para despejar la variable x.

1. $e^{2x-1} = 3$
2. $3e^{1-2x} = 7$
3. $2^{\frac{x}{3}+1} - 5 = 0$
4. $4\left(3^{\frac{x}{2}-2}\right) - 1 = 0$
5. $y = 2^{\frac{x}{3}+1}$
6. $e^{1-2x} = y$
7. $y = \ln\left(x^{2} + 1\right)$
9. $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
10. $y = \ln \dfrac{1+x^{2}}{1+x}$
11. $y = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$$e^{2} e^{3} = (e\,e)(e\,e\,e)$$
$$= e\,e\,e\,e\,e$$
$$= e^{5} = e^{2+3}$$
$$\boxed{e^{a} e^{b} = e^{a+b}} \checkmark$$

1. En $e^{2x-1} = 3$ aplicamos $\ln$ en ambos lados:

$$\ln e^{2x-1} = \ln 3 \qquad 2x - 1 = \ln 3 \qquad 2x = 1 + \ln 3$$

$$x = \frac{1 + \ln 3}{2}$$ ¡x despejada!

2. En $3e^{1-2x} = 7$ podemos primero aislar la expresión exponencial:

$$e^{1-2x} = \frac{7}{3}$$

y ahora aplicamos $\ln$ en ambos lados

$$\ln e^{1-2x} = \ln \frac{7}{3} \qquad 1 - 2x = \ln \frac{7}{3} \qquad 1 - \ln \frac{7}{3} = 2x$$

$$x = \frac{1 - \ln \frac{7}{3}}{2} = \frac{1 - (\ln 7 - \ln 3)}{2} = \frac{1 - \ln 7 + \ln 3}{2}$$ ¡x despejada!

Nota: Si no hubiésemos despejado primero la expresión exponencial y aplicamos directamente $\ln$ en ambos lados, sólo debemos tener la precaución de aplicar la propiedad del logaritmo de un producto.

$$\ln 3e^{1-2x} = \ln 7 \qquad \ln 3 + \ln e^{1-2x} = \ln 7$$

$$\ln e^{1-2x} = \ln 7 - \ln 3 \qquad 1 - 2x = \ln 7 - \ln 3$$

y de ahí obtenemos el mismo valor de x ya obtenido.

$$e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$$
$$xy = e^{\ln x + \ln y}$$
$$\ln xy = \ln e^{\ln x + \ln y}$$
$$\boxed{\ln xy = \ln x + \ln y} \checkmark$$

3. En $2^{\frac{x}{3}+1}-5=0$ despejamos la expresión exponencial: $2^{\frac{x}{3}+1}=5$

y ahora aplicamos $\ln$ en ambos lados: $\ln 2^{\frac{x}{3}+1}=\ln 5$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$\left(\frac{x}{3}+1\right)\ln 2=\ln 5 \qquad \frac{x}{3}+1=\frac{\ln 5}{\ln 2} \qquad \frac{x}{3}=\frac{\ln 5}{\ln 2}-1$$

$x=3\left(\frac{\ln 5}{\ln 2}-1\right)=3\frac{\ln 5}{\ln 2}-3$ ¡x despejada!

4. En $4\left(3^{\frac{x}{2}-2}\right)-1=0$ despejamos la expresión exponencial: $3^{\frac{x}{2}-2}=\frac{1}{4}$

y aplicamos $\ln$ en ambos lados: $\ln 3^{\frac{x}{2}-2}=\ln\frac{1}{4}$

Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$$\left(\frac{x}{2}-2\right)\ln 3=\ln\frac{1}{4} \qquad \left(\frac{x}{2}-2\right)\ln 3=\ln 1-\ln 4$$

$$\left(\frac{x}{2}-2\right)\ln 3=-\ln 4 \qquad \frac{x}{2}-2=\frac{-\ln 4}{\ln 3}$$

$x=2\left(2-\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)$ ¡x despejada! $\frac{x}{2}-2=-\frac{\ln 4}{\ln 3}$

5. En $y=2^{\frac{x}{3}+1}$ aplicamos $\ln$ en ambos lados: $\ln y=\ln 2^{\frac{x}{3}+1}$

y aplicamos propiedades de los logaritmos:

$$\ln y=\left(\frac{x}{3}+1\right)\ln 2 \qquad \frac{x}{3}+1=\frac{\ln y}{\ln 2}$$

$\frac{x}{3}=\frac{\ln y}{\ln 2}-1 \qquad x=3\left(\frac{\ln y}{\ln 2}-1\right)$ ¡x despejada!

6. En $e^{1-2x}=y$ aplicamos directamente $\ln$ en ambos lados:

$$\ln e^{1-2x}=\ln y \qquad 1-2x=\ln y$$

$2x=1-\ln y \qquad x=\frac{1}{2}(1-\ln y)$ ¡x despejada!

$\ln\frac{5}{3}=\ln 5-\ln 3$

$\frac{\ln 5}{\ln 3}$ **no es** $\ln 5-\ln 3$

y **tampoco** $\ln\frac{5}{3}$

$\ln 5x=\ln 5+\ln x$

$\ln 5x$ **no es** $5\ln x$

y **tampoco** $\ln 5\ln x$

7. En $y = \ln(x^2 + 1)$ aplicamos ahora exponencial en ambos lados:

$$e^y = e^{\ln(x^2+1)} \qquad e^y = x^2 + 1 \qquad x^2 = e^y - 1 \qquad x = \pm\sqrt{e^y - 1}$$

¡x despejada!

8. En $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ aplicamos exponencial para simplificar:

$$e^y = e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{1+x}{1-x} \qquad e^y(1-x) = 1 + x \qquad e^y - e^y x = 1 + x$$

Reunimos términos con x de un lado de la igualdad:

$$x + e^y x = e^y - 1 \qquad x(1 + e^y) = e^y - 1 \qquad x = \frac{e^y - 1}{1 + e^y}$$

¡x despejada!

$$(e^2)^3 = (e^2)(e^2)(e^2)$$
$$= eeeeee$$
$$= e^6 = e^{2(3)}$$
$$\boxed{(e^a)^b = e^{ab}} ✓$$

9. En $y = \ln\frac{1+x^2}{1+x}$ aplicamos exponencial y simplificamos

$$e^y = e^{\ln\frac{1+x^2}{1+x}} = \frac{1+x^2}{1+x} \qquad (1+x)e^y = 1 + x^2$$

$$e^y + xe^y = 1 + x^2 \qquad x^2 - xe^y + 1 - e^y = 0$$

Reconocemos en la expresión anterior una ecuación cuadrática de x con coeficientes $a = 1$, $b = -e^y$ y $c = 1 - e^y$. Luego usando la formula general:

$$x = \frac{-(-e^y) \pm \sqrt{(-e^y)^2 - 4(1)(1 - e^y)}}{2(1)} = \frac{e^y \pm \sqrt{e^{2y} - 4 + 4e^y}}{2}$$

$$x = \frac{e^y \pm \sqrt{e^{2y} + 4e^y - 4}}{2}$$ ¡x despejada!

$$(e^{\ln x})^y = e^{y\ln x}$$
$$x^y = e^{y\ln x}$$
$$\ln x^y = \ln e^{y\ln x}$$
$$\boxed{\ln x^y = y\ln x} ✓$$

10. En $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ trabajaremos primero algebraicamente la expresión

$$2y = e^x + e^{-x} = e^x + \frac{1}{e^x}$$

obtenemos un común denominador

$$2y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \qquad \text{luego} \qquad 2ye^x = e^{2x} + 1$$

Finalmente obtenemos $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$ donde reconocemos una ecuación cuadrática pero ahora la variable es e^x

$$(e^x)^2 - 2y(e^x) + 1 = 0$$

Identificamos los coeficientes $a = 1$, $b = -2y$ y $c = 1$. Usamos la fórmula general:

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2 - 1)}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Aplicamos $\ln$ en ambos lados:

$$\ln e^x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right) \qquad x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$$ ¡x despejada!

Problema 2

En el contexto del crecimiento poblacional hemos considerado expresiones que involucran potencias del número de Euler en las cuales resulta importante despejar el exponente para dar respuesta al cálculo del tiempo en que la población cumple con determinada condición. En situaciones como ésta, el logaritmo natural y sus propiedades funcionan como una herramienta algebraica para lograr el despeje requerido y así dar respuesta a las cuestiones planteadas.

1. Consideremos que una colonia de bacterias crece según el modelo exponencial $y(t) = y_0 e^{kt}$ donde $y(t)$ está dada en gramos y t en horas.

Calculamos los valores del tiempo en que la colonia se ha duplicado, triplicado, cuadruplicado… hasta reconocer una expresión general.

La cantidad inicial es $y(0) = y_0 e^{k(0)} = y_0 e^0 = y_0$ *gramos.*

Duplicarle significa que $y(t) = 2y_0$ *igualamos a esto para obtener* t:

$2y_0 = y_0 e^{kt}$ *dividiendo entre* $y_0 \neq 0$

$2 = e^{kt}$ *aplicando* $\ln$ *en ambos lados*

$\ln 2 = \ln e^{kt}$ *y por propiedad*

$\ln 2 = kt$ *y* $\dfrac{\ln 2}{k} = t$

En $t = \dfrac{\ln 2}{k}$ *horas es el tiempo en que se duplica.*

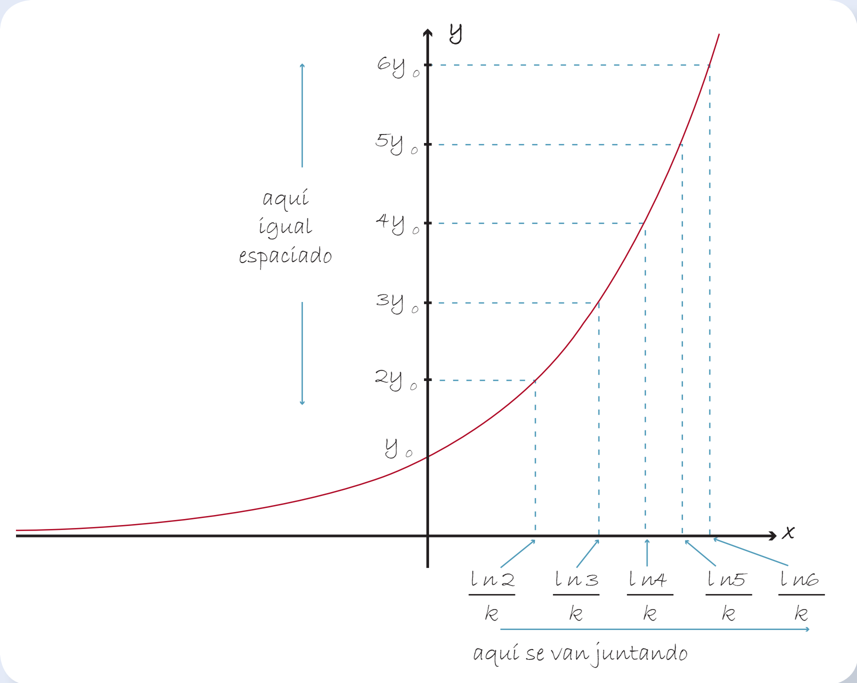
Si la cantidad se triplica, tendríamos $y(t) = 3y_0$ *luego*

$$3y_0 = y_0 e^{kt} \qquad 3 = e^{kt} \qquad \ln 3 = \ln e^{kt} = kt \qquad \frac{\ln 3}{k} = t$$

En $t = \dfrac{\ln 3}{k}$ horas es el tiempo en que se triplica.

Es fácil reconocer el patrón de comportamiento que se genera, de modo que el tiempo en que la población es 4 veces la población inicial es $t = \frac{\ln 4}{k}$, y para que sea 5 veces la inicial el tiempo es $t = \frac{\ln 5}{k}$.

Gráficamente estamos encontrando valores de t en el eje horizontal cuyas alturas mediante $y(t) = y_0 e^{kt}$ están igualmente espaciadas:



2. Un modelo más realista para el crecimiento de una población de peces admite cierta retroalimentación negativa.

Consideremos que la población se modela con la función

$$y(t) = \frac{40e^{kt}}{4 + e^{kt}}$$

donde t se mide en meses y y en cientos de peces.

Calcularemos el tiempo en que la población se duplica, triplica, etc.

La población inicial debe corresponder con $y(0)$ la calculamos

$$y(0) = \frac{40e^{k(0)}}{4 + e^{k(0)}} = \frac{40e^0}{4 + e^0} = \frac{40(1)}{4+1} = \frac{40}{5} = 8$$

Originalmente se tienen 800 peces.

Para que la población se duplique debe alcanzar el valor 16, así que igualamos a ese valor $y(t)$

$$16 = \frac{40e^{kt}}{4+e^{kt}} \qquad \text{luego} \qquad 16\left(4+e^{kt}\right) = 40e^{kt}$$

de donde, dividiendo entre 8 obtenemos

$$2\left(4+e^{kt}\right) = 5e^{kt} \qquad 8+2e^{kt} = 5e^{kt} \qquad 8 = 5e^{kt} - 2e^{kt} = 3e^{kt}$$

luego $\frac{8}{3} = e^{kt}$ *y aplicamos* $\ln$: $\ln\frac{8}{3} = \ln e^{kt} = kt$

Por tanto, en $t = \frac{1}{k}\ln\frac{8}{3}$ *se duplica la población.*

Consideremos ahora que se triplique la población, de modo que $y(t) = 24$

$$24 = \frac{40e^{kt}}{4+e^{kt}} \qquad \textit{luego} \qquad 24\left(4+e^{kt}\right) = 40e^{kt}$$

dividiendo entre 8 obtenemos

$$3\left(4+e^{kt}\right) = 5e^{kt} \qquad 12+3e^{kt} = 5e^{kt}$$

luego $12 = 2e^{kt}$ $\qquad 6 = e^{kt}$ $\qquad \ln 6 = \ln e^{kt} = kt$

Por tanto, en $t = \frac{1}{k}\ln 6$ *se triplica.*

Y para que se multiplique por cuatro la población:

$$32 = \frac{40e^{kt}}{4+e^{kt}} \qquad 4\left(4+e^{kt}\right) = 5e^{kt} \qquad 16 = e^{kt} \qquad t = \frac{1}{k}\ln 16$$

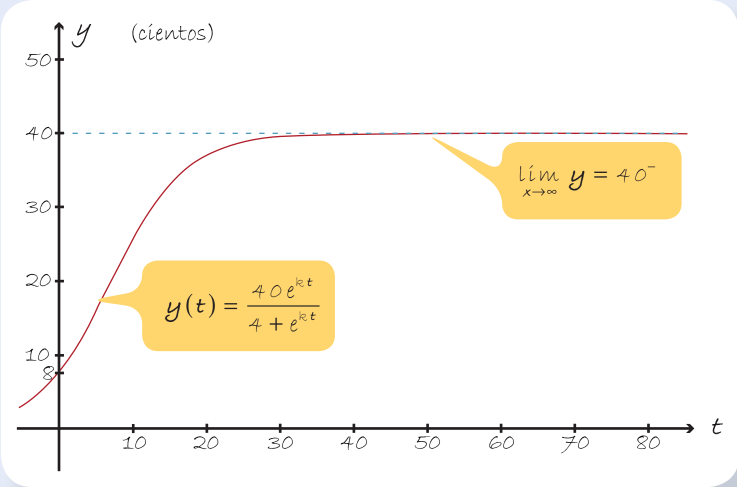
¿Observas algún patrón de comportamiento en las expresiones obtenidas?

Consideremos que la población original se multiplica por 5:

$$40 = \frac{40e^{kt}}{4+e^{kt}} \qquad 4+e^{kt} = e^{kt} \qquad ¿4 = 0?$$

Al parecer, la población nunca llegará a ser 5 veces la población original.

3. Grafica la función $y(t) = \frac{40e^{kt}}{4+e^{kt}}$ para el valor k positivo que gustes utilizando un software de graficación y argumenta cuál es el comportamiento que se observará en la población de peces "a la larga" modelada con esta función.



La gráfica la hicimos considerando distintos valores de k *positivos y observamos el mismo comportamiento que decidimos mostrar tomando* $k = 0.2$.

Se observa que la población llega prácticamente a 5 *veces la original, es decir* 40 *(cientos) de peces, valor que constituye una asíntota horizontal de la gráfica.*

En general, el comportamiento que obedece al modelo

$$y(t) = \frac{Ae^{kt}}{B+e^{kt}} \quad \text{con} \quad k > 0$$

representa un crecimiento que tiende a estabilizarse en un valor numérico... ¿cuál?... el que podemos representar mediante

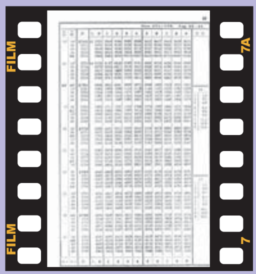
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{Ae^{kt}}{B+e^{kt}} = A$$

Este límite debe ser A *porque en nuestro modelo particular tenemos* $A = 40$ *y la gráfica mostró su asíntota horizontal ahí. Sin embargo, vale la pena ampliar la estrategia de calcular límites al infinito de cocientes de expresiones donde consideramos el término que "domina" a los valores en numerador y denominador lo ilustramos así:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Ae^{kt}}{B+e^{kt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{Ae^{kt}}{e^{kt}} = \lim_{t\to\infty} A = A$$

domina

¿Sabías que?...



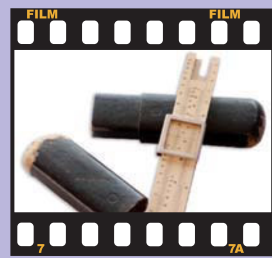
Antes de la aparición de las computadoras, las tablas de valores y las reglas de cálculo eran los instrumentos que permitían hacer los cálculos aritméticos con mayor rapidez.

Al inicio los logaritmos eran importantes porque

$$\ln xy = \ln x + \ln y\,,$$

y de esta forma, la multiplicación de xy se simplifica al convertirla en una suma del logaritmo de los números por multiplicar; finalmente se encuentra el número cuyo logaritmo es igual a esa suma, es decir, se calcula el antilogaritmo.

Los matemáticos construyeron tablas de logaritmos que fueron empleadas en los cálculos científicos desde el Siglo XVII hasta mediados del Siglo XX. El instrumento tipo regla que utilizaba una escala doblemente logarítmica se inventó y reinventó en varias ocasiones por su agilidad para realizar operaciones aritméticas incluso de potenciación y extracción de raíces. Esas tablas de valores y reglas de cálculo formaban parte de los "útiles universitarios" hasta en los años 60-70 del siglo pasado. Pero en 1960 la utilidad de estos instrumentos se vio rebasada por la agilidad y precisión de las calculadoras y computadoras electrónicas…para 1980 cesó prácticamente la producción de reglas de cálculo.



Los logaritmos siguen siendo parte fundamental en la modelación de diferentes eventos que ocurren en la realidad cotidiana; y siendo justos, no es esa la única razón que justifica su lugar en la Matemática. La utilidad de los logaritmos ya fue suficientemente justificada al haber posibilitado el avance de la ciencia en un largo periodo de su desarrollo.

Aunque ciertamente resulta difícil de imaginar, piensa en el tiempo que consumen los cálculos científicos usando lápiz y papel…gracias a los logaritmos este tiempo fue minimizado permitiendo a los matemáticos ver más allá del sólo cálculo aritmético, logrando desarrollar y a la vez sintetizar ideas y construir teorías.

Problema 3

Cuando se tienen datos de una magnitud en un rango muy amplio de la recta numérica, conviene trabajar con los logaritmos de esos valores porque ofrecen un medio de visualización de los datos al graficarse, dado que el logaritmo "junta" los datos a un rango más manejable.

Supongamos datos que satisfacen los modelos matemáticos

$$y(x) = y_0 e^{kx} \qquad \text{con} \qquad k \neq 0$$

$$y(x) = k\,x^n \qquad \text{con} \qquad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0$$

Aplicando logaritmos vamos a transformar estas expresiones para visualizar el comportamiento en una nueva escala, una **escala logarítmica**.

Para el primer modelo

$$y = y_0\, e^{kx}$$

aplicamos $\ln$ *en ambos lados de la igualdad y usamos propiedades del logaritmo:*

$$\ln y = \ln y_0 e^{kx}$$

$$\ln y = \ln y_0 + \ln e^{kx}$$

$$\ln y = \ln y_0 + kx$$

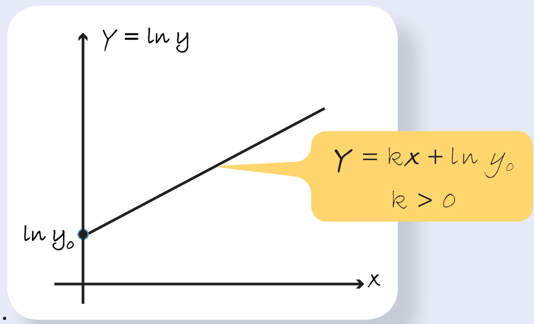
$$\ln y = kx + \ln y_0$$

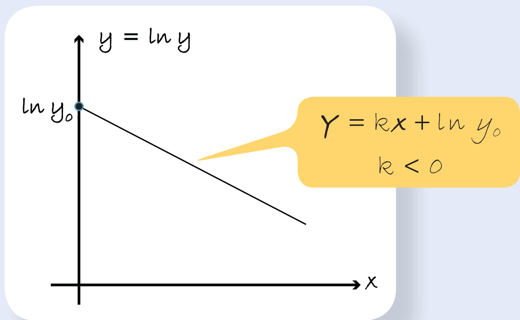
La expresión que hemos obtenido es una expresión lineal en la variable x*. Si llamamos* $Y = \ln y$

entontces, al sustituir tenemos $$Y = kx + \ln y_0$$

Podemos reconocer que se trata de una recta de pendiente k en el sistema coordenado x, Y donde $Y = \ln y$.

De este modo, si en lugar de graficar x con su respectivo y, graficamos x con el **logaritmo natural** de y, obtenemos a los puntos manifestando un comportamiento de recta: su pendiente es k y su corte con el eje vertical es $\ln y_0$.





Esta técnica permite modelar el comportamiento exponencial de valores numéricos positivos al "ajustar" a una recta el comportamiento del logaritmo natural de esos valores. La pendiente observada será el parámetro k en el modelo

$$y(x) = y_0 e^{kx}$$

Por otro lado, para el segundo modelo

$$y = k\,x^n \qquad n \neq 0$$

aplicamos $\ln$ en ambos lados de la igualdad y usamos propiedades:

$$\ln y = \ln k\,x^n$$

$$\ln y = \ln k + \ln x^n$$

$$\ln y = \ln k + n \ln x$$

$$\ln y = n \ln x + \ln k$$

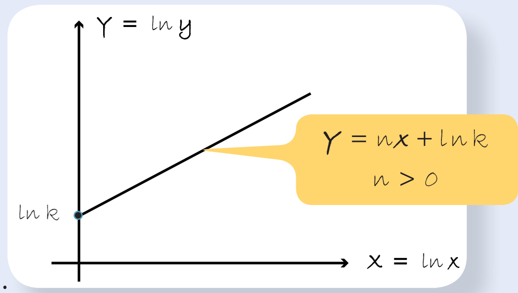
Nuevamente en esta expresión se puede observar un comportamiento de línea recta; es una función lineal para

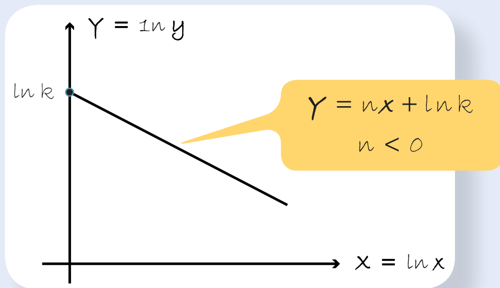
$$Y = \ln y \qquad \text{y} \qquad X = \ln x$$

De este modo al sustituir Y y X en la expresión obtenida tenemos

$$Y = nX + \ln k$$

la cual representa la recta de pendiente n y corte con el eje vertical $\ln k$.





Esta técnica de graficar $\ln x$ contra $\ln y$ permite tomar la decisión de modelar el comportamiento de valores numéricos positivos con una función potencia general cuando los puntos graficados se observan en una recta. El modelo $y(x) = kx^n$ se propone en ese caso, donde el valor del exponente n es la pendiente de la recta a la que se "ajustan" los datos de $\ln x$ y $\ln y$ y el valor de k es tal que $\ln k$ es el corte con el eje vertical de la recta.

Función exponencial con base arbitraria

En el Tema 1.6 tuvimos oportunidad de familiarizarnos con funciones exponenciales de la forma $y = e^{kt}$ toca ahora analizar su relación con expresiones del tipo $y = a^t$ donde a representa una constante que se determina por el contexto particular de la situación de donde surge este modelo.

Esta situación se encuentra relacionada con el tipo de variación que se propuso inicialmente en el crecimiento poblacional. Por ejemplo, consideremos que una colonia de bacterias duplica su tamaño cada día, y que actualmente se tiene una onza de bacterias (1 onza es aproximadamente 28.75 gramos).

La siguiente tabla refiere la cantidad y de bacterias (en onzas) al transcurrir el tiempo t (medido en días).

t (días)	y (onzas)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

De ella podemos inferir que la función $y = f(t) = 2^t$ puede modelar el comportamiento del crecimiento de bacterias.

La función $y = f(t) = 2^t$ es un ejemplo particular de la familia de funciones cuya representación algebraica es:

$$y = a^t \text{ donde } a \text{ es una constante positiva.}$$

Es importante constatar que estas funciones corresponden con las funciones exponenciales $y = e^{kt}$ con k igual a una constante; en efecto, basta escribir a la variable y como:

$$y = \left(e^k\right)^t$$

y tomar la constante a como $a = e^k$ y así obtenemos

$$y = \left(e^k\right)^t = a^t$$

O bien, si partimos de $y = a^t$ y usamos el hecho

$$a = e^{\ln a}$$

podemos escribir

$$y = a^t = \left(e^{\ln a}\right)^t = e^{(\ln a)t} = e^k$$

donde $k = \ln a$ logaritmo que está bien definido por ser el número $a > 0$.

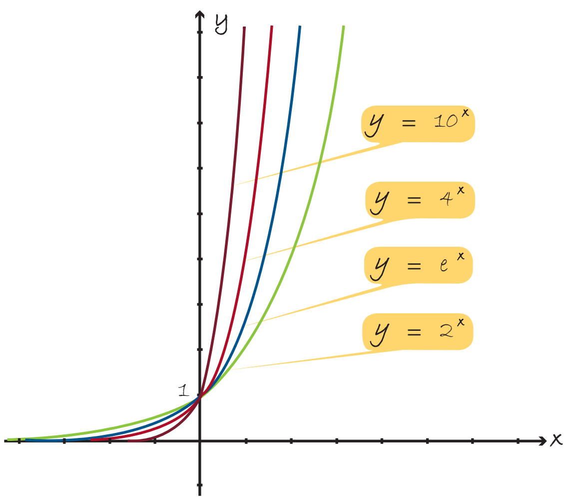
Analicemos gráficamente este modelo exponencial general utilizando la igualdad

$$a^x = e^{kx}$$

donde $k = \ln a$, o lo que es lo mismo, donde $e^k = a$.

Como ya hemos observado con anterioridad, el valor del parámetro k provoca cambios en la gráfica de $y = e^{kx}$ los cuales analizaremos relacionándolos ahora con los de la correspondiente a $y = a^x$.

La gráfica de $y = f(x) = a^x$ cuando $a > 1$ corresponde con una función $y = e^{kx}$ con $e^k = a > 1$ (es decir, $k > 0$). Usamos un software de graficación para visualizar distintos valores de la base a.



Observemos que se trata de funciones crecientes, con concavidad hacia arriba. Todas cruzan el eje vertical a la altura 1, recordando que todo número (no cero) a la potencia 0 es igual a 1. Tienen una asíntota horizontal en el eje x que se expresa en el límite

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

siendo $a > 1$ además

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty.$$

Para la gráfica de $y = f(x) = a^x$ cuando $0 < a < 1$ al igualar con $y = e^{kx}$ consideramos que $k < 0$ pues $a = e^k$ y así se logra que a sea menor a 1.

Ejemplificamos de nuevo, con ayuda de un software de graficación, el comportamiento correspondiente a diferentes valores numéricos para la base a, con $0 < a < 1$.

¡TOMA NOTA!

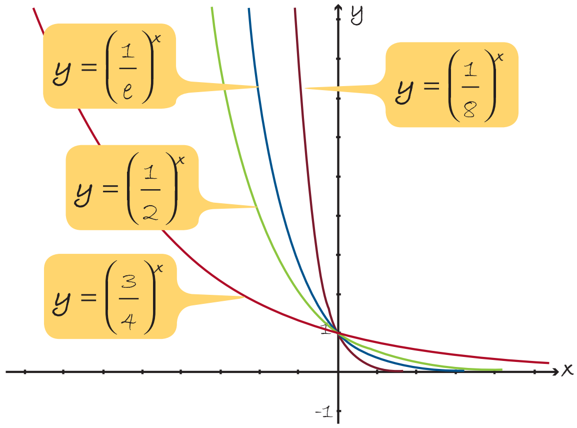
La ecuación
$2^x = -5$
no tiene solución,
porque $2^x > 0$
¡siempre!

¡TOMA NOTA!

La ecuación
$10^x = 0$
no tiene solución,
porque $10^x > 0$
¡siempre!

¡TOMA NOTA!

La solución de la desigualdad
$2^x \geq 0$
son todos los
números reales,
porque $2^x > 0$
en todos ellos



Observa en las funciones anteriores que podemos utilizar las reglas de los exponentes y escribir:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x = \frac{1}{8^x} = 8^{-x} \qquad \left(\frac{1}{e}\right)^x = \frac{1}{e^x} = e^{-x} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

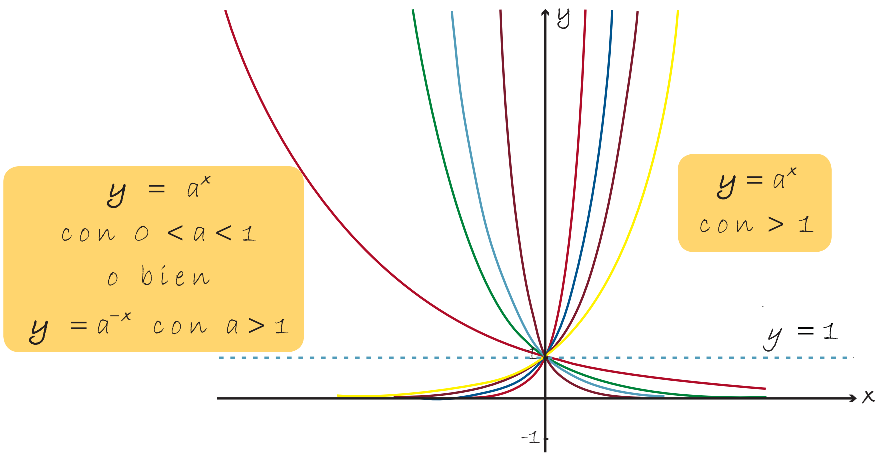
De este modo, es posible identificar a toda función de la forma $y = a^x$ donde $0 < a < 1$ con una función exponencial cuya base sea mayor que 1, pero cuyo exponente esté afectado por un signo negativo.

Tal es el caso de la función:

$$y = \left(\frac{1}{8}\right)^x = 8^{-x}$$

la cual es una función del tipo $y = a^x$ con $0 < a = \frac{1}{8} < 1$ pero a su vez, es una función del tipo $y = a^{-x}$ con $a = 8 > 1$

De este modo, podemos identificar en forma general, el comportamiento gráfico de las funciones exponenciales de diferente base como lo expresamos en la siguiente figura:



Antes hablamos de la función exponencial natural $y = e^x$ y de su inversa, la función logaritmo natural, $y = \ln x$ Ahora que hemos generalizado a la función exponencial de base a, podemos hablar también de la función logaritmo en base a .

Las expresiones

$$y = a^x \qquad x = \log_a y$$

dicen exactamente lo mismo:

x es el exponente al que se eleva el número positivo a para obtener y.

exponente

$y = a^x$

y se obtiene al que elevo

para obtener

$x = \log_a y$

el exponente al que elevo

Un logaritmo ampliamente utilizado por razón de nuestro sistema métrico decimal es $\log_{10} x$ con él uno puede reconocer la causa por la que originalmente se motivó la invención de los logaritmos, una causa de índole aritmética.

Como los logaritmos son exponentes, piensa lo familiar que resulta para nosotros que

$$10^3\ 10^8 = 10^{11}$$

Al realizar la multiplicación indicada los exponentes se suman

$$3 + 8 = 11$$

es más fácil sumar que multiplicar, sobre todo si te ubicas en los tiempos en que la calculadora no formaba parte de nuestras herramientas matemáticas cotidianas. También en este contexto resulta más fácil restar que dividir; y por supuesto, es más fácil multiplicar que elevar a una potencia.

Puedes pensar en eso cuando recuerdas las propiedades de los logaritmos, que nos recuerdan lo que podemos hacer con los exponentes:

¡TOMA NOTA!

Los logaritmos... ¡son exponentes!

$10^0 = 1$	$0 = \log_{10} 1$
$10^1 = 10$	$1 = \log_{10} 10$
$10^2 = 100$	$2 = \log_{10} 100$
$10^3 = 1000$	$3 = \log_{10} 1000$
$10^4 = 10000$	$4 = \log_{10} 10000$

acá se multiplican números. . .	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	. . .acá se suman logaritmos
acá se dividen números. . .	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	. . . acá se restan logaritmos
acá se eleva número a potencia. . .	$\log_a x^y = y \log_a x$	. . . acá se multiplica número y logaritmo

El logaritmo natural es el que corresponde a la base e, el número de Euler, esto es:

$$y = \ln x = \log_e x$$

Puedes encontrar que algunas calculadoras usan la expresión

$$y = \log x$$

para el logaritmo natural, algunas para el logaritmo base 10, pero siempre podrás comprobar a cuál se refiere la tuya porque si oprimes esa tecla para evaluar $\log 10$ y te da 1, efectivamente, es el logarítmo base 10.

Todo lo que haya que decir de $y = \log_a x$ está dicho con $y = \ln x$ el principal. Esto será un hecho contundente cuando expresemos la relación entre estos dos logaritmos. Lo haremos enseguida realizando una simplificación algebraica al calcular el logaritmo natural en ambos lados de la expresión

$$y = a^x$$

que nos dice que $\quad x = \log_a y$

Aplicando $\ln$: $\quad y = a^x$

$$\ln y = \ln a^x$$

Aplicando propiedad del logaritmo:

$$\ln y = x \ln a$$

Despejando x:

$$x = \frac{\ln y}{\ln a}$$

que, por otra parte, sabemos desde el principio que es igual a $x = \log_a y$.

Como acostumbramos llamar x a la variable independiente y y a la dependiente, cambiamos los nombres de las variables en las últimas dos expresiones y escribimos

$$y = \frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x$$

La expresión

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

nos relaciona cualquier tipo de logaritmo con el "principal", el logaritmo natural; como vemos, todo logaritmo es simplemente un múltiplo de $\ln x$.

Las funciones exponencial base $a > 0$ y logaritmo base $a > 0$ están relacionadas con la función exponencial natural y logaritmo natural (base e) de la siguiente manera:

$$y = f(x) = a^x = e^{(\ln a).}$$

$$y = f(x) = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln ,$$

El dominio de la primera función, la exponencial, son todos los números reales, pero su imagen sólo incluye los números positivos, y en consecuencia, con la relación inversa que mantienen, el dominio de la segunda función, el logaritmo, son sólo los números reales positivos, mientras que sean imágenes son todos los números reales.

Aplicación. La función logaritmo en contextos reales.

Caso 1. La **ley del enfriamiento de Newton** establece que la razón de cambio con la que baja la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia que hay entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio ambiente en el que se encuentra. Un modelo matemático que cumple con esta "ecuación diferencial" es

$$y(t) = y_a + (y_o - y_a)a^t \qquad \text{con} \qquad 0 < a < 1$$

donde la temperatura del medio ambiente la representamos con y_a la temperatura inicial del objeto con y_o

Diferentes contextos reales pueden ser modelados con esta expresión, donde interesará además "despejar" el tiempo para precisar momentos importantes de la situación. Utilizaremos nuestros conocimientos en las siguientes situaciones.

1) Una taza con café se calienta hasta alcanzar una temperatura de $80°$ C. Enseguida se expone al medio ambiente que se encuentra a una temperatura de $20°$ C. El modelo exponencial para la temperatura está dado por

$$y(t) = 20 + 60(0.94)^t$$

donde t se mide en minutos. ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que el café se encuentre en 42 grados?

Igualamos la temperatura a $42°$ C:

$$42 = 20 + 60(0.94)^t$$

$$22 = 60(0.94)^t$$

$$\frac{11}{30} = (0.94)^t$$

Aquí tenemos la opción de despejar

$$t = \log_{0.94}\frac{11}{30}$$

y usar una calculadora científica con ese logaritmo, o bien, podemos trabajar con el logaritmo natural aplicando este en ambos lados de la igualdad

$$\ln\left(\frac{11}{30}\right) = \ln(0.94)^t$$

$$\ln 11 - \ln 30 = t \ln 0.94$$

$$t = \frac{\ln 11 - \ln 30}{\ln 0.94} \approx 16.215 \quad \textit{minutos.}$$

2) Cuando una persona muere deja de producir calor y la temperatura que el metabolismo asegura estar en $36°$ C mientras vivía, comienza a disminuir. Supongamos que se encuentra el cuerpo de una persona sin vida a las 8 de la mañana en su casa. Se toma su temperatura alcanzando los $29°$ C y la temperatura del cuarto es $20°$ C. El modelo para el comportamiento de la temperatura esta dado por

$$y(t) = 20 + 16(0.594)^t$$

donde t se mide en horas. En base a ese modelo... ¿a qué hora murió?

Debemos igualar la temperatura a los $29°$ C y encontrar el valor de t:

$$29 = 20 + 16(0.594)^t$$

$$\frac{9}{16} = (0.594)^t$$

Podemos calcular

$$t = \log_{0.594} \frac{9}{16}$$

o bien, aplicar logaritmo natural:

$$\ln\left(\frac{9}{16}\right) = \ln(0.594)^t$$

$$\ln 9 - \ln 16 = t \ln 0.594$$

$$t = \frac{\ln 9 - \ln 16}{\ln 0.594} \approx 1.105 \text{ horas}$$

esto equivale a 66 y medio minutos aproximadamente.

Habían pasado prácticamente 66 minutos y medio; por tanto, la persona falleció a las 6 de la mañana con 53 minutos y medio.

Caso 2. Los **materiales se desintegran** de tal manera que la razón de cambio con la que su masa decrece es proporcional a la cantidad de masa presente. El modelo matemático que expresa este comportamiento es del tipo

$$y(t) = y_0 a^t$$

donde y_0 representa el valor inicial de la masa y a es una constante con $0 < a < 1$.

Es común que esta expresión se encuentre escrita en términos de la "vida mitad" del material, esto es, el tiempo en que la cantidad inicial de masa se ha reducido "a la mitad".

1) Llamemos t_m a la **vida mitad** del elemento radioactivo. Muestra que t_m no depende de la cantidad inicial de masa y expresa la función $y(t)$ en términos de t_m.

Supongamos el modelo

$$y(t) = y_0 a^t$$

así, la mitad de la cantidad inicial de masa se representa por $\frac{1}{2} y_0$.

Igualemos la cantidad de masa a ese valor y al despejar t *estaremos obteniendo el dato de la vida mitad del material radioactivo representado por la función dada.*

$$\frac{1}{2} y_0 = y_0 a^t$$

$$\frac{1}{2} = a^t$$

Podemos cancelar y_0 *en la expresión ya que* $y_0 \neq 0$ *y así estamos mostrando que la vida mitad no depende de la cantidad inicial; esa es una propiedad que hace útil la detección de estos valores* t_m *para los diferentes materiales.*

Entonces

$$\ln(0.5) = \ln a^t$$

$$\ln(0.5) = t \ln a$$

de donde

$$t = \frac{\ln(0.5)}{\ln a}$$

Hemos determinado que para el material modelado por $y(t) = y_0 a^t$ *se tiene que la vida mitad es*

$$t_m = \frac{\ln(0.5)}{\ln a}$$

Para representar la función $y(t) = y_0 a^t$ en términos de t_m debemos "despejar" el valor de a en la expresión anterior:

$$\ln a = \frac{\ln(0.5)}{t_m}$$

Aplicando en ambos lados la función exponencial natural:

$$e^{\ln a} = e^{\frac{\ln(0.5)}{t_m}}$$

$$a = e^{\frac{\ln(0.5)}{t_m}}$$

$$a = \left(e^{\ln(0.5)}\right)^{\frac{1}{t_m}} = (0.5)^{\frac{1}{t_m}}$$

Por tanto, la función original queda expresada como

$$y(t) = y_0 a^t = y_0\left((0.5)^{\frac{1}{t_m}}\right)^t$$

$$y(t) = y_0 (0.5)^{\frac{t}{t_m}}$$

Todos los materiales tendrían asociada una función exponencial base $a = 0.5$ donde el exponente t se divide entre el número que expresa su vida mitad.

2) El isotopo de carbono radioactivo $C\text{-}14$ y el isotopo de carbono $C\text{-}12$ se encuentran en el dióxido de carbono (CO_2) del aire que respiramos. Todos los seres vivos, al absorber el CO_2 mantienen la misma proporción de $C\text{-}14$ y $C\text{-}12$ que el aire. Pero al morir, cesa la absorción; el isótopo estable $C\text{-}12$ permanece y el carbono 14 comienza a desintegrarse.

La proporción de $C\text{-}14$ es la misma en todos los seres vivos al momento de morir. Con la muerte disminuye de acuerdo al decaimiento exponencial. Se conoce que la vida mitad del $C\text{-}14$ es 5730 años.

Supongamos que se descubre un fósil en el que se detecta la tercera parte de la proporción de $C\text{-}14$ a $C\text{-}12$ que la encontrada en la atmósfera. Calculemos la edad aproximada del fósil.

Conociendo la vida mitad del $C\text{-}14$ *modelamos la situación mediante la función*

$$y(t) = y_0 (0.5)^{\frac{t}{t_m}}$$

$$y(t) = y_0 (0.5)^{\frac{t}{5730}}$$

Sabiendo que $y(t) = \frac{1}{3} y_0$ *tenemos*

$$\frac{1}{3} y_0 = y_0 (0.5)^{\frac{t}{5730}}$$

luego

$$\frac{1}{3} = (0.5)^{\frac{t}{5730}}$$

Aplicamos ln en ambos lados:

$$\ln \frac{1}{3} = \ln (0.5)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\ln 1 - \ln 3 = \frac{t}{5730} \ln (0.5)$$

$$-\frac{\ln 3}{\ln (0.5)} = \frac{t}{5730}$$

de donde

$$t = -\frac{\ln 3}{\ln (0.5)} (5730) \approx 9081.835$$

El fósil data de aproximadamente $9\,082$ *años.*

Caso 3. En la vida real podemos encontrar diversos contextos donde una magnitud aumenta, o disminuye, de acuerdo a un cierto porcentaje. En todos ellos la **función exponencial de base** a es el modelo matemático adecuado para representar el comportamiento de la magnitud. A su vez la **función logaritmo de base** a es la función que invierte (inversa) el efecto de elevar la base a una potencia y por tanto, permite predecir valores de una magnitud modelada exponencialmente.

1) Un bosque tiene actualmente un área de 400 kilómetros cuadrados. Se sabe que su tamaño está reduciéndose cada año en un 5%. Nos interesa predecir en cuánto tiempo el bosque quedará reducido a la mitad de su tamaño.

Sabemos que la magnitud de interés (el tamaño del bosque) puede ser modelada en su comportamiento mediante una función exponencial. Sea y *el tamaño del bosque (en kilómetros cuadrados) y sea* t *el tiempo (en años). Conocemos la condición inicial* $y(0) = y_0 = 400$ *lo cual nos lleva a la información que tenemos en la tabla siguiente sobre la reducción del tamaño del bosque:*

t (años)	$y(t)$ (kilómetros cuadrados)
0	400
1	$400(0.95)$
2	$400(0.95)(0.95) = 400(0.95)^2$
3	$400(0.95)(0.95)(0.95)^3$
4	$400(0.95)(0.95)(0.95)(0.95)^4$
5	$400(0.95)(0.95)(0.95)(0.95)(0.95)^5$

De ahí reconocemos

$$y = y(t) = 400(0.95)^t$$

como el modelo exponencial de base $a = 0.95$ *para el tamaño del bosque.*

Para predecir el tiempo que debe pasar para que el tamaño del bosque, de ser originalmente 400*, se vea reducido a la mitad, debemos plantear la igualdad de la función a* 200*:*

$$400(0.95)^t = 200$$

Buscamos ahora obtener el valor de t *al despejar:*

$$400(0.95)^t = 200$$

$$(0.95)^t = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

Sabemos que aquel número t *que satisface lo anterior es*

$$t = \log_{0.95}(0.5)$$

Tu calculadora científica podría dar el valor numérico si maneja logaritmos de cualquier base. Si es así puedes obtenerlo ahora y concluir que como $t \approx 13.51$ *entonces, en aproximadamente* 13 *años y medio el bosque quedará reducido a la mitad.*

Sin embargo, aún sin una calculadora con esa característica siempre podemos recurrir al logaritmo natural:

como

$$(0.95)^t = 0.5$$
$$\ln(0.95)^t = \ln 0.5$$
$$t\ln(0.95) = \ln 0.5$$
$$t = \frac{\ln 0.5}{\ln(0.95)} \approx 13.5$$

y llegamos a la misma respuesta.

2) Cierto medicamento se elimina del cuerpo de tal modo que cada hora disminuye el 20% de la dosis inicial. Consideremos que se inyectan 10 miligramos. a un paciente. Si el efecto del medicamento requiere que la dosis en el cuerpo sea mayor a 2 miligramos, ¿cuánto tiempo se puede suponer que el medicamento está actuando en el paciente?

Haciendo una tabla con los primeros valores basta para que podamos visualizar la función

$$y(t) = 10(0.8)^t$$

t	$y(t)$
0	10
1	$10 - 10(0.2) = 10(0.8)$
2	$10(0.8)(0.8) = 10(0.8)^2$

Para reconocer el tiempo en que quedan 2 *miligramos en el cuerpo, igualamos* $y(t)$ *a* 2 *y despejamos* t*:*

$$2 = 10(0.8)^t$$
$$\frac{2}{10} = (0.8)^t$$
$$0.2 = (0.8)^t$$

De ahí podemos despejar directamente

$$t = \log_{0.8}(0.2) = \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.8)} \approx 7.213$$

Prácticamente en 7 *horas y* 13 *minutos el efecto del medicamento ha desaparecido.*

3) La inflación es una estimación de la pérdida de valor del dinero. Si un artículo costaba 150 pesos el año pasado, y este año cuesta 165 pesos, estamos hablando de que aumentó su precio en un 10%. Consideremos la situación de mantener un 10% de inflación anual constante. ¿Cuánto costará en 4 años un artículo que este año cuesta $1\,650$ pesos? ¿en cuántos años podemos asegurar que ya se duplicó su precio?

Por efecto de la inflación constante del 10% anual tendremos que el costo de este artículo se modela con la función.

$$y(t) = 1650(1.1)^t$$

lo cual podemos obtener al construir la tabla para los primeros dos años.

t	$y(t)$
0	1650
1	$1650 + 1650(0.1)$ $= 1650(1.1)$
2	$1650(1.1) + 1650(1.1)(0.1)$ $= 1650(1.1)(1+0.1)$ $= 1650(1.1)(1.1)$ $= 1650(1.1)^2$

Con la función calculamos directamente el costo del artículo en 4 años:

$$y(4) = 1650(1.1)^4 = 2415.765$$

Costará en ese entonces unos $2\,415.765$ pesos.

Para saber en cuántos años ya se alcanzó a duplicar su precio, igualamos éste a $2(1\,650) = 3\,300$ y despejamos el tiempo con ayuda de logaritmos:

$$3\,300 = 1\,650(1.1)^t$$

$$2 = (1.1)^t$$

de aquí directamente

$$t = \log_{1.1} 2$$

o bien

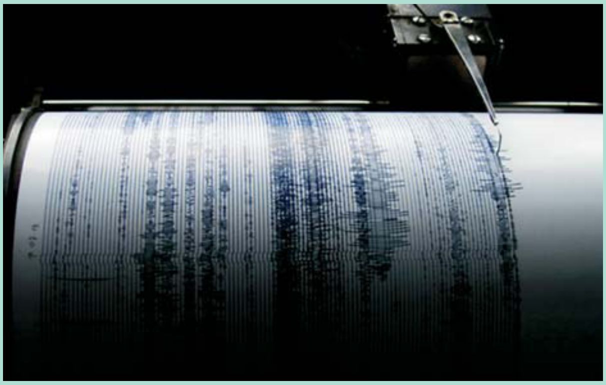
$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1.1} \approx 7.2725$$

Pasados 7 años el artículo habrá llegado a duplicar su valor.

Caso 4. En el mundo existen fenómenos en los que las magnitudes involucradas varían en rangos enormes. Para su medición conviene utilizar por tanto una escala logarítmica, pues, como ya hemos visto, ésta permite tener los datos accesibles. Por otra parte, toda medición es una comparación; se compara con una "unidad" que, dependiendo del contexto real, representa un evento del que tenemos una percepción documentada.

1) La escala de Richter se utiliza para medir la fuerza de un terremoto. La expresión utilizada es

$$R = \log \frac{E}{I_0}$$



donde E es la intensidad de las vibraciones del terremoto medido por un sismógrafo, e I_0 es la intensidad de la unidad de un terremoto estándar.

En México, el terremoto del 19 de septiembre de 1985 funciona como "unidad" que nos ubica a los mexicanos cuando escuchamos de estos eventos que en ocasiones llegan a ser catastróficos. La escala de Richter reportó un 8.1 en su nivel.

Recientemente, el terremoto del 11 de marzo de 2011 en Japón fue reportado en la escala de Richter de nivel 9.

Utilicemos la escala de Richter para comparar ambos eventos.

Para el dato de México tenemos que

$$8.1 = \log \frac{E_M}{I_0} = \log E_M - \log I_0$$

donde E_M *representa la intensidad de ese terremoto. Para el dato de Japón tenemos que*

$$9 = \log \frac{E_J}{I_0} = \log E_J - \log I_0$$

donde E_J *representa la intensidad de este terremoto más reciente.*

Ambas expresiones contienen el término $\log I_0$ *que si logramos anularlo nos permitirá conectar las intensidades* E_M *y* E_J. *Procedemos con ese propósito calculando la resta siguiente:*

$$9 - 8.1 = \log E_J - \log I_0 - (\log E_M - \log I_0)$$
$$0.9 = \log E_J - \log E_M$$
$$0.9 = \log \frac{E_J}{E_M}$$

Ahora aplicamos la función exponencial 10^x *en ambos lados para despejar; esto por ser* $\log = \log_{10}$

$$10^{0.9} = 10^{\log \frac{E_J}{E_M}}$$
$$7.94328 = \frac{E_J}{E_M}$$

De ahí que la expresión

$$E_J = 7.94328\, E_M$$

nos permite apreciar que la intensidad del terremoto en Japón ha sido prácticamente 8 *veces mayor a la del terremoto en México... ¿lo percibes así?*

Por su puesto, al hacer esta comparación deberíamos tomar en cuenta la catástrofe que siguió al terremoto en Japón con un tsunami cuyas olas llegaron a más de 7 *metros de altura, cuyo poder destructivo ocasionó fallas en los reactores nucleares.*

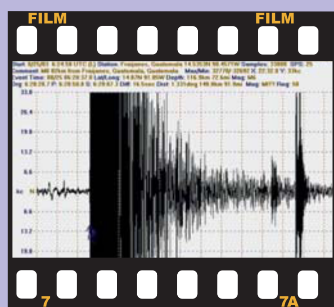
¿Sabías que?...

En vez de la escala de **Richter** se está utilizando una más reciente, la escala de **magnitud de momento** que permite tener información que la primera no puede dar.

Esta escala tiene la ventaja de que sí permite la distinción entre eventos que rebasan la magnitud 7, valor hasta el cual ambas escalas están calibradas. La sola medición de la escala de Richter difícilmente puede representar el total de energía emitida por terremotos arriba de este valor.

La escala de Richter mide ondas sísmicas que viajan por el subsuelo con frecuencias relativamente altas. Los sismógrafos, que son delicados instrumentos formados con una balanza y un rollo de papel, registran la amplitud de la onda cuando la tierra se mueve, y también pueden medir ondas de superficie pero de frecuencias específicas. Sin embargo, los grandes terremotos emiten su energía en ondas de superficie con frecuencias bajas y se mueven sobre la superficie de la tierra con una gran fuerza destructiva; su amplitud no representa realmente la energía que liberan.

A través de una gama de sensores ahora es posible tomar en cuenta la distancia a la que se deslizó una falla, el tamaño de la zona y el material físico en que tuvo lugar. Utilizando estos datos sísmicos se puede tener una representación gráfica tridimensional de la cual se calcula la energía total liberada por el terremoto; esto es lo que representa el número emitido en la escala de la **magnitud de momento sísmico.**



Japón lleva décadas trabajando en medidas antisísmicas. La potencia del reciente terremoto, que por cierto, fue medida en esta nueva escala y no en la de Richter, seguramente hubiese destruido por completo cualquier ciudad que no haya destinado recursos a la prevención del devenir de estos eventos. Gracias a la ciencia y la tecnología Japón se recuperará de esta catástrofe, ciertamente impresionante, mas no misteriosa . . . a fin de cuentas estamos hablando de un fenómeno donde fuerzas de compresión producen una rotura en la corteza terrestre a través de la cual se provoca un desplazamiento, y placas por debajo se deslizan hacia arriba, por encima de estratos más recientes...hecho que resulta completamente natural.

2) La escala de decibelio es útil en la medición del nivel de potencia acústica del sonido. Se trata de una escala de proporción que relaciona la potencia o intensidad de sonido con respecto a un nivel de referencia.

La expresión

$$D = 10\log\frac{W}{W_0}$$

Calcula el nivel de potencia D que permite apreciar la sensación recibida por un oyente a partir de unidades físicas medibles (decibeles) de una fuente sonora. Por su parte, W representa la potencia del sonido a estudiar $\left(\text{en } \frac{W}{m^2}\right)$ y W_0 es el valor de referencia, igual a $10^{-12}\frac{W}{m^2}$ que corresponde aproximadamente con el umbral de audición en el aire.

Mostraremos que un aumento de 10 veces la potencia W_1 con respecto a la referencia W_0 significa un aumento de 10 decibeles, y que el aumento al doble de la potencia W_1 con respecto a W_0 significa un aumento de 3 decibeles.

Calcularemos además la potencia W que se asocia con el umbral de dolor para el humano con media de aproximadamente 120 decibeles.

Para calcular la medida en decibelios al aumentar 10 veces la potencia W_1 debemos calcular

$$D = 10\log\left(\frac{10W_1}{W_0}\right)$$

que por las propiedades de $\log$ podemos separar en

$$D = 10\log(10)\left(\frac{W_1}{W_0}\right) \quad = 10\left(\log 10 + \log\frac{W_1}{W_0}\right)$$

$$= 10\left(1 + \log\frac{W_1}{W_0}\right) \quad = 10 + 10\log\frac{W_1}{W_0}$$

y como el valor de $10\log\frac{W_1}{W_0}$ representa la medida en decibelios original, antes de haberlo considerado 10 veces la potencia, entonces hemos mostrado que la medida en decibelios para esta última es 10 decibelios más que la original, por el número 10 que se suma en la expresión obtenida.

De igual manera, si tenemos el aumento del doble de la potencia, para calcular la medida en decibelios debemos calcular

$$D = 10\log\left(\frac{2W_1}{W_0}\right) = 10\log(2)\left(\frac{W_1}{W_0}\right)$$

$$= 10\left(\log 2 + \log\left(\frac{W_1}{W_0}\right)\right)$$

$$= 10(0.301) + 10\log\left(\frac{W_1}{W_0}\right)$$

$$= 3 + 10\log\left(\frac{W_1}{W_0}\right)$$

por tanto, la nueva medida del doble de potencia aumenta en 3 *decibelios la medida original.*

Finalmente, si el umbral de dolor se considera en 120 *db, calculemos la potencia a que esto equivale al despejar* W *en la función* D *igualada a* 120*.*

$$120 = 10\log\left(\frac{W}{W_0}\right) = 10(\log W - \log W_0)$$

$$120 = 10\left(\log W - \log\left(10^{-12}\right)\right) = 10(\log W - (-12))$$

$$120 = 10(\log W + 12) = 10\log W + 120$$

$0 = 10\log W$ *de donde* $0 = \log W$ *y* $W = 10^0 = 1$

Por tanto, $W = 1\ \frac{W}{m^2}$ *representa la potencia correspondiente al umbral de dolor en el oído humano.*

Las funciones trigonométricas

En el tema 1.7 construimos los modelos trigonométricos seno y coseno además de su estrecha relación, no sólo por efectos gráficos:

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

sino también por el comportamiento que hemos evidenciado entre función y derivada:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad f'(x) = \cos x$$

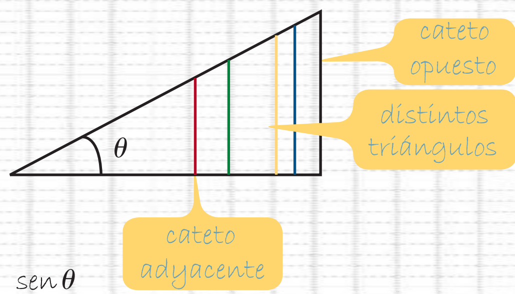
El propósito de este apartado es reconocer los cuatro modelos trigonométricos restantes de un modo gráfico.

En Trigonometría aprendiste que la tangente de un ángulo θ se calcula en cualquier triángulo rectángulo que tenga a este como uno de sus ángulos internos. Se divide el cateto opuesto entre el cateto adyacente.

El seno y coseno del ángulo θ en cualquiera de los triángulos se calculan como:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$



Y la tangente es:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}{\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

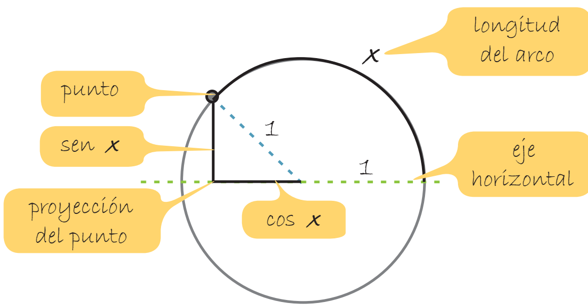
En concordancia con lo anterior, definimos la función trigonométrica

$$y = f(x) = \tan x$$

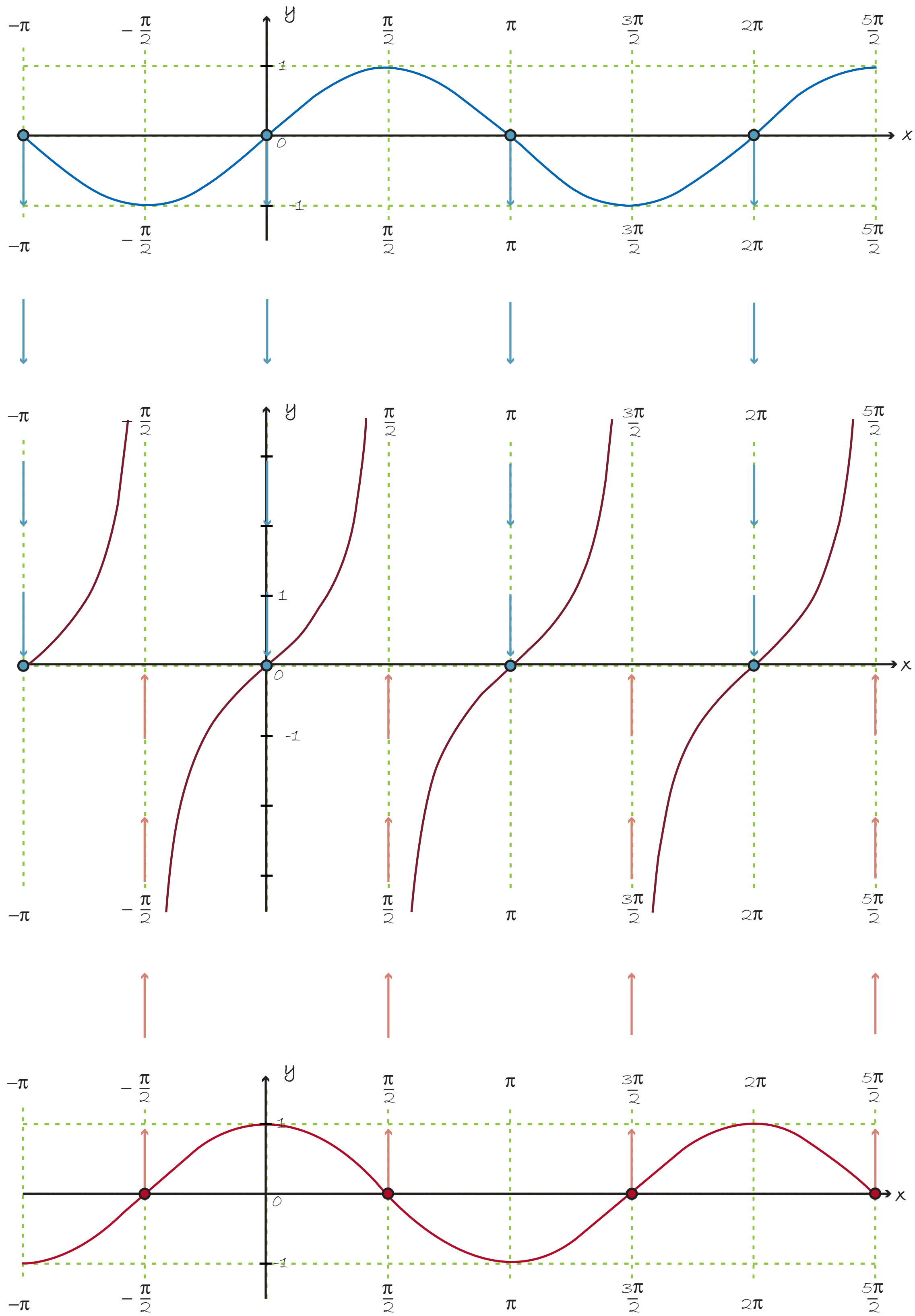
como el cociente de las funciones seno y coseno

$$y = f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

donde x representa la medida en radianes del ángulo central (longitud de arco).



Procedemos a reconocer su gráfica a partir de razonar numéricamente sobre los valores que se obtienen de la división para distintos valores de x. Observa la siguiente imagen con detenimiento y en seguida de ella encontrarás lo que puedes visualizar.



$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
y
x
1
0
-1

Habrás notado que en la imagen anterior consideramos los cortes con el eje x de la función seno, donde $\operatorname{sen} x = 0$. Esto es, $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Para obtener la tangente en esos x, el numerador es 0 mientras que el denominador no lo es, por tanto

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x \neq 0} = 0$$

y así la gráfica de la tangente cruza por el eje x en los mismos lugares que lo hace la gráfica del seno, en $x = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $\tan x = 0$.

Por otra parte, consideramos los cortes con el eje x de la función coseno, donde $\cos x = 0$. Esto es, $x = (2n-1)\frac{\pi}{2}\quad n \in \mathbb{Z}$.

Al calcular la tangente se tendría la división entre 0, lo cual no es posible… definitivamente esos x no se encuentran en el dominio de la función tangente.

Pero siendo que $\operatorname{sen} x \neq 0$ en ellos podemos analizar el comportamiento del cociente $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ a medida que nos acercamos a cada uno de los valores de $x = (2n-1)\frac{\pi}{2}$. Si observas, cada vez que nos acercamos por el eje x a alguno de esos valores se tiene la división de un número que no es 0 entre un número que casi es 0, y por tanto, el cociente crece indefinidamente. Lo hace a veces por valores positivos y a veces por valores negativos, según el signo del $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ que se considere. Cada uno de estos valores de x da lugar a una asíntota vertical, como puede observarse en la imagen de la página anterior.

¡TOMA NOTA!

La gráfica de la **tangente** trigonométrica es una curva que está formada por una infinidad de "ramas"

¡TOMA NOTA!

Todas ellas con el mismo comportamiento: crecen y se "pegan" a las asíntotas verticales

¡TOMA NOTA!

La concavidad cambia de abajo hacia arriba en los puntos (de inflexión) sobre el eje x.

¡TOMA NOTA!

En $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{sen} x$ es positivo

$\cos x$ es positivo

entonces

$\tan x$ es positivo

porque $\frac{+}{+} = +$

¡TOMA NOTA!

En $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

$\operatorname{sen} x$ es negativo

$\cos x$ es positivo

entonces

$\tan x$ es negativo

porque $\frac{-}{+} = -$

¡TOMA NOTA!

La gráfica de la tangente trigonométrica es periódica, su periodo es π

¡TOMA NOTA!

En $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\operatorname{sen} x$ es positivo

$\cos x$ es negativo

entonces

$\tan x$ es negativo

porque $\frac{+}{-} = -$

¡Toma nota!

$\frac{1}{1} = 1 \quad \frac{1}{-1} = -1$

x pequeño … $\frac{1}{x}$ grande

x grande … $\frac{1}{x}$ pequeño

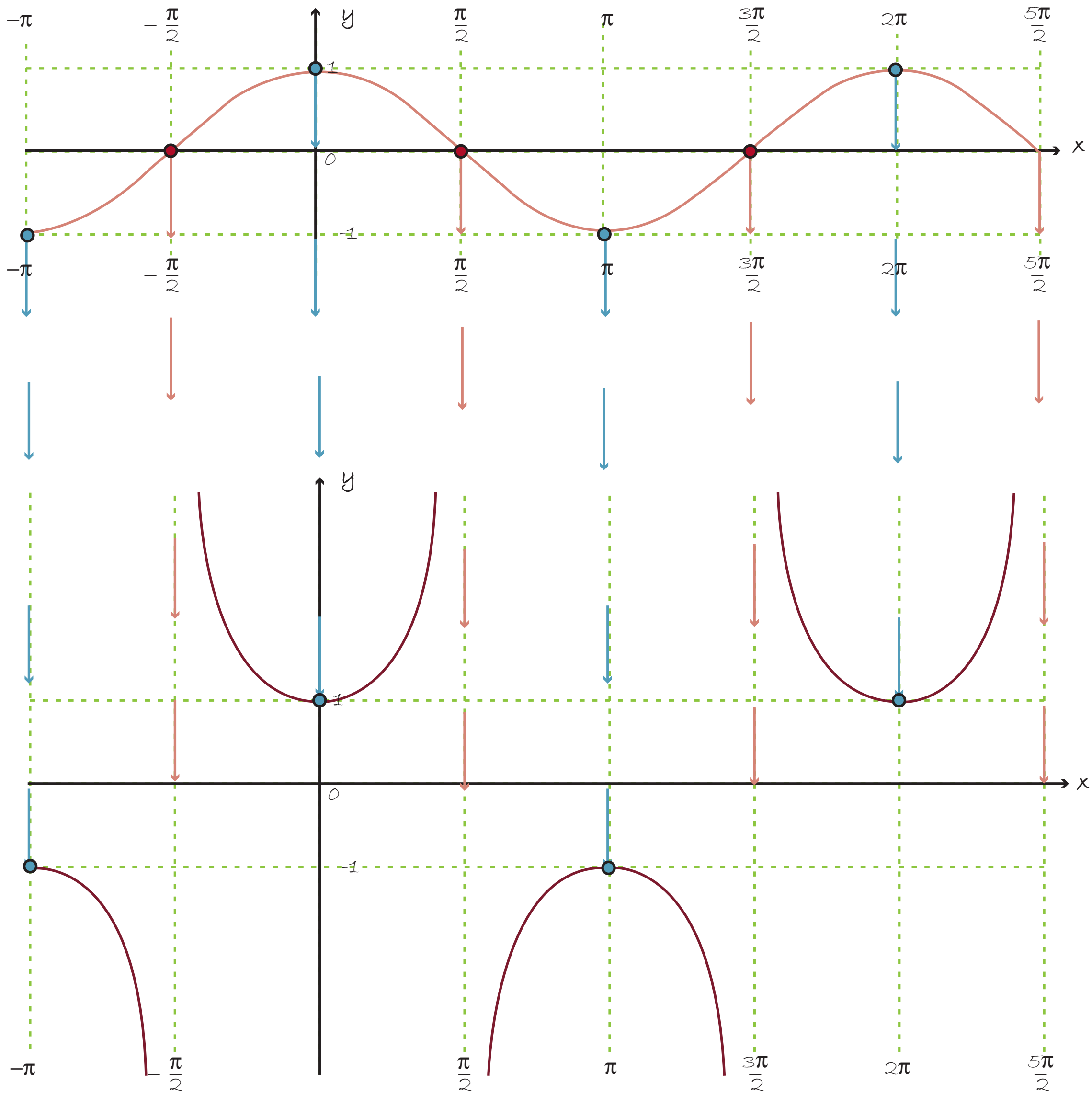
Para la función secante, obtendremos su gráfica razonando numéricamente de nuevo. Sólo que ahora tenemos la definición de

$$y = f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

La secante es **el recíproco** de la función $y = \cos x$, lo que numéricamente manifiesta un patrón de comportamiento peculiar. En efecto, antes de observar la imagen de abajo, piensa por qué los puntos con $y = \pm 1$ deben quedarse en su lugar.

Además verifica con tu calculadora que si un número x está entre 0 y 1, y $x \to 0^+$, su recíproco $\frac{1}{x} \to +\infty$, mientras que si el número x está entre -1 y 0, y $x \to 0^-$, su recíproco $\frac{1}{x} \to -\infty$.

Pero una imagen dice más que mil palabras…



La función cotangente se define como

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

pero a su vez puedes escribir:

$$y = f(x) = \cot x = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{1}{\tan x}$$

La función cosecante se define como

$$y = f(x) = \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Ambas son **el recíproco** de otra gráfica ya conocida. Esta operación numérica permite visualizar el comportamiento de la gráfica. En la siguiente imagen puedes comprobarlo y, a la vez, te sirve como una forma de evocar los comportamientos de las seis funciones trigonométricas…recordando dominios, rangos, períodos, cortes con los ejes y asíntotas verticales.

¡TOMA NOTA!

$\tan x = 0$ cuando $\operatorname{sen} x = 0$

… en $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$\cot x = 0$ cuando $\cos x = 0$

… en $x = (2n-1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

¡TOMA NOTA!

$\sec x = 0$

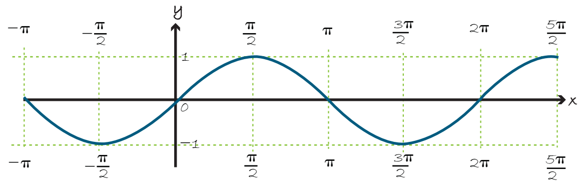
no tiene solución,

y

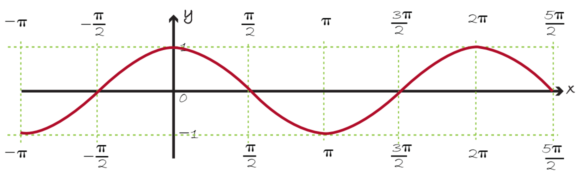
$\csc x = 0$

tampoco.

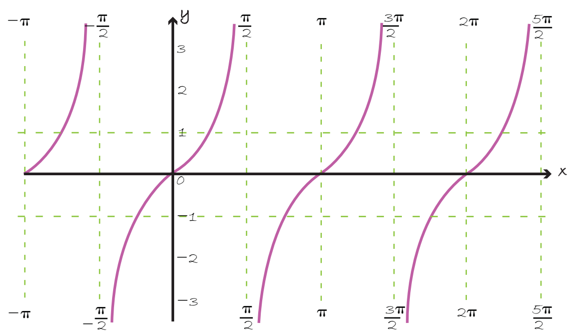
$y = \operatorname{sen} x$



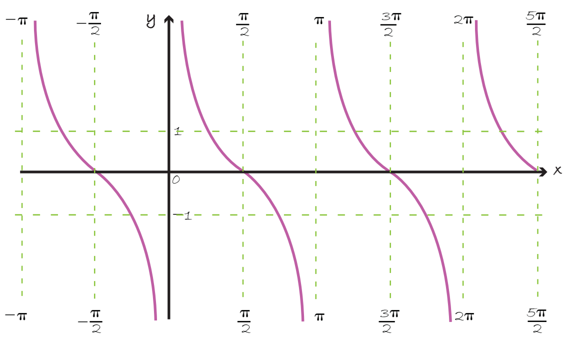
$y = \cos x$



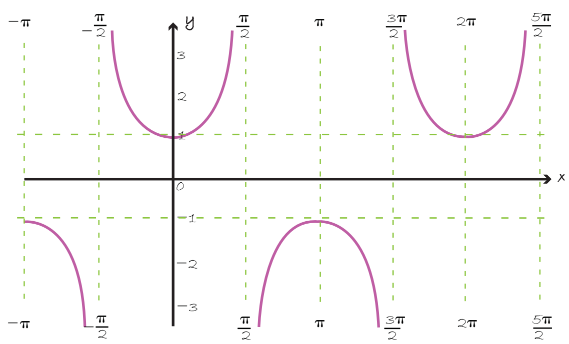
$y = \tan x$



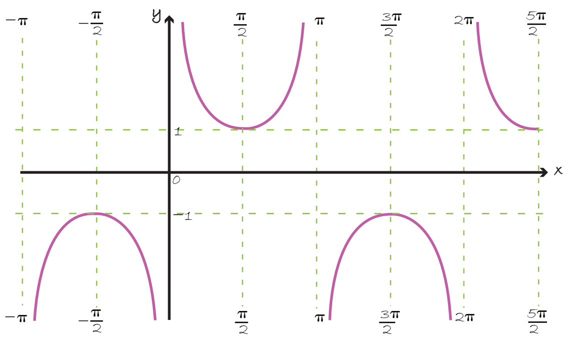
$y = \cot x$



$y = \sec x$



$y = \csc x$



¡Toma nota!

$\operatorname{sen} x = \cos x$ en

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{sen} x = -\cos x$ en

$x = -\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$\tan x = 1$ en

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$\tan x = -1$ en

$x = -\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Las funciones trigonométricas inyectivas y trigonométricas inversas.

En Matemáticas es importante considerar la propiedad llamada **inyectividad**, que no todas las funciones poseen. Nos referimos a lo que se puede ilustrar fácilmente con la función $y = \operatorname{sen} x$ donde la pregunta:

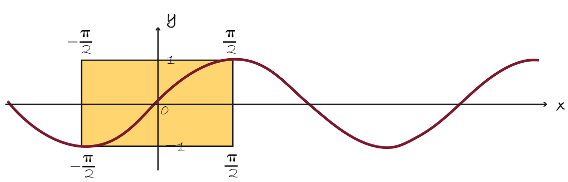
¿en qué x es $\operatorname{sen} x = 0$?

...tiene una infinidad de respuestas.

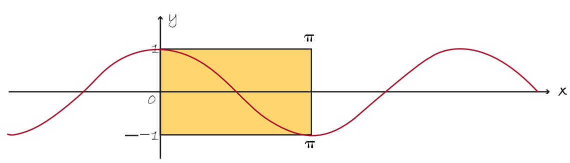
La función $y = \operatorname{sen} x$ **no es inyectiva.**

La necesidad de emitir una única respuesta (para el valor trigonométrico de un ángulo en este caso) obliga a restringir el dominio de la función dejando que su gráfica sólo consista de un ciclo; y para decidir cuál ciclo dejar, ya se han tomado acuerdos. Te presentamos en la siguiente imagen las “zonas” en que se ha acordado considerar a las seis funciones trigonométricas para hacer de ellas **funciones trigonométricas inyectivas**.

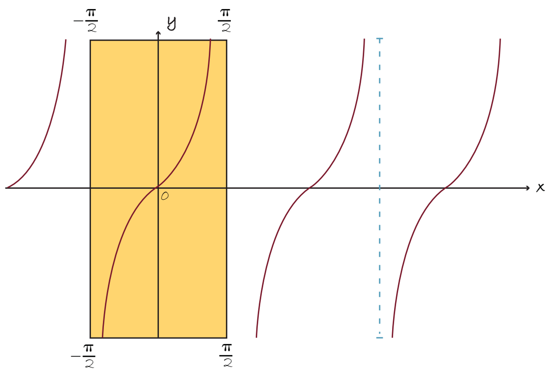
$y = \operatorname{sen} x$



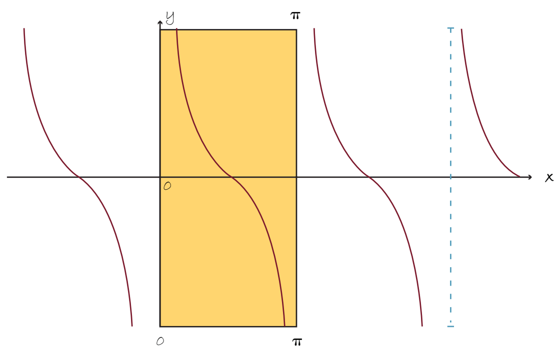
$y = \cos x$



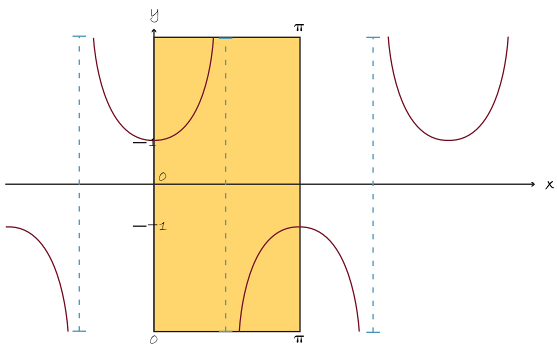
$y = \tan x$



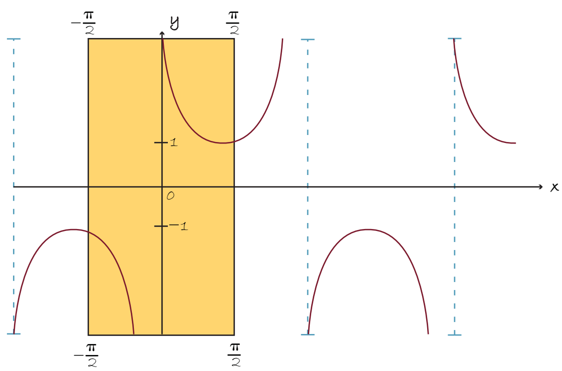
$y = \cot x$



$y = \sec x$



$y = \csc x$



Una vez que estamos seguros que será única la respuesta (cuando la haya) a cualquier pregunta del tipo:

¿para cuál x es

$$\operatorname{sen} x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x,\ \sec x,\ \text{o}\ \csc x$$

igual a un número y dado?

podemos proceder a reconocer las funciones trigonométricas inversas, que contestan esta pregunta con la respuesta numérica que ahora cualquier calculadora científica (en su modo en radianes) debe dar…

En términos matemáticos, la pregunta equivale a "despejar" x en las expresiones:

$$y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ y = \tan x,\ y = \cot x,\ y = \sec x$$

y $y = \csc x$

La respuesta consiste simplemente en redactar:

"x es el ángulo (arco) cuyo seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante… es igual a y".

La redacción entrecomillada tiene su propia simbología matemática en las expresiones:

$$x = \operatorname{arc\,sen} y,\ x = \arccos y,\ x = \arctan y,$$

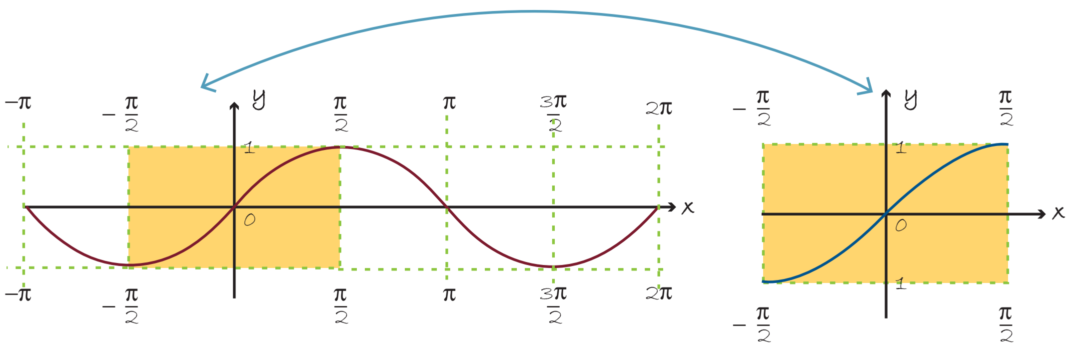
$$x = \operatorname{arccot} y,\ x = \operatorname{arcsec} y,\ \text{y}\ \ x = \operatorname{arccsc} y$$

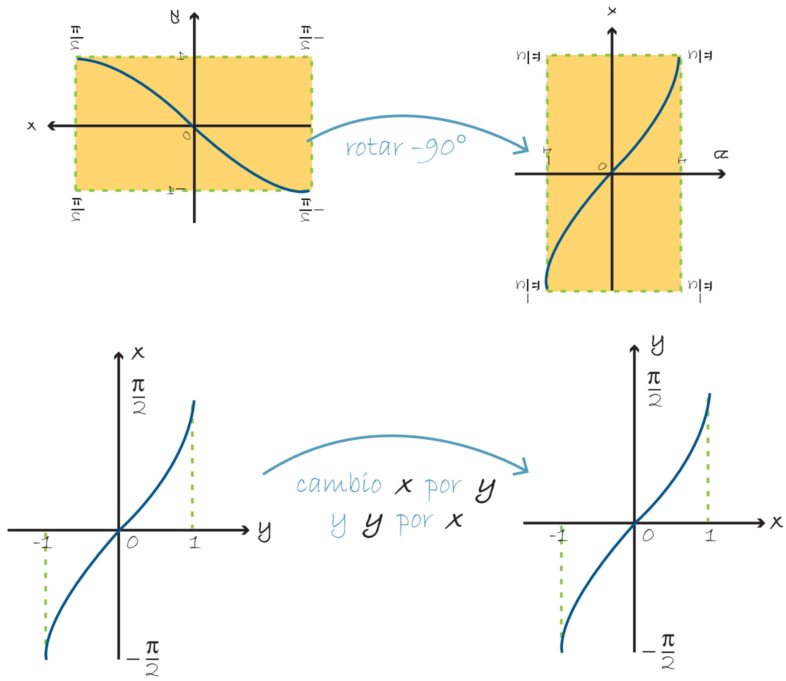
Sólo resta intercambiar el rol de las variables x, y por y, x de modo que la variable independiente sea x como es costumbre, y la variable dependiente, como es costumbre, sea y.

Para el caso de la función inyectiva seno, vamos a ilustrar la forma de obtener la gráfica de este "despeje" del ángulo medido en radianes que, como en el caso de la función logaritmo natural, corresponde con un efecto de invertir el rol de las variables en la función exponencial natural para expresar su **función inversa**.

Gráficamente, el proceso consiste en "recortar la gráfica del papel y voltearla hasta verla por detrás, para después rotarla 90 grados a favor de las manecillas del reloj logrando con esto colocar el eje y en la posición que antes tenía el eje x y este último en la posición que antes tenía el eje y.

… en $y = \operatorname{sen} x$ con x en $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$





¡TOMA NOTA!

El recíproco de la función

$y=f(x)$ es $y=\dfrac{1}{f(x)}$

El inverso de la función

$y=f(x)$ es $x=f^{-1}(y)$

La última de estas gráficas corresponde con la función inversa de la función seno, una vez que ésta se ha hecho inyectiva. En ocasiones se utiliza la desafortunada notación del "exponente" -1 para denotar a la función inversa:

$$y = f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arcsen} x$$

y decimos desafortunada porque se presta a confusión con la notación de exponente, en donde debemos entender

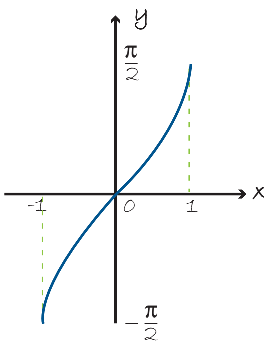
$$\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$$

y esto definitivamente no es lo que queremos expresar con la función inversa.

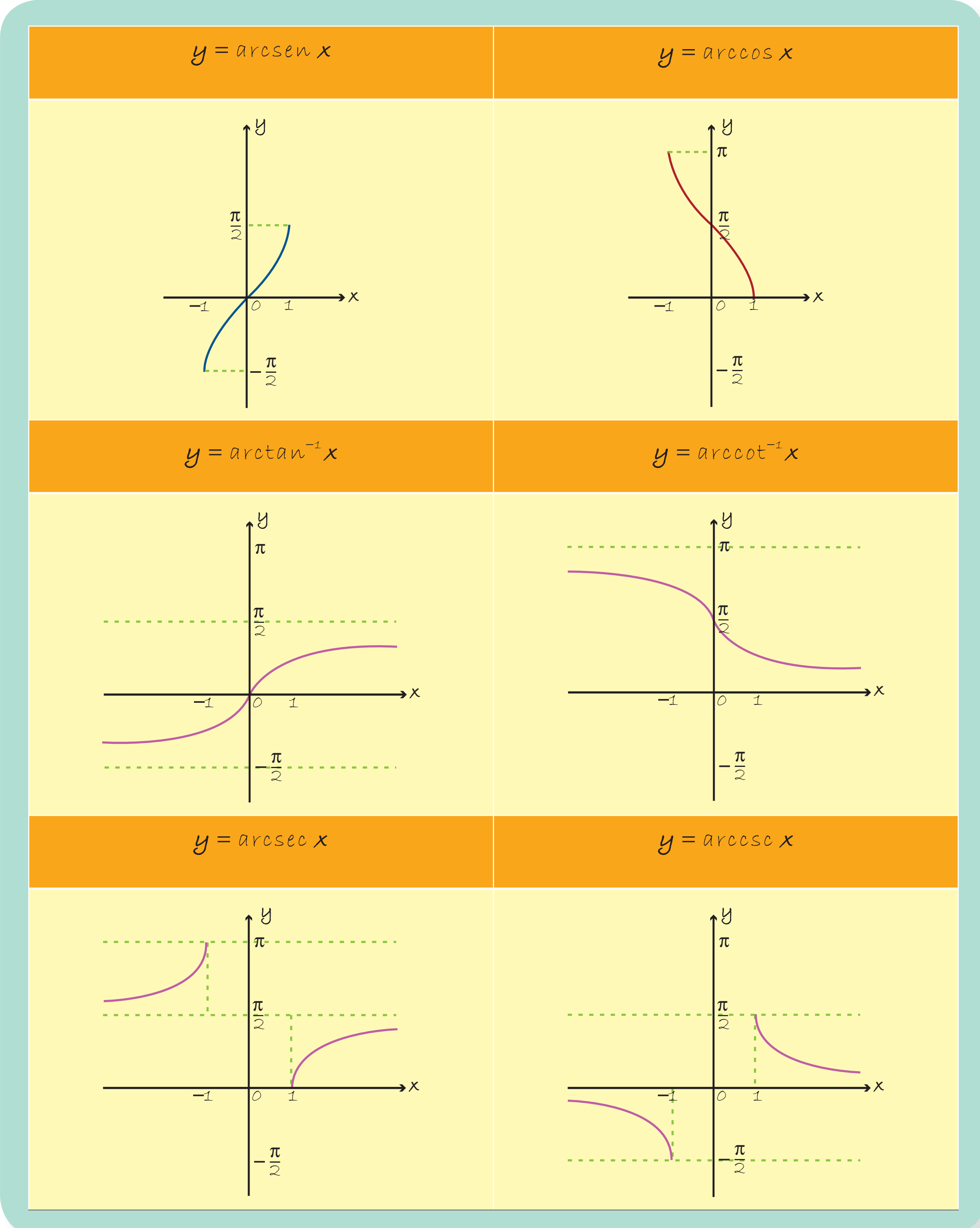
En la medida de lo posible vale la pena utilizar la notación que hemos introducido de agregar el prefijo "*arc*" que a la vez nos recuerda que estamos encontrando el "*arco*" (medida en radianes de un ángulo) que tiene tal valor en alguna función trigonométrica. De este modo, definimos a la función seno inverso o arco seno mediante la expresión

$$y = f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arcsen} x$$

cuya gráfica mostramos en seguida y cuyo dominio es el intervalo $\left[-1, 1\right]$, mientras que su rango o imagen es el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.



Análogamente, consideramos las funciones inversas de cada una de las funciones trigonométricas inyectivas obteniendo las gráficas que te mostramos en la siguiente imagen. Es importante notar que el dominio de la función inversa es el rango de la función inyectiva de la que proviene, y el rango de la función inversa es el dominio de la función inyectiva de la que proviene. Verifica esto en las gráficas siguientes:



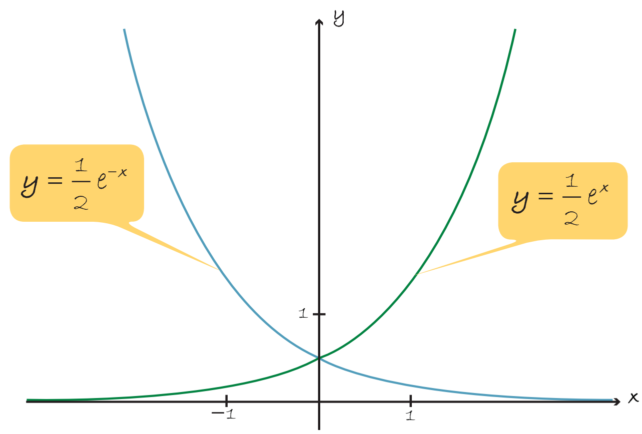
Las funciones hiperbólicas

Un último modelo matemático trataremos en este tema, se trata de funciones que se definen en términos de la función exponencial natural y que surgen en relación con una de las primeras aplicaciones del Cálculo para entender fenómenos naturales. Preguntarse por la forma de una cadena que cuelga llevó al reconocimiento de una expresión como la que te proponemos construir en seguida.

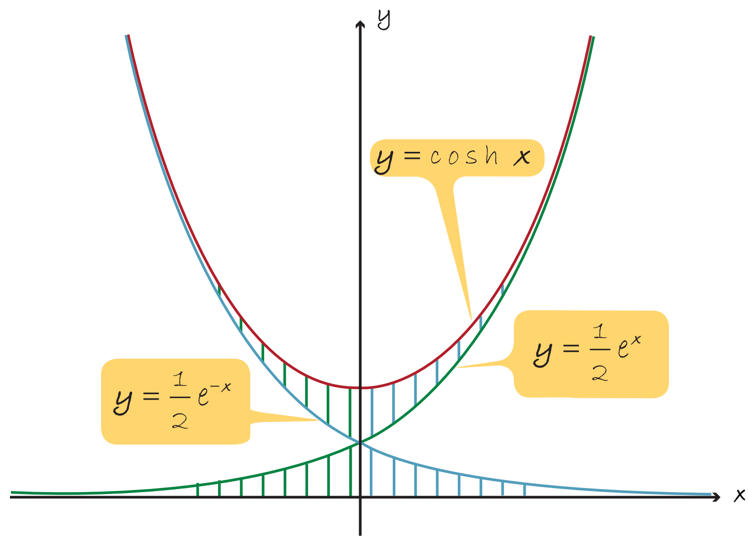
Considera las funciones

$$y = \frac{e^{x}}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{e^{-x}}{2}$$

en el mismo sistema coordenado. La suma de estas dos funciones es lo que se conoce como el **coseno hiperbólico**.



Esa "suma de gráficas" la podemos visualizar si levantamos segmentos en las partes que se acercan al eje horizontal en ambas curvas y los agregamos en la parte correspondiente de la otra curva, como lo muestra la figura.



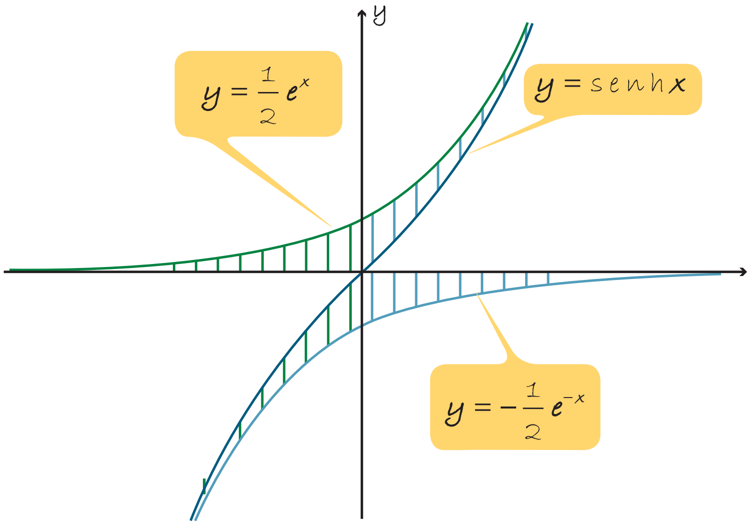
Observa los segmentos en el lado positivo del eje horizontal y luego los del lado negativo…los colores informan las sumas de las alturas en las gráficas. A la gráfica verde en el lado positivo le "agregamos" los segmentos azules de la otra gráfica, y a la gráfica azul de lado negativo le "agregamos" los segmentos verdes de la otra gráfica.

¡TOMA NOTA!

No todo lo que brilla es oro…
No todo lo que sube y baja…
o baja y sube…
es **parábola**…

Observa que esta suma de gráficas nos informa que la nueva curva se acerca a cada una de las dos curvas originales manifestando un crecimiento exponencial por ambas zonas, cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. En este sentido, ambas curvas funcionan como asíntotas de la nueva gráfica.

Por otra parte, para la función que se conoce como función **seno hiperbólico** lo que se hace es la resta de las funciones exponenciales dadas. Esa "resta de gráficas" podemos verla como "suma de gráficas", sólo que previamente introducimos un signo negativo en la gráfica azul para reflejarla …y ahora sumamos alturas positivas con alturas negativas.



La forma en que se definen estas "nuevas" funciones nos permite identificar sus derivadas, lo haremos como un ejercicio de algoritmia en derivación, dado que sabemos derivar las dos funciones exponenciales que les definen.

Si $y = f(x) = \text{senh}\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}e^x - \dfrac{1}{2}e^{-x}$

entonces su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}(-1) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Si $y = f(x) = \cosh\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}e^x + \dfrac{1}{2}e^{-x}$

entonces su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}(-1) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{senh}\, x$$

Las funciones hiperbólicas se definen en términos de la función exponencial natural en la forma:

$$y = f(x) = \text{senh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad y = f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

El dominio de estas dos funciones son todos los números reales.

El rango o imagen de $y = \text{senh}\, x$ son todos los reales, mientras que el de $y = \cosh x$ es el intervalo $[1, \infty)$

Y en cuanto a sus derivadas:

si $y = \text{senh}\, x$ entonces $y' = \cosh x$ y

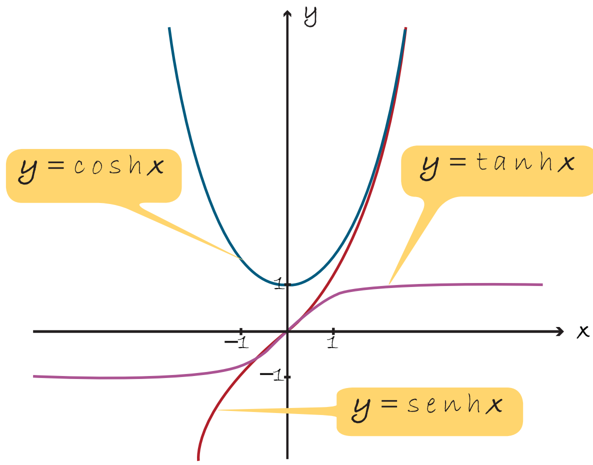
si $y = \cosh x$ entonces $y' = \text{senh}\, x$

¡Toma nota!

La **diferencia** entre las derivadas de seno y coseno **trigonométricas** y seno y coseno **hiperbólicas**

...¡es un simple signo −!

En analogía con la función trigonométrica tangente, se define la tangente hiperbólica como el cociente de seno entre coseno hiperbólico. Visualizar la "división de gráficas" nos permite llegar a la curva que mostramos en seguida donde es notorio que el dominio son todos los números reales, ya que se divide entre $\cosh x \geq 1$ (no es 0 nunca). Además, el parecido de los valores de $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$ para x es muy grande lo que provoca que la curva se estabilice en la altura 1 y en la altura -1 cuando $x \to -\infty$.



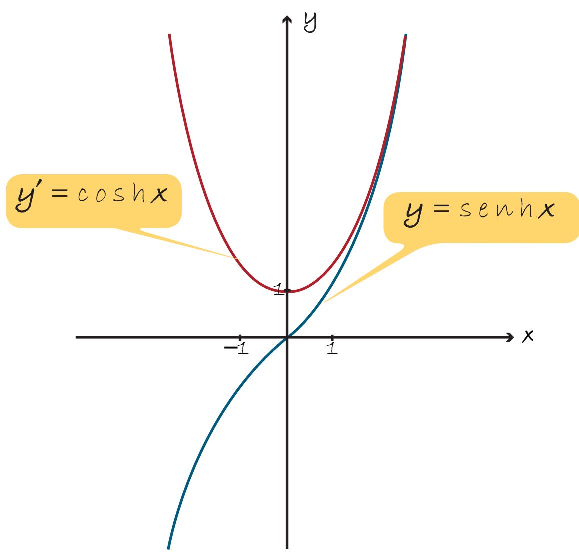
Se define

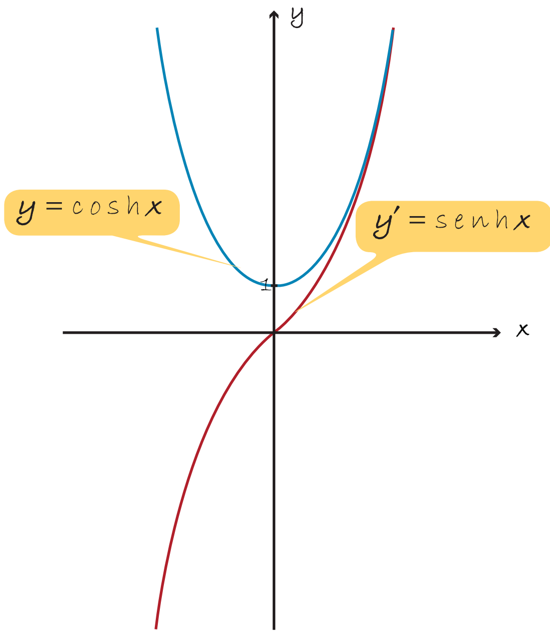
$$y = f(x) = \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

cuyo dominio son todos los números reales y y cuyo rango o imagen es el intervalo $[-1, 1]$

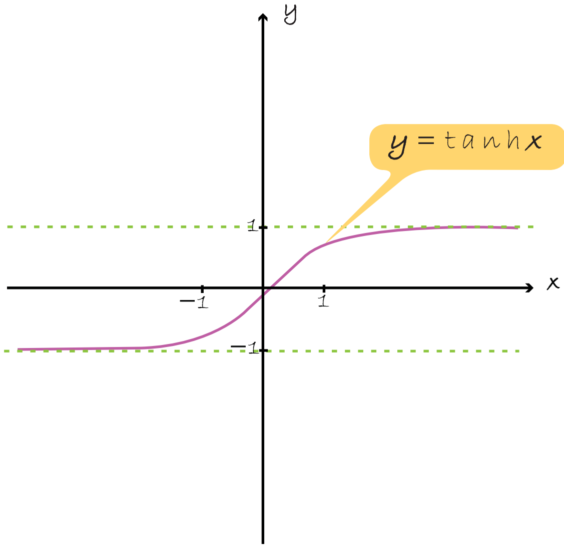
Un último aspecto de **visualización** podemos reafirmar con estas nuevas funciones. Observa la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ y la de su derivada $y' = \cosh x$ para que confirmes que $y = \operatorname{senh} x$ no tiene máximo ni mínimo (su derivada no cruza el eje x pero sí tiene un punto de inflexión en el origen (su derivada tiene un mínimo en $x = 0$).

A su vez, si observas la gráfica de $y = \cosh x$ y la de su derivada $y' = \operatorname{senh} x$ puedes confirmar que $y = \cosh x$ tiene un punto mínimo en $(0, 1)$ (su derivada cruza el eje x de valores negativos a positivos) y no tiene punto de inflexión (su derivada no tiene punto máximo ni mínimo).





Por último, las asíntotas horizontales en $y = \pm 1$ para la tangente hiperbólica se reconocen en el cálculo de los límites al infinito de un cociente, donde nuestra estrategia visual de mantener el término que "domina" permite determinarlo. Lo mostramos en seguida.



$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} 1 = 1$$

porque el término e^x domina a ambos términos: $e^x - e^{-x}$ y $e^x + e^{-x}$, ya que e^{-x} es muchísimo más pequeño que e^x siendo que $x \to \infty$.

Análogamente

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-e^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} -1 = -1$$

porque en este caso en que $x \to -\infty$ el término e^{-x} domina a e^x pues este último es muchísimo más pequeño que el primero, cuyo exponente $-x$ se vuelve positivo (al ser x negativo).

Esta obra es un producto del trabajo colegiado realizado por profesores del Departamento de Matemáticas del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey.

En ella se propone una innovación en la enseñanza-aprendizaje del Cálculo que se fundamenta en la investigación educativa realizada por los autores.

Los autores cuentan con estudios de la Licenciatura en Matemáticas además de haber obtenido el posgrado, en Maestría en Matemáticas y Doctorado en Matemática Educativa.

Vista de la explanada entre el CIAP y el Centro de Biotecnología.

TEC de Monterrey®
DEL SISTEMA TECNOLÓGICO DE MONTERREY

CÁLCULO APLICADO
Competencias matemáticas a través de contextos
TOMO I

Este texto propone un *qué*, un *cómo*, y un *para qué* enseñar Cálculo que favorezcan un aprendizaje *funcional*.

La meta es lograr que puedas inferir resultados del Cálculo a partir de una variedad de contextos reales, y que razones utilizando sus nociones y procedimientos.

Reconocerás un contenido que surge al abordar problemas relacionados con la práctica de *predecir el valor de una magnitud que está cambiando*.

Tendrás oportunidad de ser partícipe en la generación de conocimientos relacionados con la *problemática de variación* que el Cálculo trata, y utilizarás recursos tecnológicos integrados al contenido para interactuar con dicha problemática.

Hemos considerado problemas reales para asociar un significado a las nociones y procedimientos, procurando con ello un aprendizaje efectivo y transferible a los cursos de especialidad de tu carrera profesional.

Lograr en ti la movilización de la información obtenida sobre Cálculo hacia otros campos disciplinares, es la empresa que nos motiva a proponer esta nueva obra como un medio para impulsar tu *desarrollo de competencias matemáticas*.

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607481771-3
ISBN-10: 607481771-5

9 786074 817713